

УДК 530.145, 535.14, 519.224

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИКИ ФОТОНОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПАУНД-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА И КВАДРАТУРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ*

Ю. И. Богданов^{1,2,3}, Н. А. Богданова^{1,3}, К. Г. Катамадзе^{1,4},
Г. В. Авосопянц^{1,3}, В. Ф. Лукичев¹

¹Физико-технологический институт РАН,
117218, Москва, Нахимовский проспект, 36/1

²Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

³Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»,
124498, Москва, Зеленоград, пл. Шокина, 1

⁴Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
119991, Москва, Ленинские горы, 1

E-mail: bogdanov_yurii@inbox.ru

Предложена модель составного компаунд-распределения Пуассона для статистики фотонов с учётом их группировки в различных состояниях, включая фоковские, тепловые и т. д. С использованием метода производящих функций вычислены распределения вероятностей, моменты и корреляционные функции. Найлены параметры условных состояний, возникающих при вычитании фотонов посредством делителя пучка. Рассмотрена задача реконструкции состояний по квадратурным квантовым измерениям. Исследование направлено на разработку высокоточных методов генерации и контроля оптических квантовых состояний.

Ключевые слова: квадратурные квантовые измерения, гомодинное детектирование, компаунд-распределение Пуассона, производящие функции, статистика фотонов, тепловые состояния, условные распределения, отвечающие отщеплению фотонов.

DOI: 10.15372/AUT20160509

Введение. Разработка методов генерации и измерения квантовых состояний света имеет большое значение для обеспечения качества и эффективности квантовой криптографии и квантовых информационных технологий в целом [1]. Долгое время для квантово-информационных задач использовались преимущественно дискретные степени свободы света, реализованные на основе поляризационных и фазовых кубитов. Уже в этом случае для восстановления квантового состояния необходимо провести достаточно большое количество различных проекционных измерений и каждое нужно повторить много раз, чтобы набрать достаточную статистику [2–4]. Для увеличения размерности передаваемых квантовых состояний можно переходить к парам коррелированных фотонов (кутриты и кукварты [5–7]), однако далее увеличивать размерность таким образом сложно, поскольку даже генерация трёхфотонных состояний представляет трудную экспериментальную задачу, которая пока не имеет хорошего технологического решения [8, 9]. Поэтому в последнее время всё большей популярностью пользуется кодирование квантовой информации в непрерывных переменных электромагнитного поля: в пространственных модах [10–12], частотно-временных модах [13, 14] и квадратурных состояниях [15].

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-01338).

Последний вариант особенно интересен тем, что в отличие от других случаев информация передаётся не фоковскими состояниями света с заданным числом фотонов, а состоянием с произвольным распределением по числу фотонов. Собственно, параметры этого распределения и являются носителями информации. Однако для полного восстановления квадратурных состояний недостаточно лишь измерить статистику фотоотсчётов — необходимо получить квадратурные распределения. Как правило, для этого используют технику гомодинного детектирования [16].

Экспериментально были получены и измерены самые разнообразные квадратурные состояния: когерентные, фоковские, тепловые, сжатые и другие [17]. Строго говоря, размерность таких состояний бесконечна, поэтому их определение и восстановление являются сложной задачей, требующей адекватного подхода к ограничению размерности [18, 19].

В данной работе рассматриваются состояния, описываемые как смесь фоковских состояний. Среди них наиболее часто в природе встречается тепловое состояние, в котором фоковские состояния имеют бoльцмановское распределение по энергии. Для генерации оптического аналога такого состояния достаточно выделить одну пространственную частотно-временную моду от теплового источника. Для увеличения интенсивности и времени когерентности подобных состояний используют квазитепловые источники, в которых лазерное излучение пропускается через вращающийся матовый диск [20, 21]. Эффективная температура такого излучения определяется мощностью лазера, а время когерентности — временем прохождения характерной неоднородности диска через сечение оптического пучка (фактически время может изменяться от нескольких микросекунд до нескольких секунд).

Несмотря на то что тепловые состояния света являются классическими объектами, они обладают корреляциями, в частности их нормированная автокорреляционная функция в нуле: $g^{(2)}(0) = 2$. Это отличительное свойство позволяет использовать данные поля в тех же приложениях, в которых себя хорошо зарекомендовали неклассические состояния света, например бифотонные поля или сжатый вакуум. Среди них отметим призрачное изображение [22–24], квантовое освещение [25, 26], оптическую когерентную томографию [27, 28]. Для тепловых полей также справедливо разложение Шмидта для пространственных мод [29].

Интересной модификацией являются условные тепловые состояния, к которым добавили или из которых удалили один или несколько фотонов [30–32]. Отщепление фотона реализуется посредством прохождения света через светоделитель со слабым коэффициентом отражения, а добавление — посредством прохождения пучка через кристалл, в котором в неколлинеарном режиме происходит генерация бифотонов. В обоих случаях процесс отщепления и добавления фотона случайный и сопровождается фотоотсчётом в детекторе, стоящем в сопряжённом канале. Такие манипуляции могут существенно изменить статистическое распределение фотонов и даже (в случае добавления фотона) сделать состояние света неклассическим.

Задача данной работы — изучение статистики фотонов в тесной связи с квадратурными квантовыми измерениями. Представлен общий подход к описанию статистики фотонов и их корреляций на основе так называемого компаунд-распределения Пуассона, применяемого в микроэлектронике [33]. Развитый подход используется в описании условных распределений, отвечающих отщеплению фотонов. Посредством измерения квадратурных распределений осуществлено детальное экспериментальное исследование соответствующих оптических квантовых состояний. Предложенная модель даёт гибкий инструмент для анализа экспериментальных данных оптических квантовых измерений.

Производящие функции, статистика фотонов и корреляции. В основе предлагаемого исследования лежит так называемое компаунд-распределение Пуассона (или обобщённое отрицательное биномиальное распределение) [33]. Рассмотрим его на языке про-

изводящих функций [34]. Для распределения Пуассона с параметром среднего λ производящая функция есть

$$G_0(z | \lambda) = \exp(-\lambda(1 - z)). \quad (1)$$

Здесь z — формальная переменная, смысл которой станет очевиден далее.

Пусть теперь параметр распределения Пуассона λ сам является случайной величиной, имеющей гамма-распределение с плотностью вероятности

$$P(\lambda) = \frac{b^a \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)}, \quad (2)$$

где $a > 0$; $b > 0$; $\Gamma(a)$ — гамма-функция.

Рассматриваемая смесь распределений характеризуется следующей производящей функцией:

$$G(z | a, b) = \int_0^\infty G_0(z | \lambda) P(\lambda) d\lambda = \frac{1}{(1 + (1 - z)/b)^a}. \quad (3)$$

Полученное распределение обуславливается средним $\mu = a/b$ и может быть переписано в виде

$$G(z | \mu, a) = \frac{1}{(1 + \mu(1 - z)/a)^a}. \quad (4)$$

Таким образом, компаунд-распределение Пуассона определяется двумя параметрами: μ — среднее число фотонов, a — параметр кластеризации (группировки) фотонов. Этот параметр может быть также назван параметром когерентности: чем выше a , тем ближе рассматриваемое распределение к обычному распределению Пуассона, которое отвечает когерентному состоянию. Действительно, нетрудно видеть, что при $a \rightarrow \infty$ формула (4) даёт производящую функцию для распределения Пуассона с параметром μ .

Заметим, что учёт оптических потерь приводит к тому, что соответствующее среднее число фотонов просто умножается на постоянный множитель: $\mu \rightarrow \mu t$, где t — коэффициент прохождения, $t = 1 - \gamma$ (γ — доля поглощённой энергии излучения).

Случай $a = 1$ отвечает тепловому состоянию

$$G(z | \mu) = \frac{1}{1 + \mu(1 - z)}. \quad (5)$$

Производящие функции содержат в себе полную информацию о случайной величине. В частности, вероятность того, что дискретная случайная величина примет значение k , выражается через k -ю производную производящей функции в точке $z = 0$, а так называемый m -й факториальный момент выражается через m -ю производную производящей функции в точке $z = 1$:

$$P(k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k G(z)}{\partial z^k} \right|_{z=0}, \quad (6)$$

$$M[k(k-1)\dots(k-m+1)] = \left. \frac{\partial^m G(z)}{\partial z^m} \right|_{z=1}. \quad (7)$$

Здесь M — операция математического ожидания.

Величина, стоящая в формуле (7) слева, называется m -м факториальным моментом. С помощью первого и второго факториальных моментов среднее и дисперсия случайной

величины могут быть найдены по формулам

$$M[k] = G'(1), \quad (8)$$

$$D[k] = G''(1) + G'(1) - G'^2(1). \quad (9)$$

Распределение вероятностей для компаунд-распределения Пуассона согласно (6) есть

$$P(k | \mu, a) = \frac{(a)_k}{a^k} \frac{\mu^k}{k!} \frac{1}{(1 + \mu/a)^{k+a}}, \quad (10)$$

где $P(k | \mu, a)$ — вероятность обнаружения k фотонов; $(a)_k$ — произведение из k множителей:

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1). \quad (11)$$

Предполагается также, что $(a)_0 = 1$.

Формула (10) для распределения вероятностей применяется при всех $a > 0$. В этом случае функция $(a)_k$ может быть вычислена не только по (11), но также посредством гамма-функции

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}. \quad (12)$$

Кроме того, распределение (10) является осмысленным и при отрицательных целых числах $a = -n$, $n = 1, 2, \dots$. Такие распределения могут служить для описания n -фотонных состояний при условии, что $0 < \mu \leq n$. Случай $\mu = n$ соответствует ситуации, когда было приготовлено ровно n фотонов, а случай $\mu < n$ можно интерпретировать как ситуацию, когда некоторые из n фотонов были потеряны с определённой конечной вероятностью в результате декогерентизации. Тогда распределение сводится к биномиальному распределению с вероятностью успеха (выживания фотона) $\theta = \mu/n$ и описывает вероятность того, что из n фотонов выживет ровно k фотонов. Наконец, $\mu \rightarrow 0$, $a \neq 0$ отвечает ситуации, когда есть нуль фотонов с вероятностью единица.

Производящая функция n -фотонных состояний следует из (4) при $a = -n$ и имеет вид

$$G(z | \mu, n) = \left(1 - \frac{\mu(1-z)}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Заметим, что распределение (13) не может быть рассмотрено как смесь типа (2).

Согласно (8), (9) среднее и дисперсию для компаунд-распределения Пуассона запишем в виде

$$M[k] = \mu, \quad (14)$$

$$D[k] = \mu(1 + \mu/a). \quad (15)$$

Из (15) следует, что распределение является сверхпуассоновским при $a > 0$ и субпуассоновским при $a < 0$.

Автокорреляционная функция m -го порядка для нулевой временной задержки непосредственно определяется соответствующим факториальным моментом и может быть выражена через m -ю производную производящей функции в точке $z = 1$:

$$g^{(m)} = G^{(m)}(1)/\mu^m. \quad (16)$$

Из (8) следует, что всегда $g^{(1)} = 1$.

Для компаунд-распределения Пуассона имеем

$$g^{(2)} = \frac{a+1}{a}, \quad g^{(3)} = \frac{(a+1)(a+2)}{a^2}, \quad g^{(4)} = \frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{a^3},$$

откуда следует, что $g^{(2)} = 2$ для $a = 1$ — тепловой источник; $g^{(2)} = 0$ для $a = -1$ — однофотонное состояние; $g^{(2)} = 1$ при $a \rightarrow \infty$ — когерентное состояние.

Автокорреляционная функция произвольного m -го порядка для компаунд-распределения Пуассона выражается формулой

$$g^{(m)} = \frac{(a)_m}{a^m} = \frac{a(a+1)\dots(a+m-1)}{a^m}. \quad (17)$$

Условные распределения, отвечающие вычитанию (отщеплению) фотонов.

Для отщепления фотона используется делитель пучка с малым коэффициентом отражения. Посредством постселекции выделяются только те представители ансамбля, в которых был отщеплён фотон. Таким образом, рассматриваются условные распределения числа фотонов (при том, что был отщеплён фотон). Представители статистического ансамбля, в которых не был отщеплён фотон, просто отбрасываются.

Можно показать, что такое распределение обладает следующим примечательным свойством. В результате описанной процедуры отщепления фотона тип распределения не меняется, а его параметры изменяются по простому правилу:

$$a^{(1)} = a + 1, \quad (18)$$

$$\mu^{(1)} = \mu(a + 1)/a. \quad (19)$$

Здесь $a^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$ — параметры a и μ после отщепления фотона.

При отщеплении k фотонов имеем

$$a^{(k)} = a + k, \quad (20)$$

$$\mu^{(k)} = \mu(a + k)/a. \quad (21)$$

Для теплового источника $a = 1$, поэтому

$$a^{(k)} = 1 + k; \quad \mu^{(k)} = \mu(1 + k). \quad (22)$$

В частности, $\mu^{(1)} = 2\mu$ (при отщеплении одного фотона среднее их число возрастает вдвое).

Представленные формулы отвечают делителю пучка с бесконечно малым коэффициентом отражения. Рассмотрим теперь делитель пучка с конечным коэффициентом отражения p . Вероятность того, что на вход делителя поступит k фотонов, равна $P(k | \mu, a)$, при этом только один отразится с вероятностью $kp(1-p)^{k-1}$. Итоговая вероятность получить состояние с $k-1$ фотоном равна $NP(k | \mu, a)kp(1-p)^{k-1}$, где N — нормировочный множитель. Таким образом, исходная зависимость от k в распределении $P(k | \mu, a)$ изменяется посредством множителя $k(1-p)^{k-1}$. Заметим, что при исчезающе малых $p \rightarrow 0$ следует учитывать только множитель k , поскольку в этом случае $(1-p)^{k-1} \rightarrow 1$. Представленные

соображения приводят к следующему выводу: при учёте конечного коэффициента отражения p формула (18) для $a^{(1)}$ не меняется, а формула (19) для $\mu^{(1)}$ модифицируется:

$$\mu_p^{(1)} = \frac{\mu(1-p)(a+1)}{a+\mu p}. \quad (23)$$

При малых $p \rightarrow 0$ формула (23) переходит в (19).

Формулы (18) и (23) можно использовать как рекуррентные при вычислении параметров условных распределений, возникающих при отщеплении двух и более фотонов.

Квадратурные распределения. В случае теплового состояния $a = 1$, $(a)_k = k!$, и распределение вероятностей (10) принимает вид

$$P(k|\mu) = \frac{1}{(1+\mu)} \left(\frac{\mu}{1+\mu} \right)^k. \quad (24)$$

Вероятности (24) образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \mu/(1+\mu)$ и задают веса смеси из соответствующих состояний осциллятора:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k|\mu) |\varphi_k(x)|^2. \quad (25)$$

Здесь $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — собственные функции гармонического осциллятора, определяющие базисный набор функций Чебышева — Эрмита. Явный вид рассматриваемых функций даётся формулой

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(2^k k! \sqrt{\pi})^{1/2}} H_k(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

Распределение (25) образует диагональ матрицы плотности. Сама матрица плотности есть

$$\rho(x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} P(k|\mu) \varphi_k(x) \varphi_k^*(x'). \quad (27)$$

Для вычисления суммы ряда (27) используем известную из теории специальных функций формулу разложения, относящуюся к полиномам Чебышева — Эрмита [35]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n H_n(x) H_n(x')}{2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \exp\left(\frac{2qxx' - (x^2 + x'^2)q^2}{1-q^2}\right). \quad (28)$$

В результате получим

$$\rho(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{4qxx' - (x^2 + x'^2)(1+q^2)}{2(1-q^2)}\right), \quad (29)$$

где $\sigma^2 = (1+q)/(2(1-q)) = \mu + 1/2$ — дисперсия.

Если полагать $q = \exp(-\hbar\omega/\theta)$, то можно увидеть, что (29) соответствует хорошо известному выражению для матрицы плотности осциллятора с частотой ω при температуре θ [36].

Плотностью координатного распределения является диагональ матрицы плотности

$$P(x) = \rho(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (30)$$

Рассмотрим теперь распределение числа фотонов в тепловом состоянии при условии, что был отщеплён один фотон. В этом случае вместо (24) имеем распределение числа фотонов k :

$$P(k | \mu, 1) = \frac{k+1}{(1+\mu)^2} \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^k. \quad (31)$$

В формуле (31) μ — среднее число фотонов в исходном тепловом состоянии. После удаления одного фотона их среднее число становится равным $\mu^{(1)} = 2\mu$, а соответствующий параметр кластеризации $a^{(1)} = 2$.

Получим формулу для квадратурного распределения теплового состояния с одним отщеплённым фотоном. Умножив обе части равенства (28) на q , будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1} H_n(x) H_n(x')}{2^n n!} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \exp\left(\frac{2qxx' - (x^2 + x'^2)q^2}{1-q^2}\right). \quad (32)$$

Теперь продифференцируем обе части равенства (32) по q . В результате (ограничимся здесь диагональю $x' = x$) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)q^n (H_n(x))^2}{2^n n!} = \frac{1}{(1+q)(1-q^2)^{3/2}} (1+q+2q(1-q)x^2) \exp\left(\frac{2qx^2}{1+q}\right). \quad (33)$$

С использованием (33) нетрудно записать следующее выражение для квадратурного распределения теплового состояния с одним отщеплённым фотоном (в приближении исчезающе малого коэффициента отражения делителя):

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1+\mu}{(1+2\mu)^{5/2}} \left(1+2\mu + \frac{2\mu x^2}{1+\mu}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{1+2\mu}\right). \quad (34)$$

Для делителя пучка с конечным коэффициентом отражения имеем

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1+0,5\mu_p^{(1)}}{(1+\mu_p^{(1)})^{5/2}} \left(1+\mu_p^{(1)} + \frac{\mu_p^{(1)} x^2}{1+0,5\mu_p^{(1)}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{1+\mu_p^{(1)}}\right). \quad (35)$$

Здесь параметр $\mu_p^{(1)}$ определяется формулой (23).

В общем случае произвольного компаунд-распределения Пуассона матрица плотности есть

$$\rho(x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} P(k | \mu, a) \varphi_k(x) \varphi_k^*(x'), \quad (36)$$

а соответствующее квадратурное распределение имеет вид

$$P(x | \mu, a) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k | \mu, a) |\varphi_k(x)|^2. \quad (37)$$

Распределение (37) симметрично относительно начала координат, поэтому все его нечётные моменты равны нулю.

Можно показать, что дисперсия случайной величины x распределения (37) не зависит от a и даётся следующей формулой:

$$\sigma^2 = \mu + 1/2. \quad (38)$$

Для полученного распределения с использованием описанного выше метода могут быть аналитически вычислены и моменты более высокого порядка. В частности, асимметрия β_1 тождественно равна нулю ($\beta_1 = 0$), а эксцесс β_2 распределения может быть вычислен по формуле

$$\beta_2 = -6 \left(\frac{\mu}{2\mu + 1} \right)^2 \frac{(a - 1)}{a}. \quad (39)$$

Напомним, что для случайной величины x рассматриваемые характеристики по определению есть

$$\beta_1 = \frac{M[(x - M(x))^3]}{\sigma^3}, \quad (40)$$

$$\beta_2 = \frac{M[(x - M(x))^4]}{\sigma^4} - 3. \quad (41)$$

Если измерить экспериментально дисперсию σ^2 квадратуры и её эксцесс β_2 , то на основе представленных выше формул можно оценить среднее число фотонов μ и параметр их когерентности (кластеризации) a :

$$\mu = \sigma^2 - 1/2, \quad (42)$$

$$a = \frac{6\mu^2}{6\mu^2 + \beta_2(2\mu + 1)^2}. \quad (43)$$

Формулы (42), (43) составляют основу метода моментов для оценки параметров распределения μ и a . Расчёты показывают, что оценки моментов (42), (43) близки к более совершенным оценкам по методу максимального правдоподобия [18, 19].

На рис. 1 представлено сравнение данных численного эксперимента с модельными аппроксимациями для квадратурных распределений: a — для исходного теплового состояния; b — для условного состояния, из которого отщеплён один фотон; c — для условного состояния, из которого отщеплено два фотона. Гистограммы отвечают результатам численных экспериментов, сплошные кривые — моделям, полученным методом максимального правдоподобия. Объём выборки во всех рассматриваемых случаях $n = 100000$.

Рис. 1, a иллюстрирует исходное тепловое состояние, которое содержит в среднем пять фотонов. Соответствующие оценки для среднего числа фотонов μ : максимального правдоподобия $\mu_{ml} = 4,9354609$ и моментов $\mu_{\text{moment}} = 4,9354123$ (при точном значении 5). Точный параметр группирования фотонов в случае теплового состояния $a = 1$. Соответствующие оценки для параметра распределения a : максимального правдоподобия $a_{ml} = 1,0121$ и моментов $a_{\text{moment}} = 1,0189$. Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью (уровень значимости $p_{\text{value}} = 0,941$, параметр хи-квадрат $\chi_{\text{stat}}^2 = 30,40$, число степеней свободы $df = 44$).

На рис. 1, b представлено условное распределение, отвечающее отщеплению одного фотона. Для коэффициента отражения делителя пучка $p_{BS} = 0,1$ согласно формуле (23) после отщепления одного фотона в условном распределении имеется в среднем шесть фотонов

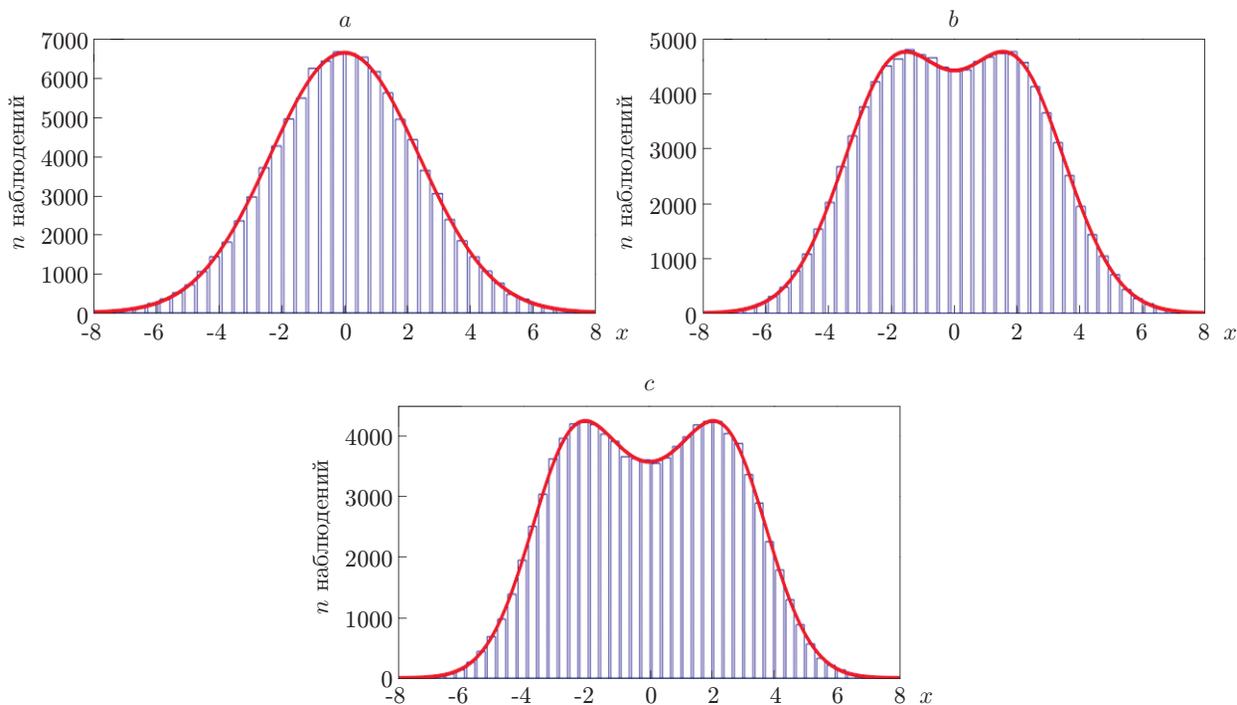


Рис. 1

(вместо 10 для исчезающе малого коэффициента отражения делителя). Соответствующие оценки для μ : максимального правдоподобия $\mu_{ml} = 5,99261$ и моментов $\mu_{\text{moment}} = 5,99196$. Точный параметр группирования фотонов в этом случае $a = 2$. Соответствующие оценки для a : максимального правдоподобия $a_{ml} = 1,999495$ и моментов $a_{\text{moment}} = 2,001548$. Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью ($p_{\text{value}} = 0,178$, $\chi_{\text{stat}}^2 = 49,176$, $df = 41$).

На рис. 1, c приведено условное распределение, отвечающее отщеплению двух фотонов. Дважды применяя формулу (23) для коэффициента отражения делителя $p_{BS} = 0,1$, получаем после отщепления второго фотона среднее число фотонов $6,23077$. Соответствующие оценки для μ : максимального правдоподобия $\mu_{ml} = 6,26289$ и моментов $\mu_{\text{moment}} = 6,26198$. Точный параметр группирования фотонов в этом случае $a = 3$. Соответствующие оценки для a : максимального правдоподобия $a_{ml} = 3,01369$ и моментов $a_{\text{moment}} = 3,00255$. Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью ($p_{\text{value}} = 0,697$, $\chi_{\text{stat}}^2 = 37,768$, $df = 43$).

Экспериментальная реализация различных квадратурных состояний. Для экспериментальной реализации и измерения различных квадратурных состояний была создана установка, схема которой изображена на рис. 2. Она представляет собой комбинацию источника квазитеплого света [20, 37] и схемы сбалансированного гомодинного детектирования [16].

Источником излучения служит гелий-неоновый лазер, работающий в непрерывном режиме на длине волны $\lambda = 633$ нм. Лазерный пучок заводится в одномодовое оптическое волокно и далее разделяется на две неравные части волоконным светоделителем FBS. Большая часть излучения (90 %) переходит в канал 1 и служит гомодином, а меньшая (10 %) остаётся в канале 2 и используется для генерации различных квадратурных состояний. Для генерации квазитеплого состояния оно пропускается через вращающийся матовый диск GGD [20, 37]. Далее исследуемое излучение снова пропускается через одномодовое волокно, проходит через поляризатор P1 и полуволновую пластинку HWP1,

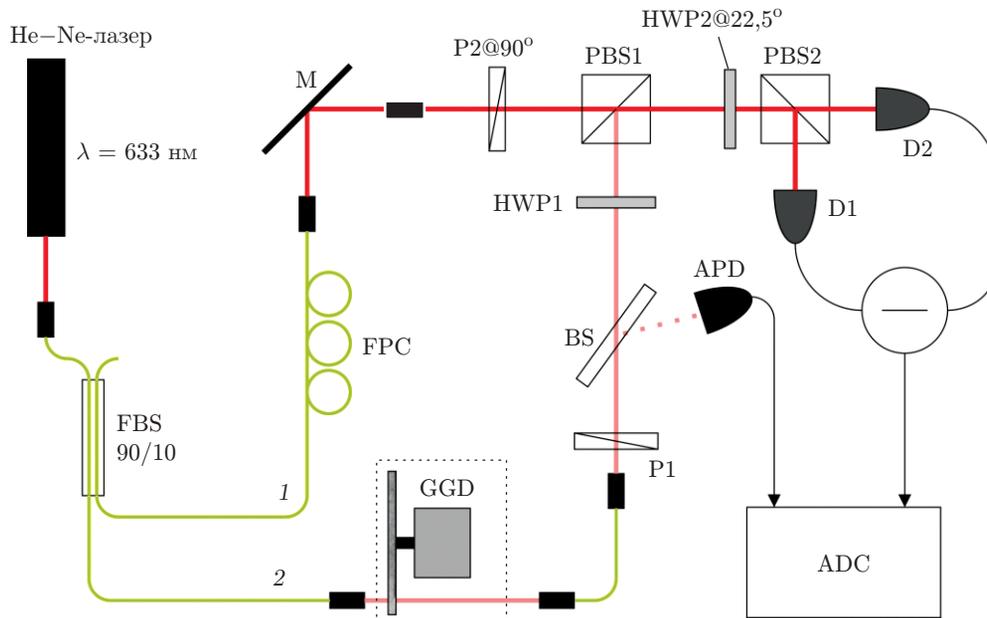


Рис. 2

ориентированные таким образом, чтобы после поляризационного светоделителя PBS1 всё излучение уходило в отражённый канал. Установленная под углом Брюстера стеклянная пластинка применяется в качестве светоделителя BS, который служит для отщепления фотонов. Поляризатор P1 настраивается так, чтобы коэффициент отражения составлял около 1 %. Для регистрации отщепившихся фотонов используется лавинный фотодиод APD, работающий в режиме счёта фотонов.

Излучение гомодина выводится из одномодового волокна, отражается зеркалом M и попадает на другой вход поляризационного светоделителя PBS1. Поляризатор P2 ориентирован таким образом, чтобы всё излучение гомодина проходило через светоделитель, а волоконный контроллер поляризации FPC обеспечивал максимальное прохождение света через поляризатор P1. Поскольку квадратурные распределения генерируемых состояний не зависят от фазы, в процессе измерений фаза гомодина не варьировалась.

После того как излучение гомодина и исследуемое излучение совмещаются в одну пространственную моду светоделителем PBS1, они снова разделяются светоделителем PBS2. Полуволновая пластинка HWP2 ориентирована таким образом, чтобы оба излучения разделялись поровну на два канала, в каждом из которых наблюдалась интерференция. Для регистрации интенсивности на выходах PBS2 расположены фотодиоды D1 и D2, сигнал с которых отправляется на разностную схему. Разностный фототок, пропорциональный значению квадратуры, вместе с сигналами лавинного фотодиода поступает на АЦП (ADC) и подвергается дальнейшей обработке.

При обработке всё время накопления разбивается на интервалы длительностью τ , которая варьируется от 10 до 50 мкс. Каждому интервалу соответствует определённое значение разностного тока, отвечающее квадратуре поля. Кроме того, с каждым интервалом связано определённое количество импульсов лавинного детектора, соответствующее числу отщеплённых фотонов. Таким образом, есть возможность за счёт постселекции выделять только те интервалы, в которых был отщеплён один или два фотона.

На рис. 3 представлено сравнение данных реального эксперимента с теоретическими аппроксимациями, полученными методом максимального правдоподобия в рамках модели компаунд-распределения Пуассона.

Рис. 3, *a* иллюстрирует исходное квазитепловое состояние, объём выборки составляет $n = 50000$. Соответствующие оценки для μ : максимального правдоподобия $\mu_{ml} = 8,1379$ и моментов $\mu_{\text{moment}} = 8,2791$. Точный параметр группирования фотонов в случае теплового состояния $a = 1$. Соответствующие оценки для a : максимального правдоподобия $a_{ml} = 0,9911$ и моментов $a_{\text{moment}} = 0,9721$. Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью ($p_{\text{value}} = 0,535$, $\chi_{\text{stat}}^2 = 42,52$, $df = 44$).

На рис. 3, *b* дано условное распределение, возникающее при отщеплении одного фотона, объём выборки составляет $n = 44945$. Соответствующие оценки для μ : максимального правдоподобия $\mu_{ml} = 16,2524$ и моментов $\mu_{\text{moment}} = 16,3861$. Точным параметром группирования фотонов в таком состоянии является $a = 2$. Соответствующие оценки для a : максимального правдоподобия $a_{ml} = 1,7128$ и моментов $a_{\text{moment}} = 1,7029$. Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью ($p_{\text{value}} = 0,125$, $\chi_{\text{stat}}^2 = 54,926$, $df = 44$).

Параметр a вырос по сравнению с исходным тепловым состоянием на $1,7128 - 0,9911 = 0,7217$. Таким образом, «отщепилось» примерно 0,72 фотона по сравнению с ожидаемым 1,0. Одной из причин такого несоответствия является «подмешивание» в рассматриваемое состояние тепловых фотонов за счёт случайных темновых совпадений.

На рис. 3, *c* приведено условное распределение, возникающее при отщеплении двух фотонов, объём выборки составляет $n = 2767$. Соответствующие оценки для μ : максимального правдоподобия $\mu_{ml} = 23,9329$ и моментов $\mu_{\text{moment}} = 24,0215$. Точный параметр группирования фотонов в данном состоянии $a = 3$. Соответствующие оценки для a : максимального правдоподобия $a_{ml} = 2,620$ и моментов $a_{\text{moment}} = 2,6079$. Критерий хи-квадрат показывает, что экспериментальные данные согласуются с моделью ($p_{\text{value}} = 0,124$, $\chi_{\text{stat}}^2 = 29,767$, $df = 22$).

Видно, что отщепилось примерно $2,6079 - 0,9911 = 1,6168$ фотона вместо ожидаемых двух фотонов и соотношение для средних значений чисел фотонов в представленных распределениях близко к теоретической пропорции 1 : 2 : 3.

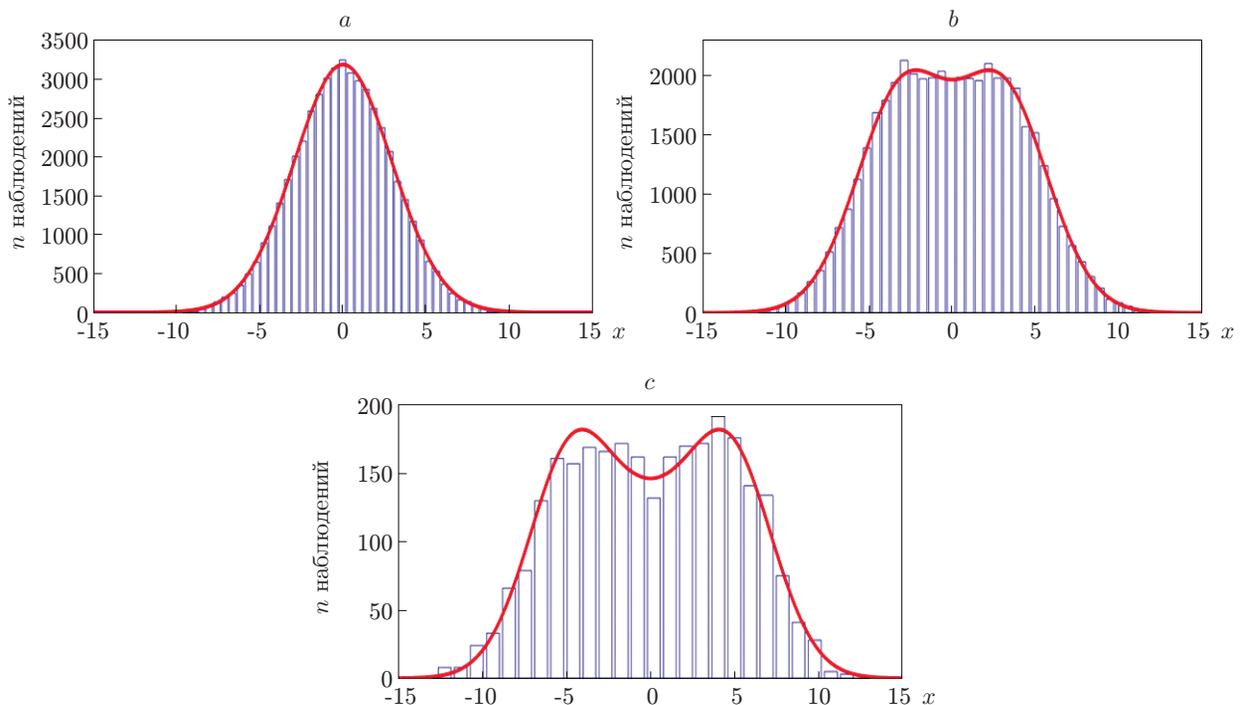


Рис. 3

Заключение. В рамках модели составного компаунд-распределения Пуассона рассмотрена статистика фотонов с учётом их группировки для различных квантовых состояний. Выполнены эксперименты по генерации и измерению тепловых квантовых состояний, а также условных квантовых состояний, возникающих при отщеплении от теплового состояния одного и двух фотонов. Показано, что предложенная модель даёт гибкий инструмент для анализа экспериментальных данных оптических квантовых измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курочкин В. Л., Рябцев И. И., Неизвестный И. Г. Квантовая криптография и генерация квантового ключа с использованием одиночных фотонов // Микроэлектроника. 2006. **35**, № 1. С. 37–43.
2. James D. F. V., Kwiat P. G., Munro W. J., White A. G. Measurement of qubits // Phys. Rev. A. 2001. **64**, N 5. 052312.
3. Řeháček J., Englert B.-G., Kaszlikowski D. Minimal qubit tomography // Phys. Rev. A. 2004. **70**, N 5. 052321.
4. Bogdanov Yu. I., Brida G., Genovese M. et al. Statistical estimation of the efficiency of quantum state tomography protocols // Phys. Rev. Lett. 2010. **105**, N 1. 010404.
5. Bogdanov Yu. I., Moreva E. V., Maslennikov G. A. et al. Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons // Phys. Rev. A. 2006. **73**, N 6. 063810.
6. Bogdanov Yu. I., Chekhova M. V., Krivitsky L. A. et al. Statistical reconstruction of qutrits // Phys. Rev. A. 2004. **70**, N 4. 042303.
7. Богданов Ю. И., Кривицкий Л. А., Кулик С. П. Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем // Письма в ЖЭТФ. 2003. **78**, вып. 6. С. 804–809.
8. Bencheikh K., Gravier F., Douady J. et al. Triple photons: a challenge in nonlinear and quantum optics // Comptes Rendus Physique. 2007. **8**, N 2. P. 206–220.
9. Borshchevskaya N. A., Katamadze K. G., Kulik S. P., Fedorov M. V. Three-photon generation by means of third-order spontaneous parametric down-conversion in bulk crystals // Laser Phys. Lett. 2015. **12**, N 11. 115404.
10. Leach J., Jack B., Romero J. et al. Quantum correlations in optical angle-orbital angular momentum variables // Science. 2010. **329**, N 5992. P. 662–665.
11. Agnew M., Leach J., McLaren M. et al. Tomography of the quantum state of photons entangled in high dimensions // Phys. Rev. A. 2011. **84**, N 6. 062101.
12. Straupe S. S., Ivanov D. P., Kalinkin A. A. et al. Angular Schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion // Phys. Rev. A. 2011. **83**, N 6. 060302.
13. Bessire B., Bernhard C., Feurer T., Stefanov A. Versatile shaper-assisted discretization of energy-time entangled photons // New Journ. Phys. 2014. **16**, N 3. 033017.
14. Olislager L., Woodhead E., Huy K. P. et al. Creating and manipulating entangled optical qubits in the frequency domain // Phys. Rev. A. 2014. **89**, N 5. 052323.
15. Braunstein S. L., van Loock P. Quantum information with continuous variables // Rev. Mod. Phys. 2005. **77**, N 2. P. 513–577.
16. Leonhardt U., Paul H. Measuring the quantum state of light // Progr. Quantum Electron. 1995. **19**, N 2. P. 89–130.
17. Lvovsky A. I., Raymer M. G. Continuous-variable optical quantum-state tomography // Rev. Mod. Phys. 2009. **81**, N 1. P. 299–332.

18. **Bogdanov Yu. I., Kulik S. P.** The efficiency of quantum tomography based on photon detection // *Laser Phys. Lett.* 2013. **10**, N 12. 125202.
19. **Богданов Ю. И., Авосопянц Г. В., Белинский Л. В. и др.** Статистическое восстановление оптических квантовых состояний на основе взаимно дополнительных квадратурных квантовых измерений // *ЖЭТФ*. 2016. **150**, вып. 2. С. 246–253.
20. **Martienssen W., Spiller E.** Coherence and fluctuations in light beams // *Amer. Journ. Phys.* 1964. **32**, N 12. P. 919–926.
21. **Arecchi F. T., Berné A., Bulamacchi P.** High-order fluctuations in a single-mode laser field // *Phys. Rev. Lett.* 1966. **16**, N 1. P. 32–35.
22. **Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A.** Ghost imaging with thermal light: Comparing entanglement and classical correlation // *Phys. Rev. Lett.* 2004. **93**, N 9. 093602.
23. **Ferri F., Magatti D., Gatti A. et al.** High-resolution ghost image and ghost diffraction experiments with thermal light // *Phys. Rev. Lett.* 2005. **94**, N 18. 183602.
24. **Valencia A., Scarcelli G., D'Angelo M., Shih Y.** Two-photon imaging with thermal light // *Phys. Rev. Lett.* 2005. **94**, N 6. 063601.
25. **Lloyd S.** Enhanced sensitivity of photodetection via quantum illumination // *Science*. 2008. **321**, N 5895. P. 1463–1465.
26. **Lopaeva E. D., Berchera I. R., Degiovanni I. P. et al.** Experimental realization of quantum illumination // *Phys. Rev. Lett.* 2013. **110**, N 15. 153603.
27. **Vabre L., Dubois A., Voccara A. C.** Thermal-light full-field optical coherence tomography // *Opt. Lett.* 2002. **27**, Is. 7. P. 530–532.
28. **Fercher A. F., Hitzengerger C. K., Sticker M. et al.** A thermal light source technique for optical coherence tomography // *Opt. Commun.* 2000. **185**, Is. 1–3. P. 57–64.
29. **Bobrov I. B., Straupe S. S., Kovlakov E. V., Kulik S. P.** Schmidt-like coherent mode decomposition and spatial intensity correlations of thermal light // *New Journ. Phys.* 2013. **15**, N 7. 073016.
30. **Zavatta A., Parigi V., Bellini M.** Experimental nonclassicality of single-photon-added thermal light states // *Phys. Rev. A*. 2007. **75**, N 5. 052106.
31. **Parigi V., Zavatta A., Kim M., Bellini M.** Probing quantum commutation rules by addition and subtraction of single photons to/from a light field // *Science*. 2007. **317**, N 5846. P. 1890–1893.
32. **Zavatta A., Parigi V., Kim M., Bellini M.** Subtracting photons from arbitrary light fields: experimental test of coherent state invariance by single-photon annihilation // *New Journ. Phys.* 2008. **10**, N 12. 123006.
33. **Богданов Ю. И., Богданова Н. А., Дшхунян В. Л.** Статистические модели управления дефектностью и выходом годных в микроэлектронике // *Микроэлектроника*. 2003. **32**, № 1. С. 77–88.
34. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т. 1. 528 с.; Т. 2. 738 с.
35. **Виленкин Н. Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991. 576 с.
36. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1995. 608 с.
37. **Arecchi F. T.** Measurement of the statistical distribution of gaussian and laser sources // *Phys. Rev. Lett.* 1965. **15**, N 24. P. 912–916.