ПМТФ, № 3, 1964

ОБ ОХЛАЖДЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЕМ ГАЗА, ОБТЕКАЮЩЕГО ПЛОСКУЮ ПЛАСТИНКУ

А. Ф. Курбацкий, А. Т. Онуфриев

(Новосибирск)

В ряде задач аэродинамики необходимо рассматривать перенос энергии излучением и теплопроводностью через поглощающую среду. Выяснению взаимного влияния обоих видов переноса энергии посвящен ряд работ. Так в работах [1-3] рассматривался случай стационарного одномерного переноса энергии между двумя пластинами. При течении в ламинарном пограничном слое задача рассматривалась в работах [4-8], для турбулентного течения — в работе [9]. Для описания переноса энергии излучением использовались различные приближения: одномерное, диффузионное, нелинейной теплопроводности. В данной работе на простой задаче о тепловом пограничном слое выясняется влияние излучения на величину потока энергии в зависимости от параметра, характеризующего относительную величину плотностей потоков энергии, обусловленных излучением и теплопроводностью, и сравниваются различные приближения.

Обозначения

q^1 — безразмерная величина плотности потока энергии, определяемая излучением;
q° — то же, но определяемая молекулярной теплопроводностью;
$q_*{}^1$ — то же, но определяемая излучением в приближении «нелинейной теплопроводности»;
q — то же для суммарного потока энергии;
φ — безразмерная величина плотности энергии излучения;
Φ° — равновесная плотность энергии излучения;
c — скорость света;
σ — постоянная Стефана — Больцмана;
T — безразмерная температура;
l — длина пробега излучения;
u — составляющая скорости потока вдоль оси x;
ρ — плотность газа;
P — число Прандтля;
c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении;
x' — координата вдоль пластинки;
y' — поперечная координата;
ε — величина параметра, характеризующего относительную роль молекулярной теплопроводности и излучения;
k — коэффициент молекулярной теплопроводности;
μ — коэффициент вязкости;
$I_n(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента ($n = 0,1$);

$$q^1 = \frac{(q^1)'}{\sigma T_\infty{}^4}, \qquad q^\circ = \frac{(q^\circ)'}{\sigma T_\infty{}^4}, \qquad q = q^\circ + q^1, \qquad \varphi = \frac{\Phi}{4\sigma T_\infty{}^4}, \qquad A = \frac{\sigma T_\infty{}^4}{\rho u_\infty c_p T_\infty}$$

$$\Phi^\circ = \frac{4\sigma T^4}{c}; \quad \varepsilon = \frac{3kT_\infty}{4l\sigma T_\infty{}^4}, \quad T = \frac{T'}{T_\infty}; \quad P = \frac{\mu c_p}{k}; \quad x = \frac{4x'A}{3l}, \quad y = \frac{y'}{l}$$

1. Задача состоит в нахождении распределения плотности потока энергии по длине полубесконечной абсолютно черной пластины при стационарном обтекании ее излучающим горячим газом. Пластинка расположена вдоль оси x. Газ течет параллельно пластинке. Принята гипотеза локального термодинамического равновесия. Газ серый. Процесс переноса энергии излучением будет описываться в диффузионном приближении [10]

$$^4/_3\, l \operatorname{div} (\mathbf{q}^1)' = c\Phi^\circ - c\Phi, \qquad (\mathbf{q}^1)' = -\,^1/_3\, l \operatorname{grad} (c\Phi)$$

Рассмотрим течение в пограничном слое несжимаемой жидкости при небольших изменениях температуры для малых чисел Прандтля P. В этом случае можно получить решение в конечном виде. При $P \ll 1$ остается рассмотреть задачу о тепловом пограничном слое, в котором диссипацией энергии из-за вязкости пренебрегаем [6, 11]. Перенос энергии излучением будет в основном происходить в направлении к пластине при значении параметра $A \ll 1$.

При сделанных предположениях задача сводится к решению системы

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \frac{4}{9}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varphi - (4T - 3) \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$T = T_1, \qquad {}^2/_3 \partial\varphi / \partial y = \varphi - (4T_1 - 3) \quad \text{при } y = 0$$

$$T = 1, \qquad \varphi = 1 \quad \text{при } y = \infty \tag{1.2}$$

и с начальным условием

$$x = 0, \qquad y > 0 \quad \text{при } T = 1$$

Система уравнений (1.1) может быть сведена к уравнению для величины плотности энергии излучения

$$\varepsilon \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{9}{4}(4 + \varepsilon)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{9}{4}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

с граничными условиями

$$\frac{2}{3}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{4}{9}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \varphi - (4T_1 - 3) \quad \text{при } y = 0, \qquad \varphi = 1 \quad \text{при } y = \infty \tag{1.4}$$

и с начальным условием

$$\varphi = \varphi(0, y) \quad \text{при } x = 0 \tag{1.5}$$

Величина $\varphi(0, y)$ удовлетворяет второму уравнению при $T = 1$ (1.1).

Величины плотностей потоков энергии определяются

$$q^1 = -\frac{4}{3}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad q^\circ = -\frac{4}{3}\varepsilon\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\varepsilon}{3}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{4}{9}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}\right]$$

Значение параметра $\varepsilon = \infty$ соответствует случаю отсутствия излучения, а $\varepsilon = 0$ — отсутствию теплопроводности. Последний случай был рассмотрен в [12]. Плотность потока энергии на стенке при $\varepsilon = 0$ будет

$$q^1(0, x) = -4(1 - T_1)\, e^{-{}^9/_2 x}[I_0({}^9/_2 x) + I_1({}^9/_2 x)] \tag{1.6}$$

2. Уравнение (1.3) при соответствующих граничных и начальном условиях решается при помощи преобразования Лапласа. Для изображения плотности потока энергии получаем

$$q^+(0, s) = -4(1 - T_1)\left[\frac{(4 + \varepsilon + {}^4/_3\sqrt{\varepsilon s} + {}^4/_9 s)^{1/2}}{3\sqrt{s}} - \frac{2}{9}\right] \tag{2.1}$$

$$q^{\circ +}(0, s) = -\frac{4(1 - T_1)\sqrt{\varepsilon}}{3\sqrt{s}} \tag{2.2}$$

Выражение (2.1) на плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси имеет только одну особую точку $s = 0$, и комплексный интеграл в выражении для оригинала сводится к интегралу по действительной переменной

$$q(0, x) = -\frac{4(1 - T_1)}{3\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{\sqrt{z}}\left[4 + \varepsilon - \frac{4z}{9} + \left[\left(4 + \varepsilon - \frac{4z}{9}\right)^2 + \frac{16\varepsilon z}{9}\right]^{1/2}\right]^{1/2} dz \tag{2.3}$$

$$q^\circ(0, x) = -\frac{4(1 - T_1)}{3\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{x}} \tag{2.4}$$

Из (2.4) видно, что в рассматриваемой линейной задаче плотность потока энергии, определяемая молекулярной теплопроводностью, не испытывает влияния излучения.

Величину q^1 находим как разность $q - q^\circ = q^1$.

3. При $\varepsilon = 0$ выражение для плотности потока энергии будет

$$q(0, x) = -\frac{8(1-T_1)}{9\pi}\int_0^9 \frac{e^{-xz}}{\sqrt{z}}[9-z]^{1/2}dz \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) может быть преобразовано к виду (1.6). Поправка в q^1 при малых значениях ε будет величиной порядка $\varepsilon^{1/2}$, что можно увидеть из разложения (2.3) в ряд. При $\varepsilon \to \infty$ получаем

$$q(0, x) \to -\frac{4(1-T_1)}{3\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{x}}$$

что соответствует молекулярному переносу энергии. Первый член в q^1 соответствует вычислению величины

$$q_*^1(0, x) = -\int_0^\infty \frac{3}{2}[4T_1(y, x) - 3]\,e^{-3/2y}\,dy + (4T_1 - 3)$$

по профилю температуры, который получен из решения задачи при учете одной только теплопроводности; при больших x

$$q_*^1(0, x) \approx -\frac{8(1-T_1)}{3\sqrt{\pi\varepsilon x}} \tag{3.2}$$

При больших значениях величины x можно получить асимптотическое выражение для плотности полного потока энергии

$$q(0, x) \approx -\frac{4(1-T_1)\sqrt{4+\varepsilon}}{3\sqrt{\pi x}}\left[1 - \frac{4}{9(4+\varepsilon)^2 x}\right] \tag{3.3}$$

и для плотности потока энергии, определяемого излучением

$$q^1(0, x) \approx -\frac{4(1-T_1)}{3\sqrt{\pi x}}[\sqrt{4+\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon}] \tag{3.4}$$

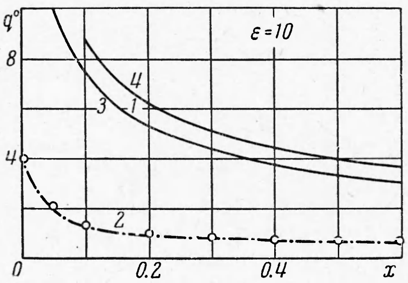
Из (3.4) и (3.2) видно, что последним можно пользоваться при больших ε, т. е. когда теплопроводность играет преобладающую роль.

4. Приближение «нелинейной теплопроводности» соответствует значению эффективного коэффициента теплопроводности $k_* = k + {}^{16}/_3 l\sigma T_\infty^3$. Плотность потока энергии равна

$$q(0, x) = -\frac{4(1-T_1)\sqrt{4+\varepsilon}}{3\sqrt{\pi x}} \tag{4.1}$$

Эта величина при больших x совпадает с решением в диффузионном приближении (3.3). Но если интересоваться радиационной составляющей в потоке энергии, то совпадения нет [7,13]; в этом приближении получаем которое надо сравнить с (3.4). При $l \to 0$

$$q_{**}^1 = -\frac{16(1-T_1)}{3\sqrt{\pi x(4+\varepsilon)}} \tag{4.2}$$

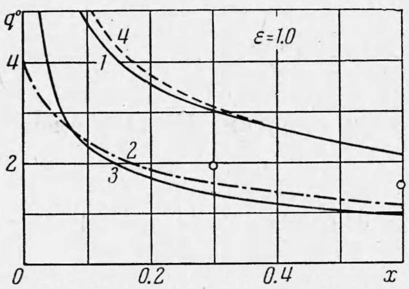


Фиг. 1

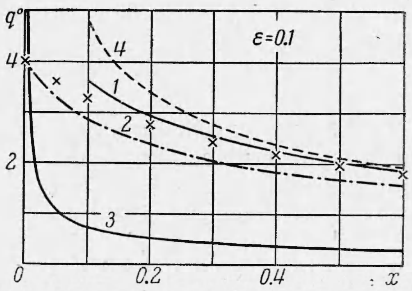
получаем, что x велико, а $\varepsilon \to \infty$, и $q_{**}^1 / q^1 \to 2$. При l малом, но $k \to 0$, $\varepsilon \to 0$, а x велико, и $q_{**}^1 / q^1 \to 1$.

Но в молекулярной составляющей плотности потока энергии здесь получается большое различие. При $l \to \infty$, но k конечном, $\varepsilon \to 0$ и $x \to 0$. Вместо (3.4) надо взять (1.6), что дает $q^1(0, x) \to 1$ и $q_{**}^1 / q^1 \to \infty$.

5. Результаты вычисления величины плотности потоков энергии приведены в виде зависимостей от x величины $q / (1 - T_1)$ на фиг. 1 для $\varepsilon = 10$, фиг. 2 для $\varepsilon = 1$ и фиг. 3 для $\varepsilon = 0.1$. На каждой фигуре кривая *1* соответствует плотности полного потока энергии, кривая *2* — плотности потока энергии, определяемого излучением, кривая *3* — плотности потока энергии, определяемого теплопроводностью, кривая *4* — плотности полного потока энергии, вычисленного в приближении «нелинейной теплопроводности»; кривая, отмеченная крестиками, соответствует величине, определенной по (1.6); кривая, отмеченная кружками, соответствует величине q_*^1.



Фиг. 2



Фиг. 3

Сравнение кривых показывает, что при малых значениях параметра ε различие между результатами в диффузионном приближении и приближении нелинейной теплопроводности может быть значительным. Из сравнения кривых на фиг. 3 видно, что величина плотности полного потока энергии, определенная по (1.6), когда полностью пренебрегалось действием теплопроводности, близка к решению в диффузионном приближении. При учете теплопроводности происходит лишь некоторое перераспределение в потоках энергии.

Проведенное рассмотрение линейной задачи позволяет увидеть области справедливости различных, используемых при описании переноса энергии излучением, приближений, что сохраняет качественный смысл и в более общем случае.

Авторы благодарят В. П. Замураева и В. Н. Ветлуцкого за полезные обсуждения.

Поступила 13 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов Л. П. Влияние излучения и поглощения среды на процесс теплопередачи. Вестник МГУ, сер. физ.- мат. наук, 1954, № 2.
2. Немчинов И. В., Фонарев А. С. Течение Куэтта с учетом переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, 3.
3. Висканта Р., Грош Р. Д. Перенос тепла теплопроводностью и излучением в поглощающей среде. Теплопередача, русск. пер. Journal of Heat Transter, February Transaction of the ASME 1962, Т. 84, сер. С, № 1.
4. Румынский А. Н. Пограничный слой в излучающих и поглощающих средах. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, ОТН, 1960, № 2.
5. Андреев Г. Н. К учету радиационного потока в ламинарном пограничном слое. Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 6.
6. Ромишевский Е. А. Пограничные слои и стабилизированный газовый разряд при диффузионном характере излучения. Инж. ж., 1962, т. 2, вып. 1.
7. Viscksnta R., Grosh R. J. Boundary layer in thermal Radiation absorbing and emitting media. Intern. J. Heat and Mass Transter, 1962, v. 5, No 9.
8. Кох, Де-Сильва. Взаимодействие между излучением и конвекцией в пограничном слое плоской пластины при гиперзвуковых скоростях. Ракетная техника, русск. пер. ARS Journal, 1962, т. 32, № 5, стр. 103—105.
9. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И., Рубцов Н. А. К оценке роли излучения при расчете теплообмена в турбулентном пограничном слое. ПМТФ, 1963, № 4.
10. Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика. Гостехтеоретиздат, 1952.
11. Коган М. Н. О течениях с большой теплопроводностью. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 3.
12. Онуфриев А. Т. Об охлаждении излучением полубесконечного объема газа ПМТФ, 1961, № 2.
13. Замураев В. П. Ламинарный пограничный слой в излучающе-поглощающем газе около плоской пластинки. ПМТФ, 1964, № 3.