

УДК 539.3

О ВОЗМОЖНОСТИ ЛОКАЛЬНОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ СЖАТИИ

В. Г. Трофимов

Воронежский институт МВД Российской Федерации, 394065 Воронеж
E-mail: vshmc@vor.mvd.ru

В статической постановке в рамках плоской деформации исследуется возможность локального выпучивания свободной поверхности нижней полуплоскости при сжатии. Показано, что при малых докритических деформациях в некоторых средах возможно локальное выпучивание поверхности полуплоскости. Установлено, что одной критической нагрузке сжатия соответствуют две формы локального выпучивания поверхности.

Ключевые слова: локальная неустойчивость, упругое полупространство, преобразование Фурье.

Впервые неустойчивость в целом свободной поверхности полуплоскости для несжимаемой среды исследовал М. Био [1]. Неустойчивость в целом свободной поверхности при сжатии нижней полуплоскости рассматривалась в работе [2]. Исследование локального осесимметричного выпучивания поверхности упругого полупространства при сжатии проведено в [3].

Настоящая работа посвящена изучению локального выпучивания свободной поверхности нижней полуплоскости при сжатии в статической постановке. Выпучивание поверхности исследуется в рамках плоской деформации при малых однородных докритических деформациях.

Упругое полупространство сжимается вдоль оси Ox_1 усилиями интенсивности p . Ось Ox_2 перпендикулярна свободной поверхности.

Линеаризованные уравнения устойчивости относительно возмущений перемещений $W_1(x_1, x_2)$, $W_2(x_1, x_2)$ для ортотропного тела имеют вид [2]

$$\begin{aligned} a_{11}W_{1,11} + G_{12}W_{1,22} + (a_{12} + G_{12})W_{2,12} &= 0, \\ (a_{12} + G_{12})W_{1,21} + (G_{12} - p)W_{2,11} + a_{22}W_{2,22} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где a_{11} , $a_{12} = a_{21}$, a_{22} , G_{12} — коэффициенты упругости; дифференцирование обозначено индексами после запятой.

К системе уравнений (1) необходимо добавить граничные условия на свободной поверхности ($x_2 = 0$)

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{21}(x_1, 0) = 0 \quad (2)$$

и соотношения упругости

$$\sigma_{11} = a_{11}W_{1,1} + a_{12}W_{2,2}, \quad \sigma_{22} = a_{21}W_{1,1} + a_{22}W_{2,2}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = G_{12}(W_{1,2} + W_{2,1}).$$

Локальное выпучивание свободной поверхности характеризуется тем, что возмущения перемещений W_1 , W_2 должны затухать при удалении от эпицентра возмущений по поверхности (при $x_1 \rightarrow \pm\infty$) и в глубину от поверхности (при $x_2 \rightarrow -\infty$).

Применим к возмущениям перемещений преобразование Фурье по координате x_1 :

$$U_j(\xi, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_j(x_1, x_2) \exp(i\xi x_1) dx_1 \quad (j = 1, 2).$$

Система уравнений (1) в результате преобразования Фурье принимает вид

$$\begin{aligned} -\xi^2 a_{11} U_1 + G_{12} U_{1,22} - i\xi(a_{12} + G_{12}) U_{2,2} &= 0, \\ -i\xi(a_{12} + G_{12}) U_{1,2} - \xi^2(G_{12} - p) U_2 + a_{22} U_{2,22} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Возмущения напряжений σ_{22} , σ_{21} в граничных условиях (2) выразим через возмущения перемещений W_1 , W_2 и, применив к граничным условиям преобразование Фурье, получим

$$a_{22} U_{2,2} - i\xi a_{21} U_1 = 0, \quad U_{1,2} - i\xi U_2 = 0. \quad (4)$$

Систему уравнений (3) сведем к одному уравнению относительно функции $U_1(\xi, x_2)$

$$U_{1,2222} - 2\xi^2 a U_{1,22} + \xi^4 b U_1 = 0, \quad (5)$$

где $a = (a_{11} a_{22} - (a_{12} + G_{12})^2 + G_{12}(G_{12} - p)) / (2a_{22} G_{12})$; $b = a_{11}(G_{12} - p) / (a_{22} G_{12})$.

Возмущения перемещений W_1 , W_2 должны затухать при удалении от свободной поверхности $x_2=0$, тем же свойством должны обладать и изображения возмущений перемещений U_1 , U_2 . Поэтому решение уравнения (5), затухающее при $x_2 \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$U_1(\xi, x_2) = \begin{cases} C_1 \exp(\xi(k_1 x_2 + \gamma)) + C_2 \exp(\xi(k_2 x_2 + \gamma)), & \xi \geq 0, \\ C_1 \exp(-\xi(k_1 x_2 + \gamma)) + C_2 \exp(-\xi(k_2 x_2 + \gamma)), & \xi < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где C_1 , C_2 — произвольные постоянные; γ — постоянная ($\gamma < 0$); $k_{1,2} = \sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b}}$.

Из системы (3) определим $U_2(\xi, x_2)$, затухающее при $x_2 \rightarrow -\infty$:

$$U_2(\xi, x_2) = i \begin{cases} C_1 d_1 \exp(\xi(k_1 x_2 + \gamma)) + C_2 d_2 \exp(\xi(k_2 x_2 + \gamma)), & \xi \geq 0, \\ -C_1 d_1 \exp(-\xi(k_1 x_2 + \gamma)) - C_2 d_2 \exp(-\xi(k_2 x_2 + \gamma)), & \xi < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $d_1 = k_1(a_1 - a_2 k_1^2)$; $d_2 = k_2(a_1 - a_2 k_2^2)$; $a_1 = (a_{11} a_{22} - (a_{12} + G_{12})^2) / a_3$; $a_2 = a_{22} G_{12} / a_3$; $a_3 = (a_{12} + G_{12})(G_{12} - p)$.

Изображениям возмущений перемещений (6), (7) соответствуют оригиналы возмущений перемещений

$$\begin{aligned} W_1(x_1, x_2) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{C_1(k_1 x_2 + \gamma)}{x_1^2 + (k_1 x_2 + \gamma)^2} + \frac{C_2(k_2 x_2 + \gamma)}{x_1^2 + (k_2 x_2 + \gamma)^2} \right), \\ W_2(x_1, x_2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{C_1 d_1 x_1}{x_1^2 + (k_1 x_2 + \gamma)^2} + \frac{C_2 d_2 x_1}{x_1^2 + (k_2 x_2 + \gamma)^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 1 представлено поперечное перемещение $W_2(x_1, 0)$ свободной поверхности.

Подставляя решения (6), (7) в граничные условия (4), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_2 (при $\xi \geq 0$ и $\xi < 0$ системы совпадают).

Из условия существования нетривиальных решений системы получаем характеристическое уравнение для определения критической нагрузки сжатия p_*

$$(k_1 + d_1)(a_{22} d_2 k_2 - a_{21}) - (k_2 + d_2)(a_{22} d_1 k_1 - a_{21}) = 0. \quad (9)$$

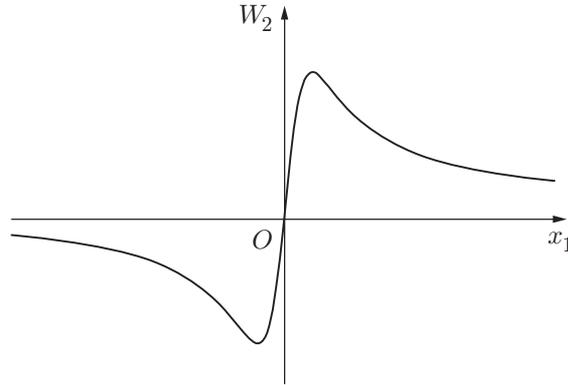


Рис. 1

Из уравнения (9) получаем критические нагрузки сжатия

$$p_1 = \left(\sqrt{1 + \frac{4a_{11}a_{22}G_{12}^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2}} - 1 \right) \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2}{2a_{11}a_{22}G_{12}},$$

$$p_2 = (2(a_{12} + G_{12})\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{11}a_{22} - 2a_{12}G_{12} - a_{12}^2)/G_{12}. \quad (10)$$

Меньший из этих положительных корней дает критическое значение p_* .

Если систему уравнений (3) свести к одному уравнению относительно функции $U_2(\xi, x_2)$

$$U_{2,2222} - 2\xi^2 a U_{2,22} + \xi^4 b U_2 = 0,$$

то получим другую форму выпучивания поверхности. По аналогии с (6), (7) имеем

$$U_1(\xi, x_2) = i \begin{cases} C_1 g_1 \exp(\xi(k_1 x_2 + \gamma)) + C_2 g_2 \exp(\xi(k_2 x_2 + \gamma)), & \xi \geq 0, \\ -C_1 g_1 \exp(-\xi(k_1 x_2 + \gamma)) - C_2 g_2 \exp(-\xi(k_2 x_2 + \gamma)), & \xi < 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$U_2(\xi, x_2) = \begin{cases} C_1 \exp(\xi(k_1 x_2 + \gamma)) + C_2 \exp(\xi(k_2 x_2 + \gamma)), & \xi \geq 0, \\ C_1 \exp(-\xi(k_1 x_2 + \gamma)) + C_2 \exp(-\xi(k_2 x_2 + \gamma)), & \xi < 0, \end{cases}$$

где $g_1 = k_1(b_1 - b_2 k_1^2)$; $g_2 = k_2(b_1 - b_2 k_2^2)$; $b_1 = (G_{12}(G_{12} - p) - (a_{12} + G_{12})^2)/b_3$; $b_2 = a_{22}G_{12}/b_3$; $b_3 = a_{11}(a_{12} + G_{12})$.

Изображениям возмущений перемещений (11) соответствуют оригиналы возмущений перемещений

$$W_1(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{C_1 g_1 x_1}{x_1^2 + (k_1 x_2 + \gamma)^2} + \frac{C_2 g_2 x_1}{x_1^2 + (k_2 x_2 + \gamma)^2} \right),$$

$$W_2(x_1, x_2) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{C_1 (k_1 x_2 + \gamma)}{x_1^2 + (k_1 x_2 + \gamma)^2} + \frac{C_2 (k_2 x_2 + \gamma)}{x_1^2 + (k_2 x_2 + \gamma)^2} \right). \quad (12)$$

Для этой формы выпучивания поверхности (рис. 2) характеристическое уравнение имеет вид

$$(k_2 g_2 - 1)(a_{22} k_1 + a_{21} g_1) - (k_1 g_1 - 1)(a_{22} k_2 + a_{21} g_2) = 0. \quad (13)$$

Корни уравнения (13) совпадают с корнями (10). Следовательно, одной критической нагрузке сжатия соответствуют две формы локального выпучивания поверхности (8), (12). Заметим, что критическая нагрузка сжатия p_* зависит только от свойств среды. Оценка

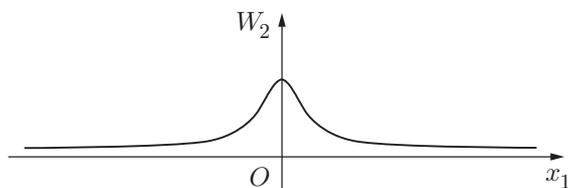


Рис. 2

критической нагрузки p_* показывает, что локальное выпучивание поверхности возможно не во всех средах. Так, в упругой изотропной среде p_* соответствует нагрузке, превосходящей предел прочности на сжатие для реальных материалов. Следовательно, в изотропном теле не может возникать локальное выпучивание поверхности при малых докритических деформациях.

В работе [2] показано, что в ортотропной среде с малой сдвиговой жесткостью G_{12} возможна поверхностная неустойчивость в целом поверхности, так как в этом случае критическая нагрузка p_* меньше предела прочности на сжатие. Критическая нагрузка сжатия p_* , полученная в [2] при исследовании поверхностной неустойчивости в целом свободной поверхности, совпадает с критической нагрузкой (10) в случае локального выпучивания поверхности.

Таким образом, в некоторых средах возможно локальное выпучивание поверхности полуплоскости при сжатии при малых докритических деформациях, причем одной и той же критической нагрузке соответствуют две формы локального выпучивания поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biot M. A.** Fundamental skin effect in anisotropic solids mechanics // Intern. J. Solids and Struct. 1966. V. 2, N 4. P. 645–663.
2. **Гузь А. Н.** Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1971.
3. **Иванищева О. И., Трофимов В. Г.** Осесимметричное выпучивание упругого полупространства при сжатии // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 152–154.

Поступила в редакцию 10/VI 2004 г.