ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 3

УДК 539.219.1

АНИЗОТРОПНЫЙ ДИСК, НАГРУЖЕННЫЙ СЛОЕМ СИЛ, В НЕОГРАНИЧЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Г. Н. Миренкова, Э. Г. Соснина

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

Рассматривается анизотропный эллипсоидальный диск в неограниченной изотропной упругой среде, находящейся под действием однородного поля напряжений $\sigma_0^{\alpha\beta}$. Кроме того, по поверхности диск нагружен слоем объемных сил $q^\alpha = p^{\alpha\beta}n_\beta$ ($p^{\alpha\beta}$ — постоянный симметричный тензор, n_β — компоненты единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ к поверхности диска). Под диском понимается эллипсоид, одна ось которого много меньше двух других.

В [1] показано, что напряжения $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ на поверхности анизотропного эллипсоидального включения имеют вид

$$\begin{gathered} \sigma(\mathbf{n}) = B(\mathbf{n})\varepsilon^+, \quad \varepsilon^+ = B^{-1}(\sigma_0 + c_0 A p), \\ B(\mathbf{n}) = c_0 + c_0 K(\mathbf{n})(c - c_0), \end{gathered} \tag{1}$$

где ε^+ — деформации внутри включения; c_0, c — тензоры упругих постоянных внешней среды и включения соответственно; $K(\mathbf{n})$ — фурье-образ второй производной тензора Грина внешней однородной среды; B^{-1} — тензор, обратный B; $A = \langle K(\mathbf{n})\rangle$ и $B = \langle B(\mathbf{n})\rangle$ — средние значения тензоров $K(\mathbf{n})$ и $B(\mathbf{n})$ по эллипсоиду.

Сначала решается задача о распределении деформаций внутри диска. Запишем формулу для ε^+:

$$\varepsilon^+ = B^{-1}\sigma_0 + B^{-1}c_0 A p = B^{-1}\sigma_0 + R p = \varepsilon_1^+ + \varepsilon_2^+. \tag{2}$$

Здесь ε_1^+ — деформации, вызванные действием внешнего поля σ_0; ε_2^+ — деформации от нагрузки, распределенной по поверхности. Из (2) видно, что вычисление деформаций внутри диска сводится к вычислению тензоров B^{-1} и R.

Пусть полуоси эллипсоида a_1, a_2, a_3 удовлетворяют соотношению $a_3 \ll a_2 \le a_1$. Случай $a_2 \ll a_1$ соответствует вытянутому диску, $a_2 \approx a_1$ — диску, близкому к круговому, $a_1 = a_2$ — круговому. Введем малый (но конечный) параметр $\xi = a_3/a_2$. Тогда для постоянного тензора A справедливо разложение

$$A = A_0 + O(\xi), \qquad A_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{K(\varphi)\,d\varphi}{\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi}, \qquad \alpha = a_2/a_1. \tag{3}$$

Можно показать, что для произвольной анизотропной среды $K(\varphi)$ — постоянный тензор, причем

$$K(\varphi) = K(\mathbf{n})\Big|_{n_3=1,\ n_1=n_2=0}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\alpha^2\sin^2\varphi}=1,$$

находим

$$A_0 = K(\mathbf{n})\Big|_{n_3=1,\ n_1=n_2=0}.$$

Следовательно, A_0 — постоянный тензор, не зависящий от геометрии включения.

В случае внешней изотропной среды из явных формул для $K(\mathbf{n})$ [2] следует, что при $n_3 = 1$ только компоненты $K_{\alpha 3\alpha 3}(n)$ $(\alpha = 1,2,3)$ не равны нулю. Для компонент тензора A_0 находим

$$A^0_{3333} = \frac{1-2\nu_0}{2\mu_0(1-\nu_0)},\quad A^0_{1313} = A^0_{2323} = \frac{1}{4\mu_0}, \tag{4}$$

где μ_0 и ν_0 — модуль сдвига и коэффициент Пуассона внешней изотропной среды.

Используя разложение (3) для A, получим соответствующее разложение по малому параметру ξ постоянного тензора B:

$$B = B_0 + O(\xi).$$

Главный член разложения B_0 — постоянный четырехвалентный тензор, несимметричный по перестановке пар индексов:

$$B_0 = c_0\, A_0\,(c - c_0).$$

Отсюда и из свойств тензора A_0 следует, что для произвольной анизотропной среды тензор B_0 имеет одно и то же значение как для вытянутого диска, так и для кругового диска и близкого к круговому.

Можно показать, что B_0 — невырожденный тензор. Поэтому при вычислении тензоров B^{-1} и R ограничимся главными членами разложения по малому параметру ξ.

Пусть диск ортотропный и оси упругой симметрии параллельны осям эллипсоида. Тогда тензор $c^{\alpha\beta\lambda\mu}$ имеет девять отличных от нуля компонент, которые обозначим как

$$c^{\alpha\alpha\beta\beta} = c_{\alpha\beta}\quad (\alpha,\ \beta = 1,2,3),$$

$$c^{2323} = c_{44},\quad c^{1313} = c_{55},\quad c^{1212} = c_{66}.$$

Для компонент тензора B_0^{-1} находим

$$B^{-1}_{1111} = B^{-1}_{2222} = \frac{1}{E_0},\ B^{-1}_{1122} = B^{-1}_{2211} = B^{-1}_{1133} = B^{-1}_{2233} = -\frac{\nu_0}{E_0},$$

$$B^{-1}_{3333} = \frac{1}{c_{33}}\left[1+\frac{\nu_0(c_{13}+c_{23})}{E_0}\right],\ B^{-1}_{1313} = \frac{1}{4c_{55}},\ B^{-1}_{2323} = \frac{1}{4c_{44}}, \tag{5}$$

$$B^{-1}_{3311} = \frac{\nu_0 c_{23}-c_{13}}{c_{33}E_0},\quad B^{-1}_{3322} = \frac{\nu_0 c_{13}-c_{23}}{c_{33}E_0},\quad B^{-1}_{1212} = \frac{1}{4\mu_0}$$

(E_0 — модуль Юнга внешней изотропной среды).

Компоненты деформаций ε_1^+ получаются сверткой тензоров B^{-1} и σ_0. Определим деформации ε_2^+. Главный член разложения тензора R из (2)

$$R_0 = B_0^{-1}\, c_0\, A_0.$$

Из (4) следует, что компоненты $R^0_{\alpha\beta 11} = R^0_{\alpha\beta 22} = R^0_{\alpha\beta 12} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Это означает, что приложенные к поверхности усилия p^{11}, p^{22}, p^{12}, параллельные плоскости кромки диска ($n_3 = 0$), не дают вклада в главные члены разложения ε_2^+. Остальные компоненты тензора R_0:

$$R^0_{1133} = R^0_{2233} = 0, \quad R^0_{3333} = \frac{1}{c_{33}}, \quad R^0_{1313} = \frac{1}{4\,c_{55}}, \quad R^0_{2323} = \frac{1}{4\,c_{44}}.$$

Отсюда вытекает, что деформации ε_2^+ имеют вид

$$(\varepsilon_2^+)_{33} = \frac{p^{33}}{c_{33}}, \quad (\varepsilon_2^+)_{13} = \frac{p^{13}}{2\,c_{55}},$$
$$(\varepsilon_2^+)_{23} = \frac{p^{23}}{2\,c_{44}}, \quad (\varepsilon_2^+)_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{6}$$

Таким образом, вклад в главные члены для ε_2^+ дают только усилия p^{33}, p^{13}, p^{23}, нормальные плоскости кромки диска.

Из (2), (5), (6) определяем суммарные деформации ε^+:

$$\varepsilon^+_{\alpha\beta} = \varepsilon^0_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad \varepsilon^+_{13} = \frac{\sigma_0^{13} + p^{13}}{2\,c_{55}}, \quad \varepsilon^+_{23} = \frac{\sigma_0^{23} + p^{23}}{2\,c_{44}},$$
$$\varepsilon^+_{33} = \frac{1}{c_{33}}[\sigma_0^{33} + p^{33} - c_{13}\varepsilon^0_{11} - c_{23}\varepsilon^0_{22}].$$

Здесь $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$ — внешние деформации, связанные с напряжениями $\sigma_0^{\lambda\mu}$ законом Гука $\sigma_0^{\lambda\mu} = c_0^{\lambda\mu\alpha\beta}\varepsilon^0_{\alpha\beta}$.

Из формул для ε^+ видно, что деформации внутри ортотропного диска зависят только от тех упругих постоянных, которые характеризуют упругие свойства диска в направлении, ортогональном плоскости кромки.

Напряжения $\sigma_+^{\alpha\beta}$ внутри ортотропного диска запишем в виде

$$\sigma_+^{11} = \frac{1}{c_{33}}[\Delta_{22}\,\varepsilon^0_{11} - \Delta_{12}\,\varepsilon^0_{22} + c_{13}(\sigma_0^{33} + p^{33})],$$
$$\sigma_+^{22} = \frac{1}{c_{33}}[\Delta_{11}\,\varepsilon^0_{22} - \Delta_{12}\,\varepsilon^0_{11} + c_{23}(\sigma_0^{33} + p^{33})],$$
$$\sigma_+^{12} = \frac{c_{66}}{\mu_0}\sigma_0^{12}, \quad \sigma_+^{\alpha 3} = \sigma_0^{\alpha 3} + p^{\alpha 3} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

где $\Delta_{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение элемента $c_{\alpha\beta}$ в матрице упругих постоянных $\|c_{\alpha\beta}\|$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$.

Можно показать, что напряжения σ_+ внутри ортотропного диска зависят от семи упругих постоянных и не зависят от модулей сдвига c_{44}, c_{55} в плоскостях, ортогональных плоскости кромки диска.

Для частного случая изотропного диска с модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν имеем

$$\sigma_+^{11} = \frac{1}{1-\nu}\,[2\,\mu\,(\varepsilon^0_{11} + \nu\,\varepsilon^0_{22}) + \nu\,(\sigma_0^{33} + p^{33})],$$
$$\sigma_+^{22} = \frac{1}{1-\nu}\,[2\,\mu\,(\varepsilon^0_{22} + \nu\,\varepsilon^0_{11}) + \nu\,(\sigma_0^{33} + p^{33})],$$
$$\sigma_+^{12} = \frac{\mu}{\mu_0}\sigma_0^{12}, \quad \sigma_+^{\alpha 3} = \sigma_0^{\alpha 3} + p^{\alpha 3} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Прежде чем вычислять напряжения $\sigma(\mathbf{n})$ из (1)на внешней стороне поверхности диска, найдем значения $\sigma^{\alpha\beta}$ в его вершинах $A(a_1,0,0)$, $B(0,a_2,0)$, $C(0,0,a_3)$. Для ортотропного диска в вершине A

$$\sigma^{\alpha 1}(A)=\sigma_+^{\alpha 1}\quad(\alpha=1,2,3),\quad \sigma^{23}(A)=\frac{\mu_0}{c_{44}}(\sigma_0^{23}+p^{23}),$$

$$\sigma^{22}(A)=\frac{1}{1-\nu_0}\,[\,2\,\mu_0\,(\varepsilon_{22}^0+\nu_0\,\varepsilon_{33}^+)+\nu_0\,\sigma_+^{11}],$$

$$\sigma^{33}(A)=\frac{1}{1-\nu_0}\,[\,2\,\mu_0\,(\varepsilon_{33}^+ +\nu_0\,\varepsilon_{22}^0)+\nu_0\,\sigma_+^{11}\,].$$

Выражения для $\sigma^{\alpha\beta}(B)$ получаются заменой индексов $1\leftrightarrow 2$, $4\to 5$ в обеих частях приведенных формул. В вершине C

$$\sigma^{\alpha 3}(C)=\sigma_0^{\alpha 3}+p^{\alpha 3}\quad(\alpha=1,2,3),\quad \sigma^{12}(C)=\sigma_+^{12},$$

$$\sigma^{11}(C)=\frac{1}{1-\nu_0}\,[\,2\,\mu_0\,(\varepsilon_{11}^0+\nu_0\varepsilon_{22}^0)+\nu_0\,(\sigma_0^{33}+p^{33})]=\sigma_0^{11}+\frac{\nu_0}{1-\nu_0}\,p^{33},$$

$$\sigma^{22}(C)=\frac{1}{1-\nu_0}[\,2\,\mu_0\,(\varepsilon_{22}^0+\nu_0\,\varepsilon_{11}^0)+\nu_0\,(\sigma_0^{33}+p^{33})]=\sigma_0^{22}+\frac{\nu_0}{1-\nu_0}p^{33}.$$

Для изотропного диска структура формул для напряжений в вершинах диска такая же, как для ортотропного.

Исследование напряжений на поверхности диска удобнее проводить в локальной системе координат $e_{\alpha'}$, связанной с нормалью к поверхности так, что ось $e_{3'}$ направлена по нормали $\mathbf{n}$, а оси $e_{1'}$ и $e_{2'}$ расположены в касательной к поверхности плоскости; причем в «вертикальных» сечениях $n_1=0$ и $n_2=0$ локальное напряжение $\sigma^{1'1'}(\mathbf{n})$ направлено перпендикулярно плоскости сечения, а $\sigma^{2'2'}(\mathbf{n})$ — вдоль контура сечения, в сечении $n_3=0$ наоборот. Обозначим локальные напряжения $\sigma^{\alpha'\beta'}\equiv\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ (в отличие от $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ в жесткой системе координат). В силу громоздкости общих выражений для $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ приведем их только по главным сечениям диска. В сечении $n_1=0$ $\;(n_2^2+n_3^2=1)$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}(\mathbf{n})=n_3^2\,\sigma^{11}(C)+n_2^2\sigma^{11}(B)+2\,\nu_0\,n_2\,n_3\,(\sigma_+^{23}-2\,\mu_0\,\varepsilon_{23}^+),\\
&\sigma_{22}(\mathbf{n})=n_3^2\sigma^{22}(C)+n_2^2\,\sigma^{33}(B)+2\,n_2\,n_3\,(\nu_0\,\sigma_+^{23}-2\,\mu_0\,\varepsilon_{23}^+),\\
&\sigma_{33}(\mathbf{n})=n_2^2\sigma_+^{22}+n_3^2\,(\sigma_0^{33}+p^{33})+2\,n_2\,n_3\,(\sigma_0^{23}+p^{23}),\\
&\sigma_{12}(\mathbf{n})=n_3\,\sigma_0^{12}-2\,n_2\,\mu_0\,\varepsilon_{13}^+,\\
&\sigma_{13}(\mathbf{n})=n_3\,(\sigma_0^{13}+p^{13})+n_2\,\sigma_+^{12},\\
&\sigma_{23}(\mathbf{n})=n_2\,n_3\,[\sigma_+^{22}-(\sigma_0^{33}+p^{33})]+(n_3^2-n_2^2)(\sigma_0^{23}+p^{23}).
\end{aligned}\tag{7}$$

Выражения для $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ в сечении $n_2=0$ получаются заменой $1\leftrightarrow 2$, $4\to 5$, $B\to A$ в правых частях приведенных формул, а в сечении $n_3=0$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}(\mathbf{n})=n_1^2\,\sigma^{22}(A)+n_2^2\sigma^{11}(B)+2\,n_1\,n_2\,(\nu_0\,\sigma_+^{12}-2\,\mu_0\,\varepsilon_{12}^+),\\
&\sigma_{22}(\mathbf{n})=n_1^2\,\sigma^{33}(A)+n_2^2\,\sigma^{33}(B)+2\,\nu_0\,n_1\,n_2\,(\sigma_+^{12}-2\,\mu_0\,\varepsilon_{12}^+),\\
&\sigma_{33}(\mathbf{n})=n_1^2\,\sigma_+^{11}+n_2^2\,\sigma_+^{22}+2\,n_1 n_2\,\sigma_+^{12},\\
&\sigma_{12}(\mathbf{n})=2\,\mu_0\,(n_1\,\varepsilon_{23}^+-n_2\,\varepsilon_{13}^+),
\end{aligned}\tag{8}$$

$$\sigma_{13}(\mathbf{n}) = n_1 n_2 (\sigma_+^{11} - \sigma_+^{22}) + (n_2^2 - n_1^2) \sigma_+^{12},$$

$$\sigma_{23}(\mathbf{n}) = n_1 (\sigma_0^{13} + p^{13}) + n_2 (\sigma_0^{23} + p^{23}).$$

Из полученных формул видно, что напряжения на поверхности диска, вычисленные с точностью до главного члена разложения по малому геометрическому параметру, зависят от всех компонент внешнего поля σ_0 и только от усилий $p^{\alpha 3}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), приложенных к поверхности и нормальных к плоскости кромки диска. Качественная картина поведения напряжений при действии только внешнего поля σ_0 и суммарного поля $(\sigma_0 + p)$ одинакова: при действии растягивающих усилий $\sigma_0^{\alpha\alpha} + p^{\alpha\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) максимум напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}(\mathbf{n})$ достигается в вершинах диска, при действии сдвиговых усилий $\sigma_0^{\alpha\beta} + p^{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) — в окрестности вершин.

В сдвиговых компонентах напряжений $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ ($\alpha \neq \beta$) возможно смещение максимума от вершин также при действии только растягивающих усилий.

Отметим, что в случае внешней изотропной среды структура формул (7), (8) для напряжений на поверхности диска не зависит от анизотропии включения: выражения для напряжений на ортотропном и изотропном дисках одинаковы с соответствующими ε^+ и σ^+. Существенные изменения в формулы для напряжений вносит анизотропия внешней среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Миренкова Г. Н., Соснина Э. Г.** Неоднородное включение в анизотропной упругой среде // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 113–118.
2. **Кунин И. А., Соснина Э. Г.** Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 524–531.

Поступила в редакцию 17/VI 1994 г.