УДК 533.951

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШАМЕЛЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ДВУХ ТИПОВ, И ИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Д. Дагхан, О. Донмец*

Университет Омера Халисдемира, Нигде, Турция
* Ближневосточный американский университет, Эгайла, Кувейт
E-mails: durmusdaghan@ohu.edu.tr, orhan.donmez@aum.edu.kw

С использованием численных методов исследуются свойства аналитических решений уравнения Шамеля, описывающих распространение ионно-звуковых солитонов в плазме двух типов. Впервые получены аналитические решения уравнения Шамеля, описывающие распространение солитонов с отрицательной фазовой скоростью. Полученные новые решения использованы для исследования плазмы двух типов. Изучено влияние неэкстенсивности солитона и захваченных электронов на ионно-звуковые волны в сверхнагретой плазме. Установлено, что амплитуда и ширина солитона зависят от параметра неэкстенсивности, параметра каппа-распределения сверхнагретых электронов и параметра захвата электронов.

Ключевые слова: уравнение Шамеля, прямое интегрирование, солитоны, ионно-звуковая плазма.

DOI: 10.15372/PMTF20180301

Введение. Одной из фундаментальных проблем физики плазмы и гидродинамики является изучение особенностей нелинейного характера распространения ионно-звуковой уединенной волны. Для того чтобы изучить влияние захваченных электронов на ионно-звуковые волны, необходимо знать различные аналитические решения уравнения Шамеля — Кортевега — де Фриза и уравнения Шамеля [1, 2]. Уравнение Шамеля — Кортевега — де Фриза можно записать в общем виде

$$U_t + aU^{1/2}U_x + bUU_x + pU_{xxx} = 0, \tag{1}$$

где a, b, p — произвольные константы, зависящие от параметров плазмы. Также в данной работе рассматривается уравнение (1) в случае $b = 0$ (уравнение Шамеля):

$$U_t + aU^{1/2}U_x + pU_{xxx} = 0, \tag{2}$$

которое не вполне интегрируемо. Эта особенность уравнения Шамеля показана в работе [2] на основе анализа Пенлеве. Полагая в уравнении (1) $a = 0$, получаем уравнение Кортевега — де Фриза

$$U_t + bUU_x + pU_{xxx} = 0. \tag{3}$$

При исследовании влияния параметров плазмы на динамику волн необходимо изучить распространение уединенной ионно-звуковой волны в пылевой плазме. Существуют различные модели плазмы. Влияние максвелловских захваченных электронов на распространение ионно-звуковых волн в нетепловой плазме (космической и лабораторной) изучено в работе [3]. При выводе уравнения Шамеля — Кортевега — де Фриза рассматривалось влияние захваченных частиц на волны в ненамагниченной бесстолкновительной электрон-ионной плазме и использовалась редуктивная теория возмущений.

Распределение максвелловских захваченных электронов можно моделировать каппа-распределением. Такое распределение оказывает влияние на распределение сверхнагретых электронов плазмы. Захваченные электроны осциллируют в ограниченной области плазмы. Осцилляции космической и лабораторной плазмы изучены в работе [4]. Влияние этих осцилляций на уединенные волны можно изучить, анализируя решения уравнений типа уравнений Шамеля — Кортевега — де Фриза. В работе [5] с использованием уравнения Кортевега — де Фриза изучено асимптотическое поведение диспергирующих волн в случае ионно-звукового солитона, а также уединенные волны и их электростатическая структура в плазме с каппа-распределением.

Другим важным параметром плазмы является фоновая неэкстенсивность, которая может оказывать существенное влияние на перенос энергии внутри плазмы. Влияние этого параметра и захваченных электронов на волны в космической плазме изучено в работе [6]. Установлено, что вследствие неэкстенсивности энергия солитона уменьшается, но может возрасти при увеличении в плазме количества захваченных электронов. В [6] изучено также влияние неэкстенсивности на ионно-звуковой двойной слой в двухкомпонентной плазме. Показано, что амплитуда и свойства солитона существенно зависят от параметра неэкстенсивности. Электростатическая структура солитона определяется наличием как неэкстенсивных электронов, так и неэкстенсивных позитронов. В работе [6] с целью изучения влияния неэкстенсивности на ионно-звуковые уединенные волны с использованием редуктивного метода возмущений выведено уравнение типа уравнения Кортевега — де Фриза.

С использованием различных методов построены различные точные решения уравнений (1)–(3) [1].

1. Точные решения уравнений Шамеля. Ниже строятся точные решения уравнения Шамеля путем его прямого интегрирования.

1.1. *Построение точных решений уравнений Шамеля — Кортевега — де Фриза с положительной фазовой скоростью.* С помощью преобразования $\eta = x - V_p t$, $U = U(\eta)$ уравнение (1) можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$pU''' - V_p U' + aU^{1/2}U' + bUU' = 0, \tag{4}$$

где $U' = dU/d\eta$. Уравнение (4) можно проинтегрировать:

$$pU'' - V_p U + \frac{2a}{3}\,U^{3/2} + \frac{b}{2}\,U^2 + c_1 = 0$$

(c_1 — произвольная постоянная). Умножая левую часть уравнения (1) на U' и интегрируя его, получаем

$$(U')^2 = -\frac{b}{3p}\,U^3 - \frac{8a}{15p}\,U^{5/2} + \frac{V_p}{p}\,U^2 - \frac{2c_1}{p}\,U - \frac{2c_2}{p}, \tag{5}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные интегрирования. Полагая $\Psi = U^{1/2}$, уравнение (5) можно записать в виде

$$(\Psi')^2 = -\frac{b}{12p}\,\Psi^4 - \frac{2a}{15p}\,\Psi^3 + \frac{V_p}{4p}\,\Psi^2 - \frac{c_1}{2p} - \frac{c_2}{2p}\,\Psi^{-2}.$$

Следовательно,

$$\Psi' = \pm\Big(-\frac{b}{12p}\,\Psi^4 - \frac{2a}{15p}\,\Psi^3 + \frac{V_p}{4p}\,\Psi^2 - \frac{c_1}{2p} - \frac{c_2}{2p}\,\Psi^{-2}\Big)^{1/2}. \tag{6}$$

Уравнение (6) можно записать в виде

$$\pm\int\Big(-\frac{b}{12p}\,\Psi^4 - \frac{2a}{15p}\,\Psi^3 + \frac{V_p}{4p}\,\Psi^2 - \frac{c_1}{2p} - \frac{c_2}{2p}\,\Psi^{-2}\Big)^{-1/2}\,d\Psi = \int d\eta. \tag{7}$$

Интегрируя левую и правую части равенства (7) и полагая $c_1 = c_2 = 0$, получаем

$$\pm\int |\Psi|^{-1}\Big(-\frac{b}{12p}\,\Psi^2 - \frac{2a}{15p}\,\Psi + \frac{V_p}{4p}\Big)^{-1/2}\,d\Psi = \eta + \eta_0.$$

В случае $\Psi > 0$ (в случае $\Psi < 0$ расчеты выполняются аналогично), используя преобразование $\Psi = 1/S$ и затем преобразование $U = \Psi^2$, точное решение уравнения Шамеля — Кортевега — де Фриза можно записать в виде

$$U(\eta) = \Big(\frac{2A}{A\,\mathrm{e}^{\mp\sqrt{V_p/(4p)}\,(\eta+\eta_0)} + B\,\mathrm{e}^{\pm\sqrt{V_p/(4p)}\,(\eta+\eta_0)} + C}\Big)^2, \tag{8}$$

где $A = 225V_p^2$; $B = 16a^2 + 75bV_p$; $C = 120aV_p$.

1.2. *Построение точных решений уравнения Шамеля с отрицательной фазовой скоростью.* Новые решения уравнения Шамеля можно получить из уравнения (7), полагая $b = 0$, $V_p < 0$, $c_2 = 0$:

$$\pm\int\Big(-\frac{2a}{15p}\,\Psi^3 + \frac{V_p}{4p}\,\Psi^2 - \frac{c_1}{2p}\Big)^{-1/2}\,d\Psi = \int d\eta. \tag{9}$$

Вводя обозначения $\lambda = V_p/(4p)$ и $S = 2a\Psi/(15p\lambda)$, уравнение (9) можно записать в следующем виде:

$$\pm\frac{15p\lambda}{2a}\int\Big(-\frac{c_1}{2p} - \frac{225p^2(-\lambda)^3}{4a^2}\,(S^2 - S^3)\Big)^{-1/2}\,dS = \int d\eta. \tag{10}$$

Полагая в уравнении (10) $c_1 = -2p/(225p^2(-\lambda)^3/(4a^2))(S_0^2 - S_0^3)$, получаем новое решение

$$\pm(-\lambda)^{-1/2}\int(S^3 - S^2 + S_0^2 - S_0^3)^{-1/2}\,dS = \int d\eta. \tag{11}$$

Интеграл в выражении (11) пропорционален неполному эллиптическому интегралу первого рода, который можно выразить через элементарные функции, зависящие от S_0. При $S_0 = 0$ и $S_0 = 1$ постоянная интегрирования равна $c_1 = 0$. В этих случаях получаем решения, найденные в подп. 1.1.

Полагая $S_0 = -1/3$ в уравнении (11), получаем новое решение, в котором $c_1 = 25V_p^3/(96a^2)$:

$$-\frac{2}{\sqrt{-\lambda}}\,\mathrm{th}^{-1}\sqrt{S + \frac{1}{3}} = \eta + \eta_0$$

(η_0 — постоянная интегрирования). Выполняя замену $S = 2a\Psi/(15p\lambda)$, разрешая уравнение относительно Ψ и полагая $U = \Psi^2$, находим решение уравнения Шамеля при $\sqrt{U(\eta)} > 0$:

$$U(\eta) = \Big[\frac{5p\lambda}{2a}\Big(3\,\mathrm{th}^2\Big(\pm\sqrt{\frac{-\lambda}{4}}\,(\eta + \eta_0)\Big) - 1\Big)\Big]^2. \tag{12}$$

Аналитические решения уравнения Шамеля с отрицательными и положительными фазовыми скоростями можно получить, используя методы, основанные на (G'/G)-разложениях [7–9].

2. Численное исследование физических свойств солитонов в плазме двух типов. Ниже исследуются физические свойства ионно-звуковых солитонов в плазме двух типов, влияние неэкстенсивности и захвата электронов на ионно-звуковые солитоны [6] и влияние захвата электронов на ионно-звуковые волны с положительными и отрицательными фазовыми скоростями в сверхнагретой плазме [3]. Оба типа плазмы изучаются на основе полученного аналитического решения уравнения Шамеля — Кортевега — де Фриза при $b = 0$ (уравнение (8)) и решения уравнения Шамеля при $c_1 = 25V_p^3/(96a^2)$, $c_2 = 0$, $V_p < 0$, $\sqrt{U(\eta)} > 0$ (уравнение (12)).

2.1. *Влияние неэкстенсивности и захвата электронов на ионно-звуковые солитоны в плазме.* Ионно-звуковой солитон впервые экспериментально обнаружен в плазменном генераторе, в котором температура электронов существенно превышает температуру ионов, вследствие чего возникает ионная волна с большой амплитудой, называемая солитоном. Сгенерированные солитоны распространялись по плазме, сталкивались друг с другом и продолжали движение, при этом их начальная амплитуда сохранялась.

Существование солитонов подтверждается аналитическими решениями уравнения Шамеля, полученными различными методами. Свойства различных солитонов, обнаруженных в экспериментах, описываются различными аналитическими решениями. Исследование свойств солитонов на основе аналитических решений должно устранить количественное различие теоретических и экспериментальных данных.

В уравнение Шамеля входят параметры a, p, которые можно выразить через параметры плазмы:

$$a = V_0^3 \,\frac{(1-q)^{1/2}(1-\beta)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(1/(1-q))}{\Gamma((1+q)/(2-2q))}, \qquad p = \frac{V_0^3}{2}.$$

Здесь $V_0 = 2/(q+1)$; $\Gamma(1/(1-q))$, $\Gamma((1+q)/(2-2q))$ — известные Γ-функции. Эти функции были вычислены при различных значениях параметра неэкстенсивности q. Параметр β определяет число захваченных электронов и может быть отрицательным и положительным. При $\beta < 0$ процесс захвата электронов неэффективен.

Рассмотрим результаты численных расчетов, полученные на основе аналитического решения при $V_p > 0$. Существование стационарного солитона следует из аналитического решения, полученного путем прямого интегрирования уравнения Шамеля. На рис. 1 приведено решение типа солитона для электростатического потенциала $U(\eta)$ при различных значениях фазовой скорости. Видно, что амплитуда солитона уменьшается при уменьшении фазовой скорости, фиксированном значении параметра неэкстенсивности q и фиксированном числе захваченных электронов, но ширина солитона при этом увеличивается. Ширина и амплитуда солитона прямо пропорциональны потенциалу Сагдеева, являющемуся псевдопотенциалом для ионно-звуковой волны. Из результатов, приведенных на рис. 2, следует, что изменение амплитуды солитона существенно зависит от параметра неэкстенсивности q и числа захваченных электронов β. С увеличением параметра q амплитуда солитона увеличивается. Качественная зависимость амплитуды солитона от параметра β такая же, но с увеличением параметра β амплитуда солитона увеличивается более значительно. Амплитуда солитона увеличивается с увеличением параметра неэкстенсивности и числа захваченных электронов, причем это увеличение существенно зависит от параметра нелинейности a в уравнении Шамеля. Результаты исследования распространения солитона конечной амплитуды в аргоновой плазме с каолиновыми частицами в виде пыли

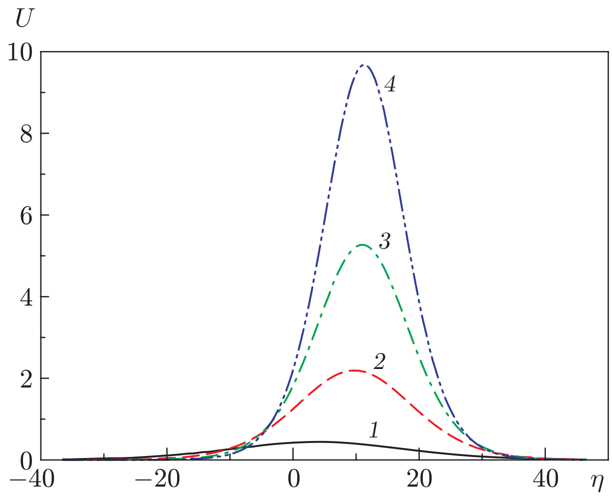

Рис. 1. Аналитические решения (8) при $b = 0$, $q = 0{,}5$, $\beta = 0{,}1$, $\eta_0 = 0$ и различных положительных значениях фазовой скорости:
1 — $V_p = 1{,}00$, *2* — $V_p = 2{,}22$, *3* — $V_p = 3{,}45$, *4* — $V_p = 4{,}67$

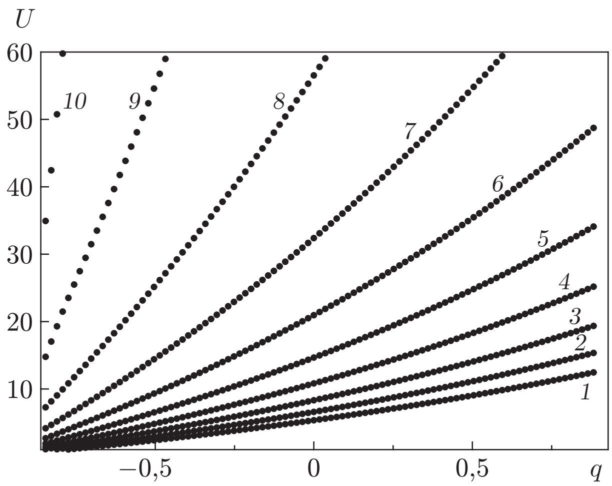

Рис. 2. Зависимость амплитуды солитона $U(\eta)$ от параметра q при $V_p = 4{,}67$, $\eta_0 = 0$ и различных значениях параметра β:
1 — $\beta = 0{,}10$, *2* — $\beta = 0{,}19$, *3* — $\beta = 0{,}29$, *4* — $\beta = 0{,}37$, *5* — $\beta = 0{,}45$, *6* — $\beta = 0{,}54$, *7* — $\beta = 0{,}63$, *8* — $\beta = 0{,}72$, *9* — $\beta = 0{,}81$, *10* — $\beta = 0{,}90$

представлены в работе [10]. Обнаруженное в эксперименте поведение солитона соответствует поведению, предсказанному на основе анализа аналитического решения.

Из аналитического решения следует, что свойства ионно-звукового солитона зависят от параметра неэкстенсивности и числа захваченных электронов. Амплитуда солитона практически постоянна при малых значениях параметров q, β и экспоненциально возрастает при увеличении значения β.

Исследуем аналитическое решение уравнения Шамеля (12) при $V_p < 0$ и различных значениях констант интегрирования. На основе этого решения изучаются свойства солитонов в плазме с захваченными электронами. Фазовая скорость обеспечивает непрерывное возбуждение резонансной нелинейной ионно-звуковой волны, распространяющейся в среде. В ненамагниченной плазме динамика солитона зависит от того, превышает ли фазовая скорость тепловую скорость нагретых ионов.

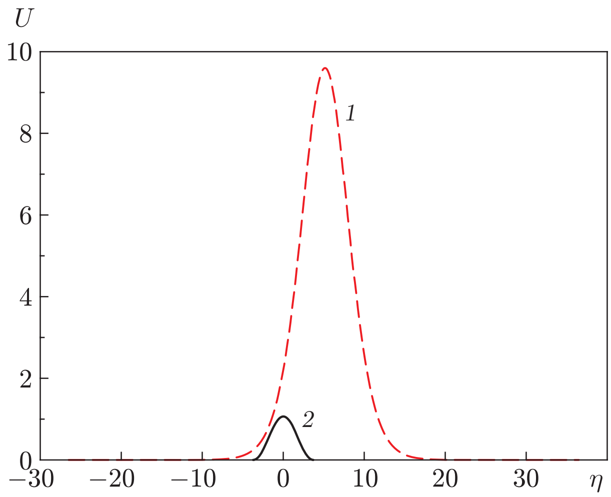

Рис. 3. Зависимости амплитуды уединенных волн с положительной и отрицательной фазовыми скоростями от параметра η при $t = 0$, $a = 1{,}210\,296$, $p = 4$, $\eta_0 = 0$:
1 — решение (8) при $V_p = -2$, *2* — решение (12) при $V_p = 2$, $\sqrt{U(\eta)} > 0$

Следовательно, направление фазовой скорости может влиять на структуру солитона. На рис. 3 показано влияние направления фазовой скорости на свойства солитона. Решения получены для плазмы со свойствами, приведенными в [6]. Оба аналитических решения (см. рис. 3) описывают солитоны одного типа с различными амплитудой и шириной, зависящими от параметра η. Однако аналитическое решение уравнения Шамеля (12) описывает солитон с отрицательной фазовой скоростью (см. рис. 3). Таким образом, направление фазовой скорости влияет на динамику ионно-звукового солитона в плазме.

Следует отметить, что физические свойства солитона при отрицательных значениях фазовой скорости существенно зависят от параметров плазмы. Увеличение фазовой скорости вызывает увеличение амплитуды и уменьшение ширины солитона. При уменьшении скорости солитон смещается влево. При движении структура солитона не меняется.

2.2. *Влияние захваченных электронов на ионно-звуковые волны в сверхнагретой плазме.* Вследствие малой плотности сверхнагретой плазмы непосредственное наблюдение ее практически невозможно. Тем не менее можно наблюдать ее ионизацию и взаимодействие с другим веществом [11]. При интенсивном взаимодействии преобладают процессы абсорбции, вследствие чего увеличивается количество энергии, переносимой быстрыми электронами. Таким образом, двухкомпонентная плазма быстро приобретает большую плотность и в ней увеличивается количество электронов, обладающих высокой энергией [12]. Такая плазма называется сверхнагретой. Сверхнагретая плазма может существовать при малых значениях параметра распределения электронов $\varkappa$. В экспериментах можно наблюдать волны с различной динамикой.

Ниже изучается влияние захваченных сверхнагретых электронов на распространение солитонов в плазме, свойства которой описаны в работе [3]. С этой целью исследуются аналитические решения, полученные в п. **1**.

Коэффициенты a, p, содержащиеся в уравнении Шамеля (2), выражаются через параметры плазмы следующим образом:

$$a = \frac{1-\beta}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varkappa - 1/2}}\,\frac{\Gamma(\varkappa+1)}{\Gamma(\varkappa+1/2)}, \qquad p = \frac{1}{2(1+1/(\varkappa-3/2))^{3/2}}.$$

Здесь Γ — известные гамма-функции, вычисленные для различных значений параметра $\varkappa$.

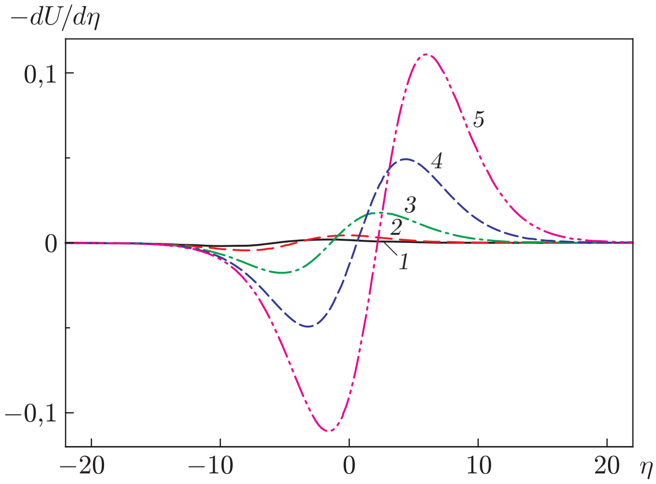

Рис. 4. Распределение электрического поля в солитоне по координате η при $V_p = 0{,}06$, $\varkappa = 3$, $\eta_0 = 0$ и различных значениях параметра β: *1* — $\beta = -0{,}5$, *2* — $\beta = 0$, *3* — $\beta = 0{,}5$, *4* — $\beta = 0{,}7$, *5* — $\beta = 0{,}8$

Проведем численное исследование точного решения уравнения Шамеля в случае $V_p > 0$. Распределение скоростей сверхнагретых частиц исследовалось как в лабораторной, так и в космической плазме. Это распределение моделируется каппа-распределением. От величины параметра распределения $\varkappa$ зависит существование солитонов с различной амплитудой. Наибольшие солитоны генерируются при малых значениях параметра $\varkappa$.

В решении, описывающем уединенную волну, вдали от локализованной уединенной волны электрическое поле должно отсутствовать. Для того чтобы изучить свойства электрического поля, был вычислен отрицательный градиент решения $-dU/d\eta$. На рис. 4 показана зависимость этого градиента от параметра η при различных значениях параметров плазмы. С уменьшением параметра β значение градиента $-dU/d\eta$ уменьшается вследствие уменьшения числа захваченных электронов в плазме, а ширина области его существования остается неизменной. Число захваченных электронов увеличивается с увеличением параметра β. При стремлении параметра $\varkappa$ к бесконечности степень нагрева плазмы уменьшается. При этом значение градиента $-dU/d\eta$ растет, а область его существования увеличивается.

Проведем анализ новых аналитических решений со значениями констант интегрирования, соответствующими решениям с отрицательными фазовыми скоростями $V_p < 0$. На рис. 5 показаны амплитуды солитонов с отрицательной фазовой скоростью для случая $\sqrt{U(\eta)} > 0$.

Солитоны с отрицательной фазовой скоростью могут иметь различные компоненты поляризации, порождающие самоподдерживающиеся уединенные волны. Амплитуда солитона и его ширина существенно зависят от фазовой скорости. При $\varkappa = 3$, $\beta = 0{,}8$ амплитуда солитона уменьшается с уменьшением фазовой скорости, максимуму амплитуды солитона соответствует одна и та же координата η. Аналогично ведет себя амплитуда солитона с положительной фазовой скоростью.

Установлено, что при малых значениях параметра $\varkappa$ амплитуда солитона незначительно увеличивается. При значениях параметра $\varkappa$, превышающих критическое значение $\varkappa \approx 5$, амплитуда экспоненциально уменьшается с увеличением $\varkappa$.

При отрицательных значениях параметра β и увеличении параметра $\varkappa$ амплитуда солитона становится достаточно малой. Из результатов, полученных в данной работе, сле-

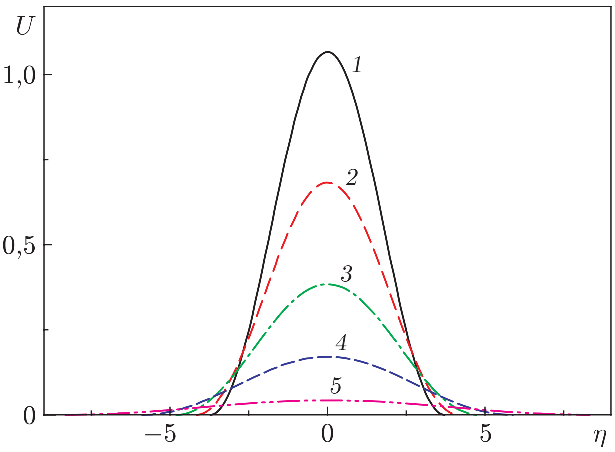

Рис. 5. Распределение амплитуды солитона по координате η, вычисленное по выражению (12), в случае отрицательной фазовой скорости при $a = 1{,}210\,296$, $p = 4$, $\sqrt{U(\eta)} > 0$:
1 — $V_p = -2{,}0$, *2* — $V_p = -1{,}6$, *3* — $V_p = -1{,}2$, *4* — $V_p = -0{,}8$, *5* — $V_p = -0{,}4$

дует, что при больших значениях параметра $\varkappa$ распределение сверхнагретых электронов близко к распределению Максвелла. Эти результаты согласуются с экспериментальными данными [13].

Заключение. В работе путем прямого интегрирования уравнения Шамеля построены его точные решения для случаев как положительной фазовой скорости, так и отрицательной. На основе этих решений исследованы линейные и нелинейные свойства ионно-звуковых волн в плазме двух типов. Исследовано влияние неэкстенсивности и захвата электронов на поведение ионно-звуковых солитонов, а также влияние захваченных электронов на ионно-звуковые волны в сверхнагретой плазме при отрицательных и положительных фазовых скоростях.

Установлено, что такие параметры плазмы, как параметр неэкстенсивности q, число захваченных электронов β, параметр распределения сверхнагретых электронов $\varkappa$ и фазовая скорость, оказывают существенное влияние на основные свойства солитонов: амплитуду, распределение электрического потенциала по координате η, ширину. Амплитуда солитона увеличивается с увеличением фазовой скорости при фиксированных значениях параметра неэкстенсивности q и фиксированном числе захваченных электронов, но при этом ширина солитона уменьшается.

Амплитуда солитона остается практически постоянной при малых значениях параметров q, β и экспоненциально возрастает при увеличении β. Установлено также, что при движении солитона его амплитуда и ширина не изменяются.

В работе получено решение уравнения Шамеля типа бегущей волны с отрицательной фазовой скоростью.

По характеру изменения электрического поля можно судить о флуктуациях пылевого заряда (заряда пылинок), а также об изменении динамики солитона. Поэтому было вычислено электрическое поле при различных значениях параметров β, $\varkappa$ и различных фазовых скоростях. Установлено, что при увеличении параметра $\varkappa$ и уменьшении параметра β электрическое поле становится более локализованным.

Решения уравнения Шамеля описывают диспергирующие волны различной амплитуды. Анализ уединенных волн на основе аналитических решений уравнения Шамеля позволяет объяснить поведение уединенных звуковых волн с малой амплитудой, распространяющихся в космической плазме. Анализ аналитических решений также позволяет объяснить поведение наблюдаемых уединенных ионно-звуковых волн, распространяющихся в лабораторной и космической плазме.

Полученные аналитические решения содержат параметры плазмы и постоянные интегрирования. Изменяя значения этих параметров, можно описать поведение солитонов с различными физическими свойствами. Исследование свойств солитонов на основе полученных в работе аналитических решений позволяет устранить количественное несоответствие теоретических и экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tagare S. G., Chakrabarti A.** Solution of a generalized Korteweg — de Vries equation // Phys. Fluids. 1974. V. 17. P. 1331–1332.
2. **El-Kalaawy O. H., Aldenari R. B.** Painleve analysis, auto-backlund transformation, and new exact solutions for Schamel and Schamel — Korteweg — de Vries — Burger equations in dust ion-acoustic waves plasma // Phys. Plasma. 2014. V. 21. 092308.
3. **Williams G., Verheest F., Hellberg M. A., et al.** A Schamel equation for ion acoustic waves in superthermal plasmas // Phys. Plasmas. 2014. V. 21. 092103.
4. **Lynov J. P., Michelsen P., Pecseli H. L., et al.** Observation of solitary structures in magnetized plasma loaded waveguide // Phys. Scripta. 1979. V. 20. P. 328–335.
5. **Washimi H., Taniuti T.** Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. P. 996–998.
6. **Djebarni L., Gougam L. A., Tribeche M.** Effect of electron trapping and background nonextensivity on the ion-acoustic soliton energy // Astrophys. Space Sci. 2014. V. 350. P. 541–545.
7. **Daghan D., Donmez O., Tuna A.** Explicit solutions of the nonlinear partial differential equations // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2010. V. 11, N 3. P. 2152–2163.
8. **Daghan D., Donmez O.** Investigating the effect of integration constants and various plasma parameters on the dynamics of the soliton in different physical plasmas // Phys. Plasmas. 2015. V. 22. 072114.
9. **Daghan D., Donmez O.** Exact solutions of the Gardner equation and their applications to the different physical plasmas // Brazilian J. Phys. 2016. V. 46, N 3. P. 321–333.
10. **Bandyopadhyay P., Prasad G., Sen A., Kaw P. K.** Experimental study of nonlinear dust acoustic solitary waves in a dusty plasma // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. 065006.
11. **Burgess M. D. J., Enright G. D., Fedosejevs R., Richardson M. C.** Picosecond interferometric studies of CO_2 laser produced plasmas // Springer Ser. Chem. Phys. 1980. V. 14. P. 64–68.
12. **Vasyliunas V.** Low-energy electrons on the day side of the magnetosphere // J. Geophys. Res. 1968. V. 73, iss. 23. P. 7519–7523.
13. **Hellberg M. A., Mace R. L., Baluku T. K., Saini N. S.** Comment on mathematical and physical aspects of Kappa velocity distribution [Phys. Plasmas 14, 110702 (2007)] // Phys. Plasmas. 2009. V. 16. 094701.

Поступила в редакцию 9/III 2017 г.,
в окончательном варианте — 21/VIII 2017 г.