

Тем не менее обнаруженный в данной работе факт резкого увеличения степени повреждаемости в сплаве ВТ14 при достижении некоторого критического напряжения растяжения в зоне откола заслуживает внимания при описании феноменологической картины процесса откольного разрушения подобных конструкционных материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Воловец Л. Д., Златин Н. А., Пугачев Г. С. Возникновение и развитие субмикротрещин в полиметилметакрилате при динамическом растяжении (отколе) // Письма в ЖТФ.— 1978.— Т. 4, № 18.
2. Дремин А. Н., Молодец А. М. Кинетические характеристики откольного разрушения // ПМТФ.— 1980.— № 6.
3. Молодец А. М., Дремин А. Н. Две стадии процесса откольного разрушения // ДАН СССР.— 1979.— Т. 249, № 6.
4. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. И. Кинетическая природа прочности твердых тел.— М.: Наука, 1975.
5. Тамуж В. Т., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов.— Рига: Зинатне, 1978.
6. Еременко А. С., Новиков С. А., Погорелов А. П. Исследование распространения и взаимодействия быстрых трещин в органическом стекле // ПМТФ.— 1979.— № 4.
7. Голубев В. К., Новиков С. А. и др. Разрушение и вязкость свинца при отколе // ПМТФ.— 1982.— № 6.

Поступила 22/1 1987 г.

УДК 539.3

### О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ В ТЕОРИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН

*И. В. Андрианов, Е. Г. Холод*

(Днепропетровск)

Уравнения Бергера [1] допускают в ряде случаев точные решения [2]. Однако до последнего времени считалось, что они являются сугубо приближенными решениями уравнений Фешля — Кармана [3—6]. В настоящей работе показано, что для квадратной пластины при центрально-симметричном напряженно-деформированном состоянии решения уравнений Бергера совпадают с решениями уравнений Фешля — Кармана.

1. Уравнения изгиба прямоугольной ( $0 \leq x_1 \leq a_1$ ,  $0 \leq x_2 \leq a_2$ ) пластины, полученные на основе «гипотезы Бергера» (пренебрежение влиянием второго инварианта тензора деформаций  $J_2$  на напряженно-деформированное состояние системы), имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \partial J_1 / \partial x_1 = 0, \quad \partial J_1 / \partial x_2 = 0;$$

$$(1.2) \quad D \nabla^2 \nabla^2 w - 12 D h^{-2} J_1 \nabla^2 w = q(x_1, x_2),$$

$$J_1 = \frac{1}{a_1 a_2} \int_0^{a_2} \int_0^{a_1} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2.$$

Здесь  $J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ ;  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ ;  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{12}$  — деформации растяжения — сжатия и сдвига соответственно;  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  — перемещения точек срединной поверхности;  $D = E h^3 / [12(1 - \nu^2)]$ ;  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины;  $h$  — ее толщина.

Выпишем выражение для той части энергии деформации срединной поверхности пластины, которая зависит от второго инварианта тензора деформаций  $J_2$  ( $J_2 = \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - 0,25 \varepsilon_{12}^2$ ):

$$(1.3) \quad \Pi = -D(1 - \nu) \int_0^{a_2} \int_0^{a_1} J_2 dx_1 dx_2 = -D(1 - \nu) \int_0^{a_2} \int_0^{a_1} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \right.$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \left] - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2.$$

Нетрудно убедиться, что для квадратной пластины ( $a_1 = a_2 = a$ ) в случае центрально-симметричного напряженно-деформированного состояния ( $u_1 \rightleftharpoons u_2, x_1 \rightleftharpoons x_2$ )  $\Pi = 0$  уравнения Бергера дают точное решение уравнений Фешля — Кармана. Этот факт, насколько известно авторам, не был отмечен в литературе ранее. Между тем он показывает, например, что решение задачи о нелинейном изгибе шарнирно опертой по краям пластины под действием приложенной в центре сосредоточенной силы  $q_0$  есть точное решение уравнений Фешля — Кармана.

Действительно, если пластина оперта на жесткий недеформируемый контур, препятствующий взаимному сближению кромок (при  $x_1 = 0, a$   $u_1 = u_2 = w = w_{x_1 x_1} = 0$ , при  $x_2 = 0, a$   $u_1 = u_2 = w = w_{x_2 x_2} = 0$ ), выражение для  $J_1$  упрощается:

$$(1.4) \quad J_1 = \frac{1}{2a^2} \int_0^a \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2.$$

Представим внешнюю нагрузку в виде двойного тригонометрического ряда

$$(1.5) \quad q_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{a}, \quad c_{mn} = 4q_0 a^{-2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

а прогиб  $w$  будем разыскивать в форме

$$(1.6) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{a}.$$

Подставляя выражения (1.5), (1.6) в (1.1), (1.4) и расщепляя полученные соотношения по синусам, имеем следующую систему связанных нелинейных уравнений для нахождения коэффициентов  $f_{mn}$ :  $(m^2 + n^2)^2 f_{mn} + 1,5h^{-2} f_{mn} (m^2 + n^2) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij} (i^2 + j^2) = a^4 \pi^{-4} D^{-1} c_{mn}$ ,  $m, n = 1, 3, 5, \dots$ , или

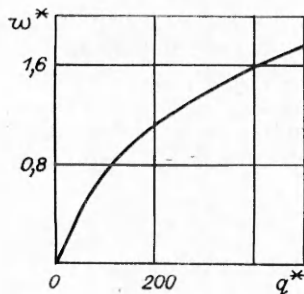
$$(1.7) \quad f_{mn} = \frac{a^4 c_{mn}}{\pi^4 D (m^2 + n^2) (m^2 + n^2 + \lambda)}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots, \\ \lambda = 1,5h^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}^2 (i^2 + j^2).$$

Суммируя соотношения (1.7), находим

$$(1.8) \quad \lambda = 24 \left( \frac{q_0 a^2}{\pi^4 D h} \right)^2 \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{(m^2 + n^2) (m^2 + n^2 + \lambda)^2}.$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению трансцендентного уравнения (1.8) и линейной системы (1.7) относительно коэффициентов  $f_{mn}$ . На рисунке представлена зависимость прогиба ( $w^* = wh^{-1}$ ) в центре пластины от сосредоточенной нагрузки, приложенной в этой точке ( $q^* = q_0 a^2 (Dh)^{-1}$ ).

2. Переходя к динамическому случаю, убеждаемся, что исследование собственных нелинейных колебаний пластины по центрально-симметричной форме при помощи соотношений Бергера (1.1), (1.4) (при этом  $q = -\rho h \partial^2 w / \partial t^2$ ) дает возможность получить точное решение динамических уравнений Фешля — Кармана. Для шарнирного опирания пластины по кон-



туру в уравнениях (1.1), (1.4) точно разделяются пространственные и временная переменные и определить нормальную форму колебаний [2]

не представляет труда:  $w_{mn} = f_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{a} \operatorname{cn} \left( \frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho} (1 + \gamma) t}, \sqrt{\frac{0,5\gamma}{1 + \gamma}} \right)$ ,  $\gamma = 1,5(f_{mn}/h)^2$ .

В связи с высказанными соображениями становится сомнительной попытка оценить точность динамических уравнений Бергера, основываясь на приближенном (найденном методом Бубнова — Галеркина) решении уравнений Фешля — Кармана [6]. Нельзя также признать обоснованным утверждение авторов [5] о том, что уравнения Бергера дают большую погрешность при изучении динамики систем, в том числе и центрально-симметричных форм колебаний квадратной пластины.

3. При исследовании потери устойчивости квадратной пластины по симметричной форме имеем такие результаты. Если в плоскости пластины действуют сжимающие усилия  $N_1 = N_2 = -N$ , то уравнения Бергера, дающие точное решение уравнений Фешля — Кармана, линеаризуются:  $\nabla^2 \nabla^2 w + (12N/Bh^2) \nabla^2 w = 0$ ,  $B = 2Eh/(1 - \nu^2)$ . В случае, когда по контуру пластины приложена «мертвая» нагрузка (при  $x_1 = 0$ ,  $a$   $u_1 = U$ ,  $u_2 = w = w_{x_1} = 0$ , при  $x_2 = 0$ ,  $a$   $u_2 = U$ ,  $u_1 = w = w_{x_2} = 0$ ), для получения точного решения надо использовать уравнения вида  $\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{6}{h^2 a^2} \left[ \int_0^a \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 + 8Ua \right] \nabla^2 w = 0$ .

Отметим, что уравнения Бергера дают возможность при изучении центрально-симметричного напряженно-деформированного состояния и динамики квадратной пластины получить точные решения и в других практически важных случаях: пластина на упругом основании (сплошном или центрально-симметричном дискретном) центрально-симметричной переменной толщины, в частности, подкрепленной в двух главных направлениях регулярным симметричным силовым набором (если учитывается только изгибная жесткость ребер).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berger H. M. A new approach to the analysis of large deflections of plates // J. Appl. Mech.— 1955.— V. 22, N 4.
2. Фин Уэй. Нормальные формы колебаний некоторых нелинейных непрерывных систем // Тр. Амер. с-ва инж.-мех. Сер. Е. Прикладная механика.— 1964.— № 1.
3. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки.— М.: Наука, 1966.
4. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Об упрощенном методе решения нелинейных задач теории упругих пластин и оболочек // Некоторые прикладные задачи теории упругих пластин и оболочек.— М.: Изд-во МГУ, 1981.
5. Денисов В. Н., Жинжер Н. И. Асимптотический метод в задаче о нелинейных колебаниях изотропной прямоугольной пластины // Изв. АН СССР. МТТ.— 1985.— № 1.
6. Vendhan C. P. A study of Berger equations applied to non-linear vibrations of elastic plates // Intern. J. Mech. Sci.— 1975.— V. 17, N 7.

Поступила 22/XII 1986 г.

УДК 539.43:629.7.015

### ВЛИЯНИЕ ПРИКЛЕПАННЫХ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ НА РАЗВИТИЕ ТРЕЩИН ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЯ

В. И. Максименко  
(Новосибирск)

При проектировании и расчете листовых элементов конструкций по принципу «безопасных повреждений» возникает необходимость оценить влияние подкрепляющего набора на коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в вершинах трещин. Обзор работ в этом направлении, главным образом для изотропной пластины с одной трещиной, можно найти, например, в [1, 2]. Исследования, посвященные развитию