

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

Р. Ш. Гайнутдинов

Казанский государственный технологический университет, 420015 Казань

Дано аналитическое решение задачи о тепловом взрыве плоского слоя реагента при несимметричных граничных условиях третьего рода. Определены критические параметры Франк-Каменецкого для общего и частных случаев. Проведено сравнение результатов расчетов с литературными данными. Показано, что значения критических параметров, определенные прямым и обратным методами, при малых значениях критерия Био не совпадают и зависят от масштабной температуры. Особенностью подхода в данной работе является применение обратного метода к решению задач теплового взрыва.

Тепловой взрыв плоского слоя реагента при симметричных граничных условиях третьего рода исследован в [1–3]. Несимметричная задача, представленная следующей математической моделью:

$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \delta \exp \Theta = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = \text{Bi}_0(\Theta - \Theta_{c,1}) \quad \text{при } \xi = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{d\Theta}{d\xi} = \text{Bi}_1(\Theta_1 - \Theta_{c,2}) \quad \text{при } \xi = 1, \quad (3)$$

для частных случаев решена приближенным методом в [4]. Здесь $\Theta = E(T - T_*)/RT_*^2$; $\xi = x/H$,

$$\delta = Qk_0 \exp\left(-\frac{E}{RT_*}\right) \frac{EH^2}{\lambda RT_*^2}; \quad (4)$$

$\text{Bi}_0 = \alpha_0 H/\lambda$, $\text{Bi}_1 = \alpha_1 H/\lambda$; $\Theta_{c,1} = E(T_{c,1} - T_*)/RT_*^2$, $\Theta_{c,2} = E(T_{c,2} - T_*)/RT_*^2$; T — температура, T_* — масштабная температура, $T_{c,1}$, $T_{c,2}$ — температуры окружающих сред; H — ширина слоя; α и λ — коэффициенты теплоотдачи и теплопроводности; x — координата; Q — тепловой эффект реакции; k_0 — предэкспонент; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная.

В данной работе предпринята попытка аналитического решения указанной задачи в общем виде обратным методом. Суть обратного метода в том, что по известной информации о температурном поле, полученной каким-либо способом, дается общее решение, из которого определяются искомые коэффициенты,

входящие в граничные условия либо в основное уравнение. В предлагаемой работе температурное поле задается значениями $\Theta_0 = 0$ и $\Theta_1 = E(T_1 - T_0)/RT_*^2$ при $\xi = 0$ и 1 соответственно, где T_0 и T_1 — температуры горячей и холодной поверхностей пластины. В обратном методе решения в качестве масштабной температуры принимается T_0 . В соответствии с обратным методом предварительно решается уравнение (1) при

$$\xi = 0: \Theta = 0, \quad \xi = 1: \Theta = \Theta_1. \quad (5)$$

Решение (1), (5) дано в работе [3], из которой получаются следующие зависимости:

$$\exp \Theta = a/\text{ch}^2(m\xi - b), \quad (6)$$

$$\delta = 2 \ln^2(pq)/a, \quad (7)$$

$$\ln(pq) = a^{0,5}/(p - a^{0,5}) + z/(q - z), \quad (8)$$

где $p = a^{0,5} + (a - 1)^{0,5}$, $q = z^{0,5} + (z - 1)^{0,5}$, $z = a \exp(-\Theta_1)$ и $m = \ln(pq)$.

Корень a_* уравнения (8) позволяет найти критическое значение δ_* из (7). Определив производные из (6), соответствующие критическим условиям, и подставив их в (2) и (3), получим

$$\text{Bi}_0 \Theta_{c,1} = 2 \text{th}(\ln p_*) m_*, \quad (9)$$

$$\text{Bi}_1(\Theta_1 - \Theta_{c,2}) = 2 \text{th}(\ln q_*) m_*. \quad (10)$$

Решение (9) относительно T_0 дает

$$T_0 = z_1 T_{c,1}, \quad z_1 = (1 - (1 - x)^{1/2})(2/x), \quad (11)$$

$$x = 8 \text{th}(\ln p_*) m_*/\text{Bi}_0 U, \quad U = E/RT_{c,1}.$$

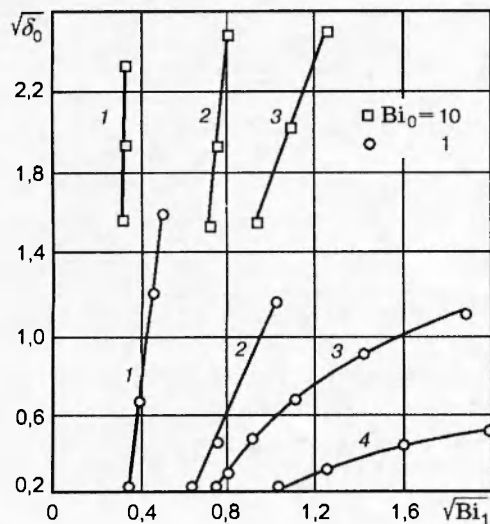


Рис. 1. Критические параметры теплового взрыва:

расчеты по формулам (12) и (13) при $Bi_0 \neq Bi_1$ и $n = T_{c,2}/T_{c,1}$; $n = 0,1$ (1), $0,8$ (2), $0,9$ (3), 1 (4)

Уравнение (10) используется для определения значения Bi_1 , соответствующего заданной величине Θ_1 :

$$Bi_1 = 2 \operatorname{th}(\ln q_*) m_* / (U(1 - n/z_1)/z_1 - |\Theta_1|), \quad (12)$$

где $n = T_{c,2}/T_{c,1}$. Если значение Bi_1 , определенное из (12), не совпадает с исходным по условиям задачи, задается новое значение Θ_1 и расчет повторяется. Из (7) при $T_* = T_{c,1}$ получаем следующую зависимость для вычисления критического параметра:

$$\delta_0 = \delta_* z_1^2 \exp(-U(1 - 1/z_1)). \quad (13)$$

Результаты расчетов по (1)–(3), приведенные на рис. 1, показывают, что при определенных комбинациях $n = T_{c,2}/T_{c,1}$ и Bi критический параметр сохраняет постоянное значение. Это связано с тем, что увеличение охлаждающего эффекта, обусловленного уменьшением $T_{c,2}$, компенсируется ослаблением теплоотдачи за счет Bi_0 . В результате температурный напор, ответственный за тепловой взрыв, остается неизменным. При прочих равных условиях увеличение Bi_0 приводит к возрастанию δ_0 , что находится в соответствии с данными [1, 2].

Рассмотрим решение некоторых частных задач обратным методом.

1. Пусть $T_{c,1} = T_{c,2} = T_c$, $Bi_1 = \infty$, $Bi_0 = Bi$. Следовательно, необходимо решить уравнение (1) при граничных условиях (5). В

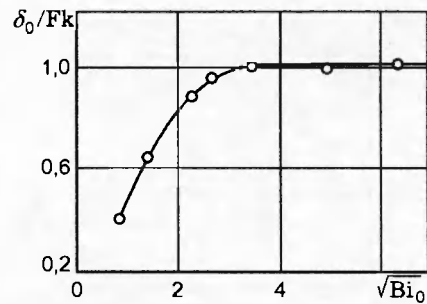


Рис. 2. Сравнение критических параметров, определенных по [4] и соотношениям (12)–(14) при $Bi_1 = \infty$, $n = 1$

результате получаем $x = 4|\Theta_1|/U$ и $T_0 = z_1 T_c$. Значение z_1 определяется из (12), δ_0 — из (13).

$$Bi = 2 \operatorname{th}(\ln p_*) m_* / |\Theta_1|. \quad (14)$$

Исследуемая частная задача имеет решение из [4]. Представляет интерес сравнить результаты по критическому параметру, полученные в [4] и в настоящей работе. Сравнение расчетных данных показано на рис. 2, где $k = \delta_0/Fk$. $Fk = 0,88((1 + 2N_1)/(1 + N_1))^2$ — критический параметр из [4], $U = 30, 40, 50$ (вид кривой при этих значениях U остается неизменным). Здесь $N_1 = Bi/0,88e$. Видно, что при $Bi < 9$ результаты расходятся, а при $Bi > 9$ — совпадают, что связано с выбором масштабной температуры. Дело в том, что в [4] в качестве масштабной принимается температура окружающей среды, а в данной работе — температура на поверхности пластины. При $Bi < 9$ имеем $T_c \neq T_0$, а при $Bi > 9$ — $T_c \rightarrow T_0$. Поэтому при больших значениях Bi результаты совпадают, поскольку в обеих работах применены одинаковые масштабные температуры. Ниже вопрос о влиянии масштабной температуры на критический параметр обсуждается более подробно.

2. Пусть $T_{c,1} = T_{c,2} = T_c$, $Bi_0 < Bi_1$. В рассматриваемом случае Bi_1 определяется из (12) при $n = 1$, δ_0 — из (13) и z_1 — из (11).

Сравнение данных иллюстрирует рис. 3. Как и в предыдущем случае, при малом $Bi_0 = 1$ результаты расходятся, а при $Bi_0 = 10$ — совпадают. В данном варианте критический параметр в [4] определяется из уравнения $Fk = 0,88(1 + 1/N)^{-1}$, где $(1 + 1/N)^{-1} = \sum N_i [1 + N_i / (1 + (1 + 1/N_i) / (1 + N_{1-i}))]^{-1}$.

3. Пусть $T_{c,1} > T_{c,2}$, $Bi_0 = \infty$. В этом случае в обеих работах используется одинаковая масштабная температура $T_* = T_{c,1}$. Расчеты

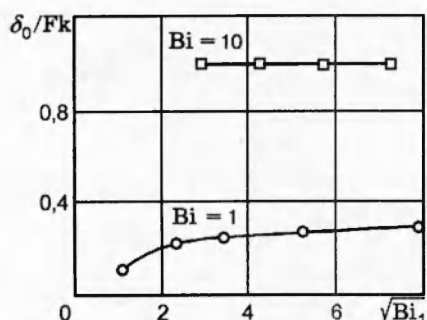


Рис. 3. Сравнение критических параметров, полученных по [4] и соотношениям (11)–(13) при $n = 1$ и $Bi_0 < Bi_1$

показали, что и значения критических параметров в обеих работах одинаковы независимо от значения Bi .

Анализ результатов расчетов дает достаточно оснований считать, что в задачах с граничными условиями третьего рода при малых значениях Bi критический параметр δ_0 зависит от масштабной температуры. Для дальнейшего изучения зависимости критического параметра от масштабной температуры рассмотрим теоретическую задачу при различных значениях масштабной температуры.

Пусть $T_{c,1} = T_{c,2} = T_c$, $Bi_0 = Bi_1 = Bi$. Это классическая задача решена в [1, 2] при $T_* = T_c$. Здесь анализируются случаи, когда $T_* = sT_c$ и $s > 1$. Решение (1) при граничных условиях $\xi = 0: d\Theta/d\xi = 0$, $\xi = 1: Bi(\Theta - \Theta_c) = -d\Theta/d\xi$ позволяет получить следующую зависимость для критического параметра:

$$\delta = 2m^2 / \exp F, \quad (15)$$

где $F = 2 \operatorname{th}(m)m/Bi + 2 \ln(\operatorname{ch} m) + \Theta_c$, $\Theta_c = (T_c - T_*)E/RT_*^2$. Критическое значение m_* определяется из трансцендентного уравнения:

$$Bi = (m_* \operatorname{th} m_* + m_*/\operatorname{ch}^2 m_*) / (1 - m_* \operatorname{th} m_*).$$

Анализ соотношения (15), направленный на установление связи между δ_0 и T_* , проводится численным методом. Объект исследования — нитроклетчатка со следующими значениями кинетических и теплофизических параметров [5]: $Qk_0 = 6,35 \cdot 10^{21}$ кал/(см³·с), $E = 48\,500$ кал/моль, $\lambda = 3 \cdot 10^{-4}$ кал/(см·с·К), $H = 2$ см. Расчеты выполнены при $Bi = 1$ и 10 , и суть их сводится к вычислению отношения критического параметра δ_* из (15) к действующему значению параметра Франк-Каменецкого δ из (4) ($\Delta = \delta_*/\delta$) при различных значениях

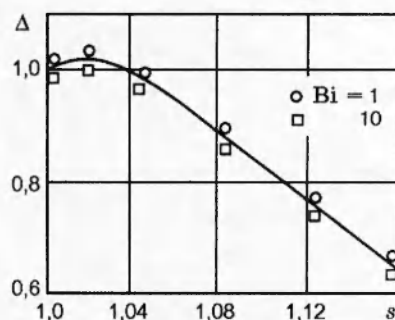


Рис. 4. Зависимость критического параметра от масштабной температуры:

численные расчеты для нитроклетчатки выполнены по формулам (4), (15)

T_* . Базовые значения T_c подбираются такие, что $\Delta = 1$ при $T_* = T_c$. Если δ_* не зависит от T_* , отношение $\Delta = 1$ должно сохраняться и для других значений $T_* \neq T_c$. Результаты расчетов приведены на рис. 4. Видно, что условие $\Delta = 1$ не соблюдается. Следовательно, δ_* зависит от T_* . Объяснение результатов становится более наглядным, если действующий параметр во всех случаях определить через $T_* = T_c$. При этом критический параметр вычисляется по уравнению $\delta_0 = \delta_* s^2 \exp(-U(1 - 1/s))$, где δ_* определяется при $T_* = T_c$. Тогда ясно, что убыль значения Δ связана с уменьшением критического параметра δ_0 , поскольку знаменатель Δ — величина постоянная.

Таким образом, выполненные исследования дают основание считать, что при малых числах Био значение критического параметра зависит от масштабной температуры.

Обратный метод может применяться для решения теоретических и практических задач. Для облегчения инженерных расчетов в таблице приведены результаты решения (8) в интервале $|\Theta_1| = 0 \div 20$. Кроме того, для определе-

Результаты решения уравнения (8)

$ \Theta_1 $	a_*	$ \Theta_1 $	a_*	$ \Theta_1 $	a_*
0	3,276 0	7	1,087 4	14	1,021 8
1	2,152 0	8	1,067 3	15	1,018 8
2	1,634 0	9	1,053 2	16	1,016 4
3	1,378 0	10	1,043 0	17	1,014 6
4	1,242 0	11	1,035 5	18	1,012 8
5	1,164 5	12	1,029 8	19	1,011 5
6	1,117 5	13	1,025 3	20	1,010 5

ния δ_* предлагается аппроксимирующая функция $\delta_* = 0,489|\Theta_1^2| + 1,468|\Theta_1| + 3,51$. При вычислении по ней относительная ошибка не превышает 0,9% в диапазоне $|\Theta_1| = 3 \div 20$ и 3% в интервале $|\Theta_1| = 1 \div 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гришин А. М., Тодес О. М.** Об определении условий воспламенения // ПМТФ. 1965. № 1. С. 68-75.
2. **Барзыкин В. В., Мержанов А. Г.** Краевая задача в теории теплового взрыва // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 6. С. 1271-1273.
3. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
4. **Дик И. Г.** Решение задачи о критических условиях самовоспламенения методом термических сопротивлений // Физика горения и взрыва. 1986. Т. 21, № 5. С. 3-9.
5. **Лисицкий В. К., Мержанов А. Г.** О зажигания конденсированных веществ потоком горячего воздуха // Физика горения и взрыва. 1965. Т. 1, № 2. С. 62-68.

*Поступила в редакцию 22/IV 1996 г.,
в окончательном варианте — 6/X 1997 г.*