УДК 532.5:539.3

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГИДРОУПРУГОЙ СТРУКТУРЫ

П. И. Плотников, И. В. Кузнецов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: plotnikov@hydro.nsc.ru, kuznetsov_i@hydro.nsc.ru

Предложен формальный вывод уравнений нелинейной гидроупругой структуры, представляющей собой объем идеальной несжимаемой жидкости, покрытый оболочкой. Исследование основано на двух предположениях. Первое предположение состоит в том, что запасенная энергия оболочки полностью определяется средней кривизной и элементом площади. В трехмерном случае запасенная энергия оболочки выбирается в виде функционала Уиллмора. В двумерном случае можно рассматривать более общий вид функционала. Второе предположение заключается в том, что уравнения движения имеют гамильтонову структуру и могут быть получены из вариационного принципа Лагранжа. Для гидроупругой структуры в двумерном случае получено условие, связывающее внешнее давление и кривизну упругой оболочки.

Ключевые слова: свободная граница, вариационный принцип, идеальная жидкость, гидроупругость, реакции связи, уравнение Антмана, закон Бернулли.

1. Уравнения движения в лагранжевых координатах. Обширный список литературы по теории нелинейной гидроупругости приведен в работе [1].

Для формулировки модели гидроупругой структуры, впервые предложенной в [2] для описания волн на поверхности жидкости, покрытой слоем льда, потребуются следующие обозначения.

Предположим, что в момент времени t идеальная несжимаемая жидкость занимает область Ω_t в евклидовом пространстве точек $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. В свою очередь, толщина оболочки считается малой, и ее срединная поверхность совпадает с границей области течения как геометрическое место точек.

Введем в рассмотрение лагранжевы переменные $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, определяющие положения материальных частиц. По сути, координата $\boldsymbol{\xi}$ является меткой материальной частицы, которая выбирается более или менее произвольно.

Будем считать, что точки $\boldsymbol{\xi}$ занимают некоторую область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей Σ. Тогда положения точек жидкости характеризуются векторным полем перемещений $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$, а положения частиц оболочки — полем перемещений $\boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma$.

В начально-краевых задачах удобно рассматривать $\boldsymbol{\xi}$ как положение материальных точек в момент $t = 0$. В этом случае $\Omega_0 = \Omega$, $\partial\Omega_0 = \Sigma$. Таким образом, граница области течения и оболочка допускают два представления:

$$\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}:\quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi}), \qquad \Sigma_t^{\boldsymbol{y}}:\quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{\xi}) \qquad \text{при} \quad \boldsymbol{\xi} \in \Sigma.$$

В процессе совместного движения в общем случае возможно отделение жидкости от оболочки, поэтому поверхности $\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}$ и $\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}$ могут не совпадать. Такой эффект называется ча-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00309) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 2.1.

стичным жидким заполнением полости. В данной работе этот эффект не учитывается и дальнейшие рассмотрения ограничиваются случаем $\Sigma_t^{\boldsymbol{x}} = \Sigma_t^{\boldsymbol{y}}$. Однако возможно проскальзывание оболочки относительно идеальной несжимаемой жидкости, что означает $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi}) \neq \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma$.

Напомним основные факты из теории поверхностей. Если поверхность Σ локально допускает параметризацию $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\vec{q}) = \boldsymbol{\xi}(q_1, q_2)$, то в координатах (q_1, q_2) вектор нормали $\boldsymbol{n}$ и элемент площади поверхности Σ имеют вид

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})) = \frac{1}{\sqrt{g_0}}\,\partial_{q_1}\boldsymbol{\xi}(\vec{q}) \times \partial_{q_2}\boldsymbol{\xi}(\vec{q}), \quad d\Sigma = \sqrt{g_0}\,d\vec{q}, \quad \sqrt{g_0} = \big|\partial_{q_1}\boldsymbol{\xi}(\vec{q}) \times \partial_{q_2}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})\big|.$$

Если в каждый момент времени t подвижная поверхность $\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}$ допускает параметризацию

$$\boldsymbol{Y}(t,\vec{q}) = \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}(\vec{q})),$$

то вектор внешней нормали к $\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}$ и элемент площади задаются формулами

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))) = \frac{1}{\sqrt{g_t^{\boldsymbol{y}}}}\,\partial_{q_1}\boldsymbol{Y}(t,\vec{q}) \times \partial_{q_2}\boldsymbol{Y}(t,\vec{q}), \qquad d\Sigma_t^{\boldsymbol{y}} = \sqrt{g_t^{\boldsymbol{y}}}\,d\vec{q}, \\ \sqrt{g_t^{\boldsymbol{y}}} = \big|\partial_{q_1}\boldsymbol{Y}(t,\vec{q}) \times \partial_{q_2}\boldsymbol{Y}(t,\vec{q})\big|.\end{gathered} \tag{1}$$

Компоненты метрического тензора g_{ij} $(1 \leqslant i,j \leqslant 2)$ и компоненты второй квадратичной формы L_{ij} $(1 \leqslant i,j \leqslant 2)$ задаются равенствами

$$g_{ij} = (\boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{Y}_j), \quad L_{ij} = (\boldsymbol{\nu}, \partial_{q_i}\boldsymbol{Y}_j), \quad \boldsymbol{Y}_i = \partial_{q_i}\boldsymbol{Y}, \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{Y}_1 \times \boldsymbol{Y}_2}{|\boldsymbol{Y}_1 \times \boldsymbol{Y}_2|}.$$

Удвоенная средняя кривизна H вычисляется по формуле

$$H = g^{ij} L_{ij}, \tag{2}$$

где $g^{ij} = \big(g_{ij}\big)^{-1}$.

Аналогичные формулы имеют место для поверхности $\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}$, которая совпадает с $\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}$ как геометрическое место точек.

Движение нелинейной гидроупругой структуры характеризуется полями скоростей

$$\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{\xi}) = \partial_t\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega, \qquad \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{\xi}) = \partial_t\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega,$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость частицы жидкости; $\boldsymbol{u}$ — скорость частицы оболочки в лагранжевых координатах ξ_i, $i = 1,2,3$. Кроме того, движение характеризуется распределением плотностей в соответствующих компонентах.

Без ограничения общности будем считать, что плотность жидкости равна единице. Оболочка, ограничивающая жидкость, является сжимаемой, поэтому возникает необходимость использовать формулу распределения плотности оболочки. Предположим, что в начальный момент времени в лагранжевых координатах распределение плотности оболочки задано функцией $\varrho_0(\boldsymbol{\xi})$. Последнее означает, что масса любой части оболочки $A \subset \Sigma$ определяется равенством

$$\int\limits_A \varrho_0(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma.$$

Из закона сохранения массы следует равенство

$$\int\limits_A \varrho_0(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma = \int\limits_{\boldsymbol{y}(t,A)} \varrho(t,\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma_t^{\boldsymbol{y}},$$

из которого в свою очередь следует представление

$$\varrho(t,\boldsymbol{\xi}) = \varrho_0(\boldsymbol{\xi})\Big(\frac{d\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}}{d\Sigma}\Big)^{-1} = \varrho_0(\boldsymbol{\xi})\sqrt{\frac{g_0(\vec{q}\,)}{g_t^{\boldsymbol{y}}(\vec{q}\,)}}. \tag{3}$$

Для простоты будем считать, что в начальный момент времени масса равномерно распределена в оболочке, т. е. $\varrho(0,\boldsymbol{\xi}) = \varrho_0(\boldsymbol{\xi}) = 1$. В этих предположениях кинетическая энергия жидкости K_f и кинетическая энергия оболочки K_e имеют вид

$$K_f = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\partial_t \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi},$$

$$K_e = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}} \varrho(t,\boldsymbol{\xi})|\partial_t \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})|^2\, d\Sigma_t^{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} |\partial_t \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})|^2\, d\Sigma.$$

Далее примем следующие гипотезы.

1. Уравнения, описывающие нелинейную гидроупругую структуру, образуют динамическую систему с конфигурационным пространством $(\boldsymbol{x}(t,\cdot\,), \boldsymbol{y}(t,\cdot\,)) \in \Lambda \subset L^2(\Omega)^3 \times L^2(\Sigma)^3$ при $t \in (0,T)$.

2. Лагранжиан для жидкости имеет вид

$$L_f = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\partial_t \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}.$$

3. Лагранжиан для оболочки имеет вид

$$L_e = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} |\partial_t \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})|^2\, d\Sigma - \tilde{W}(\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}),$$

где $\tilde{W}(\Sigma_t^{\boldsymbol{y}})$ — запасенная (потенциальная) упругая энергия оболочки, заданная в форме поверхностного интеграла:

$$\tilde{W}(\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}} W\big(\sqrt{g_t^{\boldsymbol{y}}}, |\boldsymbol{H}|\big)\, d\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}, \tag{4}$$

вектор средней кривизны $\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{\nu}$ и единичный вектор внешней нормали $\boldsymbol{\nu}$ определены равенствами (1), (2); $d\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}$ — элемент площади поверхности. Данная модель оболочки используется в нелинейной теории упругих оболочек (см. [3]). Следует отметить, что функционал $\tilde{W}(\Sigma_t^{\boldsymbol{y}})$ зависит от выбора лагранжевых координат и меняет форму при замене независимых переменных. Таким образом, представление (4) зависит от выбора координаты $\boldsymbol{\xi}$ (этот вопрос требует детального рассмотрения в каждом частном случае). В линейной теории упругости указанная проблема не возникает, так как в рамках этой теории лагранжевы координаты выбираются единственным образом как положения частиц в некотором ненагруженном состоянии. Представляет интерес случай, когда функционал запасенной энергии является геометрическим инвариантом и не зависит от выбора параметризации. В классе функционалов вида (4) существует только один геометрически инвариантный представитель, нетривиально зависящий от внешней кривизны, а именно так называемый функционал Уиллмора (см. [4]):

$$\tilde{W}(\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}} |\boldsymbol{H}|^2\, d\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}.$$

Роль функционала Уиллмора в теории упругости отмечена, например, в [3].

4. Для того чтобы получить уравнения движения, нужно описать все связи, налагаемые на механическую систему движения. Далее предполагается, что имеется две естественные связи. Первая связь — принцип несжимаемости жидкости, который записывается в виде уравнения

$$\det D_\xi \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi}) \equiv 1 \qquad \text{при} \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega, \tag{5}$$

где $D_\xi \boldsymbol{x}$ — матрица Якоби отображения $\boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})$. Вторая связь выражает тот факт, что в процессе движения поверхность жидкости и упругая оболочка совпадают как подмножества евклидова пространства:

$$\Sigma_t^{\boldsymbol{x}} = \Sigma_t^{\boldsymbol{y}}. \tag{6}$$

2. Конфигурационное многообразие Θ. Рассмотрим гидроупругую структуру как динамическую систему в линейном пространстве Λ, состоящем из бесконечно дифференцируемых векторных полей $(\boldsymbol{x}(\cdot),\boldsymbol{y}(\cdot))$, где $\boldsymbol{x}:\Omega\to\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{y}:\Sigma\to\mathbb{R}^3$. Будем считать, что Λ снабжено гильбертовой структурой $L^2(\Omega)^3\times L^2(\Sigma)^3$. В этих предположениях уравнения связи (5), (6) определяют бесконечномерное конфигурационное многообразие $\Theta\subset\Lambda$. Снабженное индуцированной метрикой $L^2(\Omega)^3\times L^2(\Sigma)^3$ пространство Λ не является полным, и все дальнейшие рассуждения имеют формальный характер. Следующая лемма дает описание касательного пространства к Θ в точке $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Theta$.

Лемма 1. *Касательное пространство к многообразию Θ в точке $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ состоит из всех векторных полей $(\delta\boldsymbol{x}(\cdot),\delta\boldsymbol{y}(\cdot))$, $\delta\boldsymbol{x}\colon\Omega\to\mathbb{R}^3$, $\delta\boldsymbol{y}\colon\Sigma\to\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих равенствам*

$$\operatorname{div}(M^{-1}\delta\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{\emph{при}} \quad \boldsymbol{\xi}\in\Omega; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}(\Phi(\boldsymbol{\xi})))\cdot\delta\boldsymbol{x}(\Phi(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}))\cdot\delta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{\emph{при}} \quad \boldsymbol{\xi}\in\Sigma, \tag{8}$$

где $M = D_\xi\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})$ — матрица Якоби отображения $\boldsymbol{\xi}\mapsto\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})$, диффеоморфизм $\Phi(\cdot)\colon\Sigma\mapsto\Sigma$ задан равенством

$$\boldsymbol{x}(\Phi(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{\emph{при}} \quad \boldsymbol{\xi}\in\Sigma. \tag{9}$$

Заметим, что для траектории динамической системы $(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))$ вектор $(\partial_t\boldsymbol{x},\partial_t\boldsymbol{y})$ принадлежит касательному пространству $\operatorname{Tan}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\Theta$, поэтому из условий (8), (9) следует соотношение

$$\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{x}(t,\Phi(t,\boldsymbol{\xi})))\cdot\partial_t\boldsymbol{x}(t,\Phi(t,\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}))\cdot\partial_t\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}),$$

где $\boldsymbol{x}(t,\Phi(t,\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi}\in\Sigma$.

Доказательство леммы 1. Пусть $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Theta$. Положим $M(\boldsymbol{\xi}) = D_\xi\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})$, $|M| = \det M = 1$. Тогда вариация уравнения связи (5) по $\boldsymbol{x}$ имеет вид

$$\delta|M| = \operatorname{div}_\xi(M^{-1}\delta\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{при} \quad \xi\in\Omega,$$

откуда следует (7).

Введем вспомогательные функции $\boldsymbol{x}_\mu = \boldsymbol{x}_\mu(\boldsymbol{\xi})$ и $\boldsymbol{y}_\mu = \boldsymbol{y}_\mu(\boldsymbol{\xi})$, зависящие от параметра $\mu\in(-1,1)$ и порождающие поверхности $\Sigma_\mu^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_\mu(\Sigma)$, $\Sigma_\mu^{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}_\mu(\Sigma)$. Равенство $\Sigma^{\boldsymbol{x}} = \Sigma^{\boldsymbol{y}}$ позволяет наложить на функции $\boldsymbol{x}_\mu$ и $\boldsymbol{y}_\mu$ условия

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}, \qquad \Sigma_\mu^{\boldsymbol{x}} = \Sigma_\mu^{\boldsymbol{y}}.$$

Следовательно, существует μ-параметрическое семейство отображений $\Phi_\mu\colon\Sigma\to\Sigma$, таких что

$$\boldsymbol{x}_\mu(\Phi_\mu(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{y}_\mu(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{при} \quad \boldsymbol{\xi}\in\Sigma. \tag{10}$$

В терминах теории римановых многообразий функции $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})$ называются изометричными погружениями (см., например, [5]); $\boldsymbol{x}_\mu$ и $\boldsymbol{y}_\mu$ — бесконечно малые изгибания 1-го порядка погружений $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно:

$$\boldsymbol{x}_\mu = \boldsymbol{x} + \mu\,\delta\boldsymbol{x} + o(\mu), \quad \boldsymbol{y}_\mu = \boldsymbol{y} + \mu\,\delta\boldsymbol{y} + o(\mu), \quad o(\mu)/\mu \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to 0$$

($\delta\boldsymbol{x}$, $\delta\boldsymbol{y}$ — изгибающие поля 1-го порядка). Зафиксировав произвольное значение $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma$ и продифференцировав (10) по μ при $\mu = 0$, получим связь между изгибающими полями

$$D_\xi \boldsymbol{x}(\Phi_0(\boldsymbol{\xi}))\,\frac{d\Phi_\mu}{d\mu}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\mu=0} + \delta\boldsymbol{x}(\Phi_0(\boldsymbol{\xi})) = \delta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}). \tag{11}$$

Так как множество $\{\Phi_\mu(\boldsymbol{\xi})\}_{\mu\in(-1,1)}$ есть кривая на Σ, то $(d\Phi_\mu/d\mu)(\boldsymbol{\xi})\big|_{\mu=0}$ — касательный вектор к Σ в точке $\Phi_0(\boldsymbol{\xi})$. Следовательно, $D_\xi \boldsymbol{x}(\Phi_0(\boldsymbol{\xi}))(d\Phi_\mu/d\mu)(\boldsymbol{\xi})\big|_{\mu=0}$ есть касательный вектор к $\Sigma_0^{\boldsymbol{x}}$ в точке $\mathbf{x}(\Phi_0(\boldsymbol{\xi}))$. Умножая (11) скалярно на вектор нормали к $\Sigma_0^{\boldsymbol{x}}$ в точке $\boldsymbol{x}(\Phi_0(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})$, получим (8). В дальнейшем диффеоморфизм Φ_0: $\Sigma \to \Sigma$ будем обозначать через Φ.

Как следствие леммы 1 получаем следующее утверждение о структуре пространства $(\mathrm{Tan}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\,\Theta)^\perp$, ортогонального к многообразию Θ в точке $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Отметим, что в силу выбора конфигурационного пространства Θ пространство, ортогональное к $\mathrm{Tan}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\,\Theta$ в точке $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \Theta$, состоит из всех векторных полей $(\boldsymbol{N}(\cdot), \boldsymbol{L}(\cdot))$, $\boldsymbol{N}$: $\Omega \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{L}$: $\Sigma \to \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих соотношению

$$\int_\Omega \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} + \int_\Sigma \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma = 0 \qquad \forall(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Tan}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\,\Theta. \tag{12}$$

Векторные поля $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{L}$ называются реакциями связей.

Лемма 2. *Для каждой точки* $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \Theta$ *пространство* $(\mathrm{Tan}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\,\Theta)^\perp$ *состоит из векторных полей* $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{L})$, *таких что*

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi}) = (M^{-1})^* \nabla_\xi p(\boldsymbol{\xi}) \qquad \text{при} \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega,$$

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{\varrho(\boldsymbol{\xi})}\,(p(\Phi(\boldsymbol{\xi})) + C)\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})) \qquad \text{при} \quad \boldsymbol{\xi} \in \Sigma.$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{h} \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathrm{div}_\xi\,\boldsymbol{h} = 0$. Выберем $(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Tan}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}\,\Theta$ в следующей форме: $\delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = M(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi})$, $\delta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) = 0$. Таким образом, (12) принимает вид

$$\int_\Omega \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot (M(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\xi}))\,d\boldsymbol{\xi} = 0.$$

В силу произвольности $\boldsymbol{h}$ найдется функция $p(\boldsymbol{\xi})$, такая что

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\xi}) = (M^*)^{-1} \nabla_\xi p(\boldsymbol{\xi}). \tag{13}$$

Далее, выберем произвольный вектор $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\xi})$, ортогональный вектору нормали $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}))$. В (12) положим $\delta\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = 0$, $\delta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\xi})$. Для любого касательного вектора $\boldsymbol{l}$ справедливо равенство

$$\int_\Sigma \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma = 0,$$

из которого следует представление реакции связи

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})). \tag{14}$$

Остается определить вид скалярной функции $\lambda = \lambda(\boldsymbol{\xi})$. Пусть $\boldsymbol{k}$ — произвольное соленоидальное векторное поле $C^\infty(\Omega)$ и $\delta\boldsymbol{x} = M(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi})$ при $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$, $\delta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) = \big((M\circ\Phi)(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{k}\circ\Phi(\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}\circ\Phi(\boldsymbol{\xi}))\big)\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}\circ\Phi(\boldsymbol{\xi}))$ при $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma$.

Учитывая равенство $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}\circ\Phi(\boldsymbol{\xi})) = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}))$ при $\boldsymbol{\xi} \in \Sigma$ и подставляя представления (13), (14) реакций связей $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{L}$ в (12), получим равенство

$$\int\limits_\Omega (M\boldsymbol{k})\cdot((M^*)^{-1}\nabla_\xi p)\,d\boldsymbol{\xi} + \int\limits_\Sigma \big(\lambda(\boldsymbol{\xi})((M\circ\Phi)\boldsymbol{k}\circ\Phi)\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}\circ\Phi)\big)\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}\circ\Phi)\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}\circ\Phi)\,d\Sigma = 0. \quad (15)$$

Так как $\operatorname{div}_\xi \boldsymbol{k} = 0$, то

$$\int\limits_\Omega (M\boldsymbol{k})\cdot((M^*)^{-1}\nabla_\xi p)\,d\boldsymbol{\xi} = \int\limits_\Sigma p(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,d\Sigma, \quad (16)$$

где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})$ — единичный вектор внешней нормали к Σ:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})) = \partial_{q_1}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})\times\partial_{q_2}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})/\sqrt{g_0(\vec{q})}, \quad \sqrt{g_0(\vec{q})} = |\partial_{q_1}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})\times\partial_{q_2}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})| \quad \text{при} \quad \vec{q}\in Q,$$

$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\vec{q})$ — локальная параметризация Σ.

Используя (16), первый интеграл в левой части равенства (15) запишем в параметрической форме

$$\int\limits_\Sigma p(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma = \int\limits_Q \tilde{p}(\vec{q})\tilde{\boldsymbol{k}}(\vec{q})\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}(\vec{q})\sqrt{g_0(\vec{q})}\,d\vec{q},$$

где $\tilde{p}(\vec{q}) = p(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))$; $\tilde{\boldsymbol{k}}(\vec{q}) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))$; $\tilde{\boldsymbol{n}}(\vec{q}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))$. Тогда соотношение (15) принимает вид

$$\int\limits_Q \tilde{p}(\vec{q})\tilde{\boldsymbol{k}}(\vec{q})\cdot\tilde{\boldsymbol{n}}(\vec{q})\sqrt{g_0(\vec{q})}\,d\vec{q} + \int\limits_\Sigma (M\circ\Phi)\,\boldsymbol{k}\circ\Phi\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}\circ\Phi)\lambda(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma = 0. \quad (17)$$

Для упрощения подынтегрального выражения второго слагаемого в левой части этого равенства найдем связь между векторами $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})$ и $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}))$. Пусть $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(\vec{q}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))$. Напомним, что

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))) = \partial_{q_1}\boldsymbol{X}(\vec{q})\times\partial_{q_2}\boldsymbol{X}(\vec{q})/\sqrt{g^{\boldsymbol{x}}(\vec{q})}, \qquad \sqrt{g^{\boldsymbol{x}}(\vec{q})} = |\partial_{q_1}\boldsymbol{X}(\vec{q})\times\partial_{q_2}\boldsymbol{X}(\vec{q})|.$$

Тогда

$$\partial_{q_i}\boldsymbol{X}(\vec{q}) = \sum_{k=1}^3 \partial_{q_i}\xi_k(\vec{q})\,\partial_{\xi_k}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})),$$

откуда следует

$$\partial_{q_1}\boldsymbol{X}\times\partial_{q_2}\boldsymbol{X} = \begin{vmatrix} \partial_{q_1}\xi_1 & \partial_{q_1}\xi_2 \\ \partial_{q_2}\xi_1 & \partial_{q_2}\xi_2 \end{vmatrix}\partial_{\xi_1}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_2}\boldsymbol{x} + \begin{vmatrix} \partial_{q_1}\xi_3 & \partial_{q_1}\xi_1 \\ \partial_{q_2}\xi_3 & \partial_{q_2}\xi_1 \end{vmatrix}\partial_{\xi_3}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_1}\boldsymbol{x} +$$

$$+\begin{vmatrix} \partial_{q_1}\xi_2 & \partial_{q_1}\xi_3 \\ \partial_{q_2}\xi_2 & \partial_{q_2}\xi_3 \end{vmatrix}\partial_{\xi_2}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_3}\boldsymbol{x} = \big[\partial_{\xi_2}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_3}\boldsymbol{x};\ \partial_{\xi_3}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_1}\boldsymbol{x};\ \partial_{\xi_1}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_2}\boldsymbol{x}\big](\partial_{q_1}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})\times\partial_{q_2}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})).$$

Заметим, что

$$(M^*)^{-1} = \big[\partial_{\xi_2}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_3}\boldsymbol{x};\ \partial_{\xi_3}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_1}\boldsymbol{x};\ \partial_{\xi_1}\boldsymbol{x}\times\partial_{\xi_2}\boldsymbol{x}\big].$$

Следовательно,

$$M^*(\partial_{q_1}\boldsymbol{X}(\vec{q})\times\partial_{q_2}\boldsymbol{X}(\vec{q})) = (\partial_{q_1}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})\times\partial_{q_2}\boldsymbol{\xi}(\vec{q})),$$

что приводит к связи между векторами $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})$ и $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}))$:

$$M^*(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))\,\sqrt{\frac{g_0(\vec{q})}{g^{\boldsymbol{x}}(\vec{q})}}.$$

В этом равенстве сделаем замену параметризации $\vec{q} \to \Psi(\vec{q})$, где диффеоморфизм $\Psi\colon Q \to Q$ удовлетворяет тождеству $\Phi(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})) = \boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q}))$. В результате получаем соотношение

$$(M^* \circ \Phi(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})))\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x} \circ \Phi(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q})))\,\sqrt{\frac{g_0(\Psi(\vec{q}))}{g^{\boldsymbol{x}}(\Psi(\vec{q}))}}.$$

Умножая обе части этого соотношения скалярно на $\boldsymbol{k} \circ \Phi$, имеем

$$(M \circ \Phi)\,\boldsymbol{k} \circ \Phi \,\cdot\, \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x} \circ \Phi) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q}))) \,\cdot\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q})))\sqrt{\frac{g_0(\Psi(\vec{q}))}{g^{\boldsymbol{x}}(\Psi(\vec{q}))}}.$$

Второй интеграл в левой части (17) представим в виде интеграла по параметру $\vec{q}$:

$$\int\limits_{\Sigma} ((M \circ \Phi)\,\boldsymbol{k} \circ \Phi) \,\cdot\, \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x} \circ \Phi)\lambda(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma =$$

$$= \int\limits_{Q} \boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q}))) \,\cdot\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q})))\sqrt{\frac{g_0(\Psi(\vec{q}))}{g^{\boldsymbol{x}}(\Psi(\vec{q}))}}\sqrt{g_0(\vec{q})}\,\lambda(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))\,d\vec{q}. \qquad (18)$$

В подынтегральном выражении в правой части этого равенства выполним замену переменных $\vec{q} \to \vec{r} = \Psi(\vec{q})$. Тогда в новых переменных функция $\boldsymbol{\xi}(\vec{q})$ принимает вид $\Xi(\vec{r}) = \boldsymbol{\xi} \circ \Psi^{-1}(\vec{r})$. Так как $d\Sigma$ есть геометрический инвариант, то

$$d\Sigma = \sqrt{g_0(\vec{q})}\,d\vec{q} = \sqrt{G_0(\vec{r})}\,d\vec{r}, \qquad \sqrt{G_0(\vec{r})} = |\partial_{r_1}\Xi(\vec{r}) \times \partial_{r_2}\Xi(\vec{r})|.$$

Отсюда и из (18) получаем

$$\int\limits_{\Sigma} (M \circ \Phi)\,\boldsymbol{k} \circ \Phi \,\cdot\, \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x} \circ \Phi)\,\lambda(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma =$$

$$= \int\limits_{Q} \boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi}(\vec{r})) \,\cdot\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi}(\vec{r}))\sqrt{\frac{g_0(\vec{r})}{g^{\boldsymbol{x}}(\vec{r})}}\sqrt{G_0(\vec{r})}\lambda(\boldsymbol{\xi}(\Psi^{-1}(\vec{r})))\,d\vec{r}. \qquad (19)$$

Заменяя $\vec{r}$ на $\vec{q}$ в (19), запишем (17) в следующей форме:

$$\int\limits_{Q} \tilde{\boldsymbol{k}}(\vec{q}) \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}(\vec{q})\,\sqrt{g_0(\vec{q})}\,\Big(\tilde{p}(\vec{q}) + \sqrt{\frac{G_0(\vec{q})}{g^{\boldsymbol{x}}(\vec{q})}}\;\lambda(\boldsymbol{\xi}(\Psi^{-1}(\vec{q})))\Big)\,d\vec{q} = 0.$$

Поскольку $\boldsymbol{k}$ есть произвольное соленоидальное векторное поле, имеем

$$\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{k}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{\xi})\,d\Sigma = \int\limits_{Q} \tilde{\boldsymbol{k}}(\vec{q}) \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}(\vec{q})\,\sqrt{g_0(\vec{q})}\,d\vec{q} = 0.$$

Следовательно, существует неизвестная константа C, такая что

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}(\Psi^{-1}(\vec{q}))) = -\sqrt{\frac{g^{\boldsymbol{x}}(\vec{q})}{G_0(\vec{q})}}\,(p(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})) + C).$$

В последнем равенстве сделаем замену переменных $\vec{q} \to \Psi(\vec{q})$:

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})) = -\sqrt{\frac{g^{\boldsymbol{x}}(\Psi(\vec{q}))}{G_0(\Psi(\vec{q}))}}\,(p(\boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q}))) + C). \tag{20}$$

Для завершения доказательства леммы 2 достаточно установить связь между фундаментальными формами $g^{\boldsymbol{x}}$ и $g^{\boldsymbol{y}}$. В обозначениях $\boldsymbol{X}(\vec{q}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))$, $\boldsymbol{Y}(\vec{q}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))$, $\Phi(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})) = \boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q}))$ условие $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x} \circ \Phi(\boldsymbol{\xi})$ записывается в следующем виде:

$$\boldsymbol{Y}(\vec{q}) = \boldsymbol{X}(\Psi(\vec{q})). \tag{21}$$

Продифференцировав условие (21) по q_i:

$$\partial_{q_i}\boldsymbol{Y}(\vec{q}) = \partial_{q_i}\Psi_1(\vec{q})\,\partial_{\Psi_1}\boldsymbol{X}(\Psi(\vec{q})) + \partial_{q_i}\Psi_2(\vec{q})\partial_{\Psi_2}\boldsymbol{X}(\Psi(\vec{q})),$$

получим

$$\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}(\vec{q})} = \sqrt{g^{\boldsymbol{x}}(\Psi(\vec{q}))}\,\det D_q\Psi(\vec{q}).$$

В принятых обозначениях $\boldsymbol{\xi}(\vec{q}) = \Xi(\Psi(\vec{q}))$, $\vec{r} = \Psi(\vec{q})$ и

$$\partial_{q_1}\boldsymbol{\xi} \times \partial_{q_2}\boldsymbol{\xi} = \partial_{r_1}\Xi \times \partial_{r_2}\Xi\,\det D_q\Psi(\vec{q}),$$

откуда следует

$$\sqrt{g_0(\vec{q})} = \sqrt{G_0(\Psi(\vec{q}))}\,\det D_q\Psi(\vec{q}).$$

Таким образом,

$$\frac{\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}(\vec{q})}}{\sqrt{g_0(\vec{q})}} = \frac{\sqrt{g^{\boldsymbol{x}}(\Psi(\vec{q}))}}{\sqrt{G_0(\Psi(\vec{q}))}}. \tag{22}$$

С использованием (20) и (22) окончательно получим

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})) = -\sqrt{\frac{g^{\boldsymbol{y}}(\vec{q})}{g_0(\vec{q})}}\,\big(p(\boldsymbol{\xi}(\Psi(\vec{q}))) + C\big) = -\sqrt{\frac{g^{\boldsymbol{y}}(\vec{q})}{g_0(\vec{q})}}\,\big(p \circ \Phi(\boldsymbol{\xi}(\vec{q})) + C\big),$$

что завершает доказательство леммы 2.

3. Вариация функционала Уиллмора. При вычислении вариации используем результаты работы [6]. Пусть $\boldsymbol{y}(\cdot)\colon \Sigma \mapsto \Sigma^{\boldsymbol{y}}$ есть гладкое вложение многообразия Σ в $\mathbb{R}^3$. Напомним обозначение параметризации поверхности $\Sigma^{\boldsymbol{y}}$: $\boldsymbol{Y}(\vec{q}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))$, где $\vec{q} = (q^1, q^2)$. Рассмотрим новое вложение

$$\boldsymbol{Y}(\vec{q}) = \boldsymbol{Y}(\vec{q}) + \delta\boldsymbol{Y}(\vec{q}).$$

Разложим $\delta\boldsymbol{Y}(\vec{q})$ на касательную и нормальную компоненты:

$$\delta\boldsymbol{Y} = \delta_{\|}\boldsymbol{Y} + \delta_{\perp}\boldsymbol{Y} = \theta^{\,i}\boldsymbol{Y}_i + \theta\boldsymbol{\nu}.$$

Тогда касательная вариация функционала $\tilde{W}$ имеет вид

$$\delta_{\|}\tilde{W}(\Sigma^{\boldsymbol{y}}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \frac{1}{\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}}}\,\partial_{q^i}(\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}}\,\theta^i H^2)\,d\Sigma^{\boldsymbol{y}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \frac{1}{\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}}}\,\partial_{q^i}(\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}}\,\theta^i H^2)\,d\Sigma^{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \operatorname{div}(\vec{\theta}H^2)\,d\Sigma^{\boldsymbol{y}},$$

где $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$. Поскольку поверхность $\Sigma^{\boldsymbol{y}}$ замкнутая, $\delta_{\|}\tilde{W}(\Sigma^{\boldsymbol{y}}) = 0$.

Нормальные вариации H, $\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}}$, $d\Sigma^{\boldsymbol{y}}$ вычисляются по формулам

$$\delta_\perp d\Sigma^{\boldsymbol{y}} = -\theta H\, d\Sigma^{\boldsymbol{y}}, \qquad \delta_\perp \sqrt{g^{\boldsymbol{y}}} = -\theta H \sqrt{g^{\boldsymbol{y}}}, \qquad \delta_\perp H = \Delta_{g^{\boldsymbol{y}}}\theta + L_{ij}L^{ij}\theta,$$

где $\Delta_{g^{\boldsymbol{y}}}$ — оператор Лапласа — Бельтрами, который задается соотношением

$$\Delta_{g^{\boldsymbol{y}}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}}}\,\partial_{q^i}(\sqrt{g^{\boldsymbol{y}}}\,g^{ij}\partial_{q^j}).$$

Нормальная вариация функционала $\tilde{W}(\Sigma^{\boldsymbol{y}})$ определяется следующим образом:

$$\delta_\perp \tilde{W}(\Sigma^{\boldsymbol{y}}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \delta_\perp(H^2 d\Sigma^{\boldsymbol{y}}) = \int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} H\delta_\perp H\, d\Sigma^{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} H^2\delta_\perp(d\Sigma^{\boldsymbol{y}}) =$$
$$= \int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \Big(H(\Delta_{g^{\boldsymbol{y}}}\theta + L_{ij}L^{ij}\theta) - \frac{1}{2}\,\theta H^3\Big)\, d\Sigma^{\boldsymbol{y}}.$$

Упростим выражение

$$\int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} H(\Delta_{g^{\boldsymbol{y}}}\theta + L_{ij}L^{ij}\theta)\, d\Sigma^{\boldsymbol{y}} = \int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \theta(\Delta_{g^{\boldsymbol{y}}}H + L_{ij}L^{ij}H)\, d\Sigma^{\boldsymbol{y}} + \int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \nabla_{q^i}(H\nabla_{q_i}\theta - \theta\nabla_{q_i}H)\, d\Sigma^{\boldsymbol{y}}.$$

Так как $\Sigma^{\boldsymbol{y}}$ — замкнутая поверхность, то

$$\int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \nabla_{q^i}(H\nabla_{q_i}\theta - \theta\nabla_{q_i}H)\, d\Sigma^{\boldsymbol{y}} = 0.$$

Следовательно,

$$\delta\tilde{W}(\Sigma^{\boldsymbol{y}}) = \int\limits_{\Sigma^{\boldsymbol{y}}} \Big(\Delta_g H + \Big(\frac{1}{2}\,H^2 + R\Big)H\Big)\theta\, d\Sigma^{\boldsymbol{y}},$$

где R — скалярная кривизна поверхности $\Sigma^{\boldsymbol{y}}$, удовлетворяющая уравнению Гаусса — Кодацци

$$L_{ij}L^{ij} = H^2 + R.$$

4. Принцип Лагранжа. Основные уравнения гидроупругой структуры. Теперь можно вывести уравнения движения гидроупругой структуры в переменных Лагранжа. Для простоты изложения ограничимся случаем, когда запасенная энергия оболочки задается функционалом Уиллмора. Основные уравнения гидроупругой структуры со связями могут быть получены с использованием вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta L_f - \tilde{N}(\delta\boldsymbol{x}) + \delta L_e - \tilde{L}(\delta\boldsymbol{y}) = 0 \tag{23}$$

для всех гладких $(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{y})$. Здесь линейные функционалы $\tilde{N}$ и $\tilde{L}$ определены равенствами

$$\tilde{N}(\delta\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{N}(t,\boldsymbol{\xi})\cdot\delta\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}, \qquad \tilde{L}(\delta\boldsymbol{y}) = \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{L}(t,\boldsymbol{\xi})\cdot\delta\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})\, d\Sigma,$$

$\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{L}$ — реакции связей. Используя лемму 2 и выражения δL_f, δL_e, $\delta\tilde{W}$ в явном виде, соотношение (23) запишем в виде

$$-\int\limits_{\Omega}\big(\partial_t^2\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})+(M^{-1})^*\nabla_\xi p(t,\boldsymbol{\xi})\big)\cdot\delta\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{\xi}-$$

$$-\int\limits_{Q}\Big(\partial_t^2\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}(\vec{q}))+\Big(\Delta_{g_t^{\boldsymbol{y}}}H+\Big(\frac{1}{2}H^2+R\Big)H\Big)\sqrt{\frac{g_t^{\boldsymbol{y}}}{g_0}}\,\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}(\vec{q})))-$$

$$-\,(p(t,\Phi(t,\boldsymbol{\xi}(\vec{q})))+C(t))\sqrt{\frac{g_t^{\boldsymbol{y}}}{g_0}}\,\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}(\vec{q})))\Big)\cdot\delta\boldsymbol{y}\,\sqrt{g_0}\,d\vec{q}=0.$$

В рамках гипотез 1–4 (см. п. **1**) уравнение в вариациях (23) эквивалентно следующей краевой задаче динамики гидроупругой структуры.

Задача А. Требуется найти зависящие от временной переменной диффеоморфизмы $\boldsymbol{x}(t,\cdot)\colon\Omega\mapsto\Omega_t\subset\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{y}(t,\cdot)\colon\Sigma\mapsto\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}\subset\mathbb{R}^3$, функцию $p(t,\cdot)\colon\Omega\mapsto\mathbb{R}$, функцию $C(t)$, семейство диффеоморфизмов $\Phi(t,\cdot)\colon\Sigma\mapsto\Sigma$, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\boldsymbol{x}(t,\Phi(t,\boldsymbol{\xi}))=\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})\qquad\text{при}\quad\boldsymbol{\xi}\in\Sigma;\tag{24а}$$

$$\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{x}(t,\Phi(t,\boldsymbol{\xi})))\cdot\partial_t\boldsymbol{x}(t,\Phi(t,\boldsymbol{\xi}))=\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}))\cdot\partial_t\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})\qquad\text{при}\quad\boldsymbol{\xi}\in\Sigma;\tag{24б}$$

$$\partial_t^2\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})+(M^{-1}(t,\boldsymbol{\xi}))^*\,\nabla_\xi p(t,\boldsymbol{\xi})=0,\qquad\det M=\det D_\xi\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})\equiv1\qquad\text{при}\quad\boldsymbol{\xi}\in\Omega;\tag{24в}$$

$$\varrho(t,\boldsymbol{\xi})\partial_t^2\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})+(\Delta_{g_t^{\boldsymbol{y}}}H+(H^2/2+R)H)\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}))=$$
$$=(p(t,\Phi(t,\boldsymbol{\xi}))+C(t))\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}))\qquad\text{при}\quad\boldsymbol{\xi}\in\Sigma;\tag{24г}$$

$$\boldsymbol{x}(0,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}\quad\text{при}\quad\boldsymbol{\xi}\in\Omega,\qquad\boldsymbol{y}(0,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi},\quad\varrho(0,\boldsymbol{\xi})\equiv1\quad\text{при}\quad\boldsymbol{\xi}\in\Sigma.$$

Здесь $H=H(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}))$ — удвоенная средняя кривизна $\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}$ в точке $\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})$; $\boldsymbol{\nu}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}))$ — единичный вектор нормали к $\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}$ в точке $\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})$; плотность упругой мембраны задается формулой (см. (3))

$$\varrho(t,\boldsymbol{\xi})=\frac{d\Sigma}{d\Sigma_t}(t,\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}))=\sqrt{\frac{g_0(\vec{q})}{g_t^{\boldsymbol{y}}(\vec{q})}},\tag{24д}$$

$\vec{q}$ — произвольная локальная параметризация Σ.

5. Формулировка задачи в переменных Эйлера. В формулировке Эйлера функции зависят от декартовых координат $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ и временной переменной t. Напомним, что для каждого момента $t\in[0,T]$ жидкость занимает область Ω_t с границей $\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}$. Положим

$$Q_T=\bigcup_{t\in(0,T)}\Omega_t\times\{t\},\qquad S_T=\bigcup_{t\in(0,T)}\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}\times\{t\}.$$

Вектор нормали к S_T обозначается, как и в лагранжевых координатах, через $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},t)$. Через $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\partial_t\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t))$ обозначим скорость жидкости, а через $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)=\partial_t\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{y},t))$ — скорость мембраны. Пусть материальная поверхность S_T области, занимаемой жидкостью, задается уравнением $F(\boldsymbol{x},t)=0$. Следовательно, скорость жидкости удовлетворяет кинематическому условию

$$\partial_tF(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}F(\boldsymbol{x},t)=0\qquad\text{при}\quad F(\boldsymbol{x},t)=0.$$

В эйлеровой формулировке не имеет смысла различать $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, поэтому в дальнейшем будем использовать $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ вместо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t)$. Тогда условие (24б) записывается в виде

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},t)\qquad\text{при}\quad(\boldsymbol{x},t)\in S_T.$$

Поскольку $\boldsymbol{\nu} \times \nabla_{\boldsymbol{x}} F = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$, получим второе кинематическое условие

$$\partial_t F(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, t) = 0 \qquad \text{при} \quad F(\boldsymbol{x}, t) = 0.$$

В новых обозначениях система уравнений (24в) записывается в виде классической системы уравнений Эйлера динамики идеальной жидкости

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{x}} p = 0, \qquad \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{при} \quad (\boldsymbol{x}, t) \in Q_T.$$

Уравнение (24г) для $\boldsymbol{u}$ принимает вид

$$\rho \partial_t \boldsymbol{u} + \rho\, \boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u} + (\Delta_{g_t^{\boldsymbol{x}}} H + (H^2/2 + R) H) \boldsymbol{\nu} = (p + C(t)) \boldsymbol{\nu} \quad \text{при} \quad F(\boldsymbol{x}, t) = 0.$$

Выведем уравнение переноса для плотности. Для этого приведем несколько вспомогательных фактов из дифференциальной геометрии. Если

$$\boldsymbol{x}(t + \tau, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi}) + \tau \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi}), t) + O(\tau^2),$$

то первая вариация площади поверхности записывается в форме

$$\frac{d}{d\tau} \sqrt{g^{\boldsymbol{x}}(t + \tau, \boldsymbol{\xi})}\,\Big|_{\tau=0} = \operatorname{tr}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) D_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)^* \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t)\} \sqrt{g_t^{\boldsymbol{x}}},$$

где $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}, t) \otimes \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}, t)$. Используя обозначение

$$\operatorname{div}_{\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{u} = \operatorname{tr}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t) D_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)^* \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t)\}, \tag{25}$$

получим

$$\partial_t \rho(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \rho(\boldsymbol{x}, t) = \partial_t \varrho(t, \boldsymbol{\xi}) =$$

$$= -\frac{\sqrt{g_0}}{g_t^{\boldsymbol{x}}}\, \partial_t \sqrt{g^{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{\xi})} = -\sqrt{\frac{g_0}{g_t^{\boldsymbol{x}}}}\, \operatorname{div}_{\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{u} = -\rho\, \operatorname{div}_{\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{u},$$

откуда следует уравнение переноса для плотности

$$\partial_t \rho(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \rho(\boldsymbol{x}, t) + \rho \operatorname{div}_{\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{u} = 0.$$

В результате получаем следующую задачу, эквивалентную задаче А.

Задача Б. Требуется найти криволинейный цилиндр Q_T с боковой границей S_T, векторные поля $\boldsymbol{v}$: $Q_T \mapsto \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}$: $S_T \mapsto \mathbb{R}^3$, функции p: $Q_T \mapsto \mathbb{R}$ и ρ: $S_T \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим уравнениям и краевым условиям:

$$\begin{gathered} \partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{x}} p = 0, \qquad \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{при} \quad (\boldsymbol{x}, t) \in Q_T, \\ \rho \partial_t \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{u} + \big(\Delta_{g_t^{\boldsymbol{x}}} H + (H^2/2 + R) H\big) \boldsymbol{\nu} = (p + C(t)) \boldsymbol{\nu} \qquad \text{при} \quad F(\boldsymbol{x}, t) = 0; \end{gathered} \tag{26а}$$

$$\begin{gathered} \partial_t \rho + \boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \rho + \rho\, \operatorname{div}_{\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{при} \quad F(\boldsymbol{x}, t) = 0, \\ \partial_t F(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{v} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, t) = \partial_t F(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{x}, t) = 0 \qquad \text{при} \quad F(\boldsymbol{x}, t) = 0. \end{gathered} \tag{26б}$$

Здесь уравнение $F(t, \boldsymbol{x}) = 0$ определяет поверхность S_T; оператор $\operatorname{div}_{\Sigma_t^{\boldsymbol{x}}}$ определен соотношением (25).

Данные уравнения должны быть снабжены начальными данными:

$$\Omega_t\big|_{t=0} = \Omega, \qquad \Sigma_t^{\boldsymbol{x}}\big|_{t=0} = \Sigma,$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}), \qquad \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}_0 = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, 0) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Sigma,$$

$$\rho(\boldsymbol{x}, 0) = \rho_0(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Sigma.$$

Наличие потенциальных массовых сил

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\nabla_{\boldsymbol{x}}\Pi(\boldsymbol{x})$$

не оказывает существенного влияния на форму уравнений. В этом случае лагранжианы L_f, L_e имеют вид

$$L_f = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\partial_t \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} - \int\limits_{\Omega} \Pi(\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{\xi}))\, d\boldsymbol{\xi},$$

$$L_e = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} |\partial_t \boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi})|^2\, d\Sigma - \tilde{W}(\Sigma_t^{\boldsymbol{y}}) - \int\limits_{\Sigma} \Pi(\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{\xi}))\, d\Sigma.$$

Следовательно, в формулировке Эйлера (26) вместо уравнений (26a) появляются уравнения

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{x}} p + \nabla_{\boldsymbol{x}}\Pi = 0, \qquad \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{при} \quad (\boldsymbol{x},t)\in Q_T,$$

$$\rho\,\partial_t \boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u} + \big(\Delta_{g_t^{\boldsymbol{x}}} H + (H^2/2 + R)H\big)\boldsymbol{\nu} + \rho\nabla_{\boldsymbol{x}}\Pi = (p + C(t))\boldsymbol{\nu} \quad \text{при} \quad (\boldsymbol{x},t)\in S_T.$$

6. Двумерные движения. В случае двух пространственных переменных уравнения движения значительно упрощаются. С учетом приложений к задаче о волнах на поверхности бассейна, покрытого упругой пленкой, будем предполагать, что область Ω_t, занимаемая жидкостью, имеет вид $\Omega_t = \{\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j},\ x_2 < \eta(x_1,t)\}$, где $\eta = \eta(x_1,t)$ — периодическая по переменной x_1 функция. Поверхность $\Sigma_t = \{\vec{x},\ x_2 = \eta(x_1,t)\}$ является неизвестной и определяется вместе с решением задачи.

В силу предполагаемого отсутствия отрыва оболочки от свободной поверхности жидкости в двумерном случае (в плоскости $(\vec{i},\vec{j})$) свободная поверхность оболочки допускает параметризацию

$$\Sigma_t = \{\vec{y}\colon \vec{y} = \vec{r}(t,s),\ s\in\mathbb{R}\},$$

где вектор перемещения $\vec{r}(t,s)$ — периодическая функция лагранжевой переменной s.

Введем в рассмотрение вспомогательные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и новые функции α, β:

$$\vec{a} = \frac{\partial_s\vec{r}}{|\partial_s\vec{r}|}, \qquad \vec{b} = \frac{\partial_s\vec{a}}{|\partial_s\vec{a}|}, \qquad \alpha = |\partial_s\vec{r}\,|, \qquad \beta = |\partial_s\vec{a}\,|.$$

Очевидно, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\partial_s\vec{a} = \vec{b}\cdot\partial_s\vec{b} = 0$. Отсюда легко заключить, что

$$\partial_s\vec{b} = \vec{a}\vec{a}\cdot\partial_s\vec{b} = -\vec{a}\,\partial_s\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{a}\,\beta.$$

В этих обозначениях

$$\sqrt{g_t^{\boldsymbol{y}}(s)} = \alpha(t,s), \qquad \vec{H} = \frac{1}{\alpha}\,\partial_s\Big(\frac{1}{\alpha}\,\partial_s\vec{r}\Big) = \frac{1}{\alpha}\,\partial_s\vec{a} = \frac{\beta}{\alpha}\,\vec{b}, \qquad |\vec{H}| = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Пусть $\Gamma_t = \{\vec{y} = \vec{r}(t,s),\ 0\leqslant s\leqslant 2\pi\}$. Напомним, что $\vec{r}(t,s)$ является периодической функцией переменной s. Не ограничивая общности, предположим, что выполняется

Условие 1. В начальный момент времени кривая Γ_0 есть прямая:

$$\vec{r}(0,s) = s\vec{i}, \qquad 0\leqslant s\leqslant 2\pi.$$

На плотность ϱ_0 уже поставлено условие равномерного распределения вещества в оболочке в начальный момент времени: $\varrho_0 = 1$. При этих условиях закон сохранения массы (24д) означает, что

$$\varrho(t,s) = \frac{1}{|\partial_s\vec{r}(t,s)|} = \frac{1}{\alpha(t,s)}. \tag{27}$$

Рассмотрим функцию Лагранжа L_e для мембраны

$$L_e = K_e - \tilde{W}(\Gamma_t) - E_p,$$

где K_e — кинетическая энергия; $\tilde{W}(\Gamma_t)$ — запасенная упругая энергия; E_p — потенциал гравитационной энергии.

Кинетическая энергия упругой мембраны определяется равенством

$$K_e = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_t} \varrho(t,s)|\partial_t\vec{r}\,|^2\,d\Gamma_t = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_t} \varrho(t,s)|\partial_t\vec{r}\,|^2\alpha(t,s)\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} |\partial_t\vec{r}\,|^2\,ds.$$

В свою очередь, запасенная упругая энергия $\tilde{W}(\Gamma_t)$ представляется в виде

$$\tilde{W}(\Gamma_t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_t} W\Big(\sqrt{g_t^{\boldsymbol{y}}(s)}, |\vec{H}(t,s)|\Big)\,d\Gamma_t = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} W\Big(\alpha, \frac{\beta}{\alpha}\Big)\alpha\,ds.$$

На функцию $E(\lambda,\sigma) = W(\lambda,\sigma)\,\lambda$ накладывается условие выпуклости по переменной λ.

Для гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{j}$, действующего в плоскости $(\vec{i},\vec{j}\,)$ $(\vec{g} = -\nabla_y\Pi(\vec{y}\,)$, $\Pi(\vec{y}\,) = gy_2)$, вычислим потенциал гравитационной энергии

$$E_p = \int\limits_{\Gamma_t} \varrho(t,s)\Pi(\vec{r}(t,s))\,d\Gamma_t = \int\limits_0^{2\pi} \varrho(t,s)\Pi(\vec{r}(t,s))\alpha(t,s)\,ds = \int\limits_0^{2\pi} \Pi(\vec{r}(t,s))\,ds.$$

Легко заметить, что вариации функционалов K_e и E_p определяются равенствами

$$\delta E_p = g\int\limits_0^{2\pi} \vec{j}\cdot\delta\vec{r}\,ds, \qquad \delta K_e = -\int\limits_0^{2\pi} \partial_t^2\vec{r}\cdot\delta\vec{r}\,ds.$$

Вычисление вариации функционала запасенной упругой энергии является более трудной задачей и требует отдельного рассмотрения. Для краткости опустим обозначение зависимости от t.

Выразим α, β через новые неизвестные k, q:

$$\alpha = \sqrt{q}, \qquad \beta = \sqrt{qk}.$$

Заметим, что $q = |\partial_s\vec{r}\,|^2$ и $k = |\partial_s\vec{a}\,|^2/|\partial_s\vec{r}\,|^2$. Выражение для интегрального функционала упругой энергии принимает вид

$$\tilde{W}(\Gamma_t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} F(q,k)\,ds,$$

где $F(q,k) = W\big(\sqrt{q},\sqrt{k}\,\big)\sqrt{q}$. Тогда для нахождения вариации

$$\delta\tilde{W}(\Gamma_t) = \frac{1}{2}\,\delta\int\limits_0^{2\pi} F(q,k)\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \big(\partial_q F\,\delta q + \partial_k F\,\delta k\big)\,ds$$

достаточно вычислить δq и δk:

$$\delta q = \delta|\partial_s\vec{r}\,|^2 = 2\partial_s\vec{r}\cdot\partial_s\delta\vec{r} = 2\sqrt{q}\,\vec{a}\cdot\partial_s\delta\vec{r},$$

$$\delta k = \delta \frac{|\partial_s \vec{a}\,|^2}{|\partial_s \vec{r}\,|^2} = -2\,\frac{|\partial_s \vec{a}\,|^2}{|\partial_s \vec{r}\,|^4}\,\partial_s \vec{r}\cdot \partial_s \delta\vec{r} + 2\,\frac{1}{|\partial_s \vec{r}\,|^2}\,\partial_s \vec{a}\cdot \partial_s \delta \vec{a} = -\frac{2k}{q}\,\partial_s \vec{r}\cdot \partial_s \delta \vec{r} +$$

$$+\frac{2}{q}\,\partial_s \vec{a}\cdot\partial_s\delta\vec{a} = -\frac{2k}{\sqrt{q}}\,\vec{a}\cdot\partial_s\delta\vec{r} + 2\,\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{q}}\,\vec{b}\cdot\partial_s\Big(\frac{1}{\sqrt{q}}\,\partial_s\delta\vec{r} - \frac{\vec{a}}{\sqrt{q}}\,(\vec{a},\partial_s\delta\vec{r})\Big) =$$

$$= -\frac{2k}{\sqrt{q}}\,\vec{a}\cdot\partial_s\delta\vec{r} + 2\,\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{q}}\,\vec{b}\cdot\partial_s\Big(\frac{1}{\sqrt{q}}\,\partial_s\delta\vec{r}\Big) - 2\,\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{q}}\,\vec{b}\cdot\partial_s\Big(\frac{\vec{a}}{\sqrt{q}}\,(\vec{a},\partial_s\delta\vec{r})\Big) =$$

$$= -\frac{2k}{\sqrt{q}}\,\vec{a}\cdot\partial_s\delta\vec{r} + 2\,\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{q}}\,\vec{b}\cdot\partial_s\Big(\frac{1}{\sqrt{q}}\,\partial_s\delta\vec{r}\Big) - \frac{2k}{\sqrt{q}}\,\vec{a}\cdot\partial_s\delta\vec{r} =$$

$$= -\frac{4k}{\sqrt{q}}\,\vec{a}\cdot\partial_s\delta\vec{r} + 2\,\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{q}}\,\vec{b}\cdot\partial_s\Big(\frac{1}{\sqrt{q}}\,\partial_s\delta\vec{r}\Big),$$

где

$$\delta\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\partial_s\delta\vec{r} - \frac{1}{\sqrt{q}}\,\vec{a}\,\vec{a}\cdot\partial_s\delta\vec{r}, \qquad \partial_s\vec{a} = \sqrt{qk}\,\vec{b}, \qquad \vec{a} = \frac{\partial_s\vec{r}}{\sqrt{q}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\,\delta\int\limits_0^{2\pi} F(k,q)\,ds = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\Big(\sqrt{q}\,\partial_q F - \frac{2k}{\sqrt{q}}\,\partial_k F\Big)\,\vec{a} - \frac{1}{\sqrt{q}}\,\partial_s\Big(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{q}}\,\partial_k F\,\vec{b}\Big)\Big)\cdot\partial_s\delta\vec{r}\,ds.$$

Поскольку $\partial_s\vec{b} = -\sqrt{qk}\,\vec{a}$, это равенство можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\,\delta\int\limits_0^{2\pi} F(k,q)\,ds = \int\limits_0^{2\pi}\Big(\Big(\sqrt{q}\,\partial_q F - \frac{k}{\sqrt{q}}\,\partial_k F\Big)\,\vec{a} - \frac{1}{\sqrt{q}}\,\partial_s\Big(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{q}}\,\partial_k F\Big)\,\vec{b}\Big)\cdot\partial_s\delta\vec{r}\,ds.$$

Вернемся к переменным α и β в правой части этого равенства. Если ввести новую функцию $E = E(\alpha,\beta)$:

$$E(\alpha,\beta) = F(\alpha^2,\beta^2/\alpha^2) \equiv \alpha W(\alpha,\beta/\alpha),$$

то выражения при векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сворачиваются следующим образом:

$$\sqrt{q}\,\partial_q F - \frac{k}{\sqrt{q}}\,\partial_k F = \alpha\,\partial_q F - \frac{\beta^2}{\alpha^3}\,\partial_k F = \frac{1}{2}\,\partial_\alpha E(\alpha,\beta), \qquad \frac{\beta}{\alpha^2}\,\partial_q F = \frac{1}{2}\,\partial_\beta E(\alpha,\beta).$$

Окончательно получаем

$$\delta\tilde{W}(\Gamma_t) = -\int\limits_0^{2\pi}\partial_s\Big(U\vec{a} - \frac{1}{\alpha}\,(\partial_s V)\vec{b}\Big)\cdot\delta\vec{r}\,ds,$$

где $U = \partial_\alpha E(\alpha,\beta)$; $V = \partial_\beta E(\alpha,\beta)$.

Пусть область Ω, занятая жидкостью в начальный момент времени, имеет вид $\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2\colon \xi_2\leqslant 0\}$. Тогда граница области Ω есть $\mathbb{R}$. Такой выбор области Ω обусловлен условием 1. Считаем, что $\vec{\xi}$-параметризация границы области $\vec{x}(t,\Omega)$ выбрана таким образом, что $|\partial_{\xi_1}\vec{x}(t,\xi_1,0)| = 1$ при $\xi_1\in\mathbb{R}$. Тогда условие отсутствия отрыва упругой оболочки от поверхности жидкости принимает вид

$$\vec{x}(t,S(t,s),0) = \vec{r}(t,s), \qquad s\in\mathbb{R},$$

где $S(t,\cdot)\colon \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ — семейство диффеоморфизмов. Продифференцируем по s это уравнение:

$$\partial_s S(t,s)=\frac{|\partial_s\vec r(t,s)|}{|\partial_{\xi_1}\vec x(t,S(t,s),0)|}=|\partial_s\vec r(t,s)|=\frac{1}{\varrho(t,s)}.$$

В соответствии с вариационным принципом Лагранжа получаем

$$\partial_t^2\,\vec r-\partial_s\Big(U\vec a-\frac{(\partial_s V)}{\alpha}\,\vec b\Big)+g\vec j=\alpha(p(t,S(t,s),0)+C(t))\vec b,$$

где $S(t,\cdot)\colon \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ — диффеоморфизм. При $p=0$, $C=0$ это уравнение совпадает с уравнением Антмана [7]. Учитывая выражение (27) для плотности ϱ, запишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\varrho\,\partial_t^2\,\vec r-\varrho\,\partial_s(U\vec a-\varrho\,(\partial_s V)\,\vec b\,)+\varrho\,g\,\vec j=(p(t,S(t,s),0)+C(t))\vec b.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в п. **5**, функцию Лагранжа для жидкости представим в явном виде:

$$L_f=\frac12\int\limits_\Omega|\partial_t\vec x(t,\vec\xi\,)|\,d\vec\xi-g\int\limits_\Omega x_2(t,\vec\xi\,)\,d\vec\xi.$$

Согласно принципу Лагранжа получаем

$$\partial_t^2\vec x(t,\vec\xi)+(M^{-1}(t,\vec\xi\,))^*\nabla_\xi p(t,\vec\xi\,)+g\vec j=0,\qquad M=D_\xi\vec x(t,\vec\xi\,).$$

Суммируя результаты данного пункта, имеем следующую задачу.

Задача В. Требуется найти поле перемещений жидкости $\vec x(t,\vec\xi\,)$ при $\vec\xi\in\Omega$ и поле перемещений мембраны $\vec r(t,s)$, функции $p(t,\vec\xi)$, $C(t)$ и диффеоморфизм $S(t,\cdot)\colon\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, так чтобы выполнялись уравнения

$$\begin{gathered}\vec x(t,S(t,s),0)=\vec r(t,s)\qquad\text{при}\quad s\in\mathbb{R},\\ \vec b(t,s)\cdot\partial_t\vec x(t,\xi_1,0)\big|_{\xi_1=S(t,s)}=\vec b(t,s)\cdot\partial_t\vec r(t,s)\qquad\text{при}\quad s\in\mathbb{R},\\ \partial_t^2\vec x(t,\vec\xi\,)+(M^{-1}(t,\vec\xi\,))^*\nabla_\xi p(t,\vec\xi\,)+g\vec j=0,\qquad\det M(t,\vec\xi\,)=1\qquad\text{при}\quad\vec\xi\in\Omega,\qquad(28)\\ \varrho\,\partial_t^2\,\vec r-\varrho\,\partial_s(U\vec a-\varrho\,\partial_s V\,\vec b\,)+\varrho g\vec j=(p(t,S(t,s),0)+C(t))\,\vec b\qquad\text{при}\quad s\in\mathbb{R},\\ \vec x(0,\vec\xi\,)=\vec\xi\quad\text{при}\quad\xi\in\Omega,\qquad\vec r(0,s)=s\,\vec i,\quad\varrho(0,s)\equiv1\quad\text{при}\quad s\in[0,2\pi],\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}M=D_\xi\vec x(t,\vec\xi\,),\qquad\varrho(t,s)=\frac{1}{|\partial_s\vec r(t,s)|}=\frac{1}{\partial_s S(t,s)},\\ U=\partial_\alpha(\alpha W(\alpha,\beta/\alpha)),\qquad V=\partial_\beta(\alpha W(\alpha,\beta/\alpha)),\\ \vec a=\frac{\partial_s\vec r}{|\partial_s\vec r|},\quad\vec b=\frac{\partial_s\vec a}{|\partial_s\vec a|},\quad\alpha=|\partial_s\vec r|,\quad\beta=|\partial_s\vec a|,\quad\Omega=\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2\colon\xi_2\leqslant0\}.\end{gathered}$$

Запишем уравнения (28) в координатах Эйлера. Заметим, что, поскольку при фиксированном t функция $\vec r(t,s)$ есть 2π-периодическая функция, с помощью новой неизвестной функции — угла деформации $\theta(t,s)$ — векторы $\vec a$ и $\vec b$ можно представить в следующем виде:

$$\vec a=\cos\theta\;\vec i+\sin\theta\;\vec j,\qquad\vec b=-\sin\theta\;\vec i+\cos\theta\;\vec j,$$

при этом $\partial_s\theta=\beta=|\partial_s\vec a|$.

Обозначим через S дуговую абсциссу на кривой Γ_t. Тогда

$$\Gamma_t = \{\vec{y}\colon\ \vec{y} = \vec{x}(t,S) \equiv \vec{r}(t, s(S,t))\}.$$

Так как $|\partial_S \vec{x}(t,S)| = 1$, то S является переменной Эйлера. Следовательно, выражения для скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$, плотности $\rho = \rho(\vec{x},t)$ и угла деформации $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(S,t)$ упругой мембраны имеют вид

$$\vec{u}(\vec{x},t)\big|_{\vec{x}=\vec{x}(t,S)} = \partial_t \vec{r}(t,s)\big|_{s=s(S,t)},$$

$$\rho(\vec{x},t)\big|_{\vec{x}=\vec{x}(t,S)} = \varrho(t,s)\big|_{s=s(S,t)},$$

$$\tilde{\theta}(S,t) = \theta(t,s)\big|_{s=s(S,t)}.$$

Введем обозначения

$$\vec{s}(S,t) = \vec{a}(t,s)\big|_{s=s(S,t)} = \cos(\tilde{\theta}(S,t))\,\vec{i} + \sin(\tilde{\theta}(S,t))\,\vec{j},$$

$$\vec{n}(S,t) = \vec{b}(t,s)\big|_{s=s(S,t)} = -\sin(\tilde{\theta}(S,t))\,\vec{i} + \cos(\tilde{\theta}(S,t))\,\vec{j}.$$

В силу кинематического условия на свободной границе имеем

$$\varrho\,\partial_t^2\,\vec{r}(t,s)\big|_{s=\mathrm{const}} = \rho\,(\partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla_x \vec{u}\,)\big|_{\vec{x}=\mathrm{const}}.$$

Легко заметить, что

$$\alpha(t,s)^{-1}\big|_{s=s(S,t)} = \rho(\vec{x},t)\big|_{\vec{x}=\vec{x}(t,S)} = \partial_S s(S,t), \quad \beta(t,s)\big|_{s=s(S,t)} = \partial_S \tilde{\theta}(S,t)\,\rho(\vec{x},t)^{-1}\big|_{\vec{x}=\vec{x}(t,S)}.$$

Отметим, что параметризация $s = s(S,t)$ выбрана таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\partial_S\big|_{S=\mathrm{const}} = \frac{1}{\alpha}\,\partial_s\big|_{s=\mathrm{const}}.$$

Далее для сокращения записи вместо $\partial_S f$ используется обозначение f'. Следовательно,

$$\frac{1}{\alpha}\,\partial_s\Big(U\vec{a} - \frac{\partial_s V}{\alpha}\,\vec{b}\Big) = (P\vec{s} - Q'\vec{n}\,)',$$

где $P(\rho,\tilde{\theta}') = \partial_1 E(1/\rho, \tilde{\theta}'/\rho)$; $Q(\rho,\tilde{\theta}') = \partial_2 E(1/\rho, \tilde{\theta}'/\rho)$; ∂_1, ∂_2 — дифференцирование по первому и второму аргументам соответственно.

Аналогично тому как были получены уравнения для задачи Б, получаем следующие уравнения. Уравнение движения для мембраны в эйлеровых координатах принимает вид

$$\rho\big(\partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla_x\,\vec{u}\,\big) - (P\vec{s} - Q'\vec{n}\,)' + \rho g\vec{j} = (p(\vec{x},t) + C(t))\vec{n}, \qquad \vec{x} = \vec{x}(t,S). \tag{29а}$$

Функция ρ удовлетворяет закону сохранения массы

$$\partial_t \rho + \vec{u}\cdot\nabla_x \rho + \rho\,\mathrm{div}_{\Gamma_t}\,\vec{u} = 0 \qquad \text{при} \quad \vec{x} = \vec{x}(t,S). \tag{29б}$$

Давление p и скорость жидкости $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x},t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial_t \vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla_x \vec{v} + \nabla_x p + g\vec{j} = 0, \qquad \mathrm{div}_x\,\vec{v} = 0,$$

где $t \in (0,T)$; $\vec{x}$ принадлежит криволинейной полуплоскости, ограниченной кривой $\vec{x} = \vec{x}(t,S)$. Тогда уравнение связи (условие отсутствия отрыва) имеет вид

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = \vec{v}\cdot\vec{n}, \qquad \vec{x} = \vec{x}(t,S).$$

7. Стационарная задача. Предположим, что искомые функции в эйлеровых координатах не зависят от t. Поскольку на свободной границе $\vec{u}\cdot\vec{n} = \vec{v}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{x} = \vec{x}(S)$, скорость мембраны можно задать как произведение касательного вектора и неизвестной скалярной функции $\tilde{u} = \tilde{u}(S)$:

$$\vec{u}\circ\vec{x}(S) = \tilde{u}(S)\vec{s}(S).$$

Тогда закон сохранения массы (29б) принимает вид

$$(\tilde{\rho}\tilde{u})'(S) = 0, \tag{30а}$$

где $\tilde{\rho}(S) = \rho\circ\vec{x}(S)$.

В свою очередь уравнение (29а) имеет вид

$$\tilde{\rho}\tilde{u}(\tilde{u}\vec{s})' - (P\vec{s} - Q'\vec{n})' + \tilde{\rho}g\vec{j} = (p(\vec{x}(S), t) + C(t))\vec{n}.$$

С учетом того что $\vec{n}' = -\tilde{\theta}'\vec{s}$, $\vec{s} = \tilde{\theta}'\vec{n}$, в проекциях уравнение (29а) записывается в виде

$$\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{u}' - P' - Q'\tilde{\theta}' + \tilde{\rho}g\sin\tilde{\theta} = 0; \tag{30б}$$

$$\tilde{\rho}\tilde{u}^2\tilde{\theta}' - P\tilde{\theta}' + Q'' + \tilde{\rho}g\cos\tilde{\theta} = p(\vec{x}(S)) + C. \tag{30в}$$

Уравнения (30а), (30б) допускают два интеграла. Первый интеграл следует из закона сохранения массы

$$\tilde{\rho}(S)\tilde{u}(S) = C_1 = \mathrm{const}\,.$$

Учитывая общий вид функций P и Q

$$P(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}') = \partial_1 E\Big(\frac{1}{\tilde{\rho}}, \frac{\tilde{\theta}'}{\tilde{\rho}}\Big), \qquad Q(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}') = \partial_2 E\Big(\frac{1}{\tilde{\rho}}, \frac{\tilde{\theta}'}{\tilde{\rho}}\Big),$$

выражение $P' + Q'\tilde{\theta}'$ можно свернуть как $\tilde{\rho}\Psi'$, где

$$\Psi(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}') = \frac{1}{\tilde{\rho}}\,\partial_1 E\Big(\frac{1}{\tilde{\rho}}, \frac{\tilde{\theta}'}{\tilde{\rho}}\Big) + \frac{\tilde{\theta}'}{\tilde{\rho}}\,\partial_2 E\Big(\frac{1}{\tilde{\rho}}, \frac{\tilde{\theta}'}{\tilde{\rho}}\Big) - E\Big(\frac{1}{\tilde{\rho}}, \frac{\tilde{\theta}'}{\tilde{\rho}}\Big).$$

Поскольку $\vec{x}(S) = (x_1(S), x_2(S))$, $x_2'(S) = \sin\tilde{\theta}(S)$, уравнение (30б) можно записать в виде

$$\tilde{\rho}\,\frac{d}{dS}\Big(\frac{1}{2}\,\tilde{u}^2 + \Psi(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}') + gx_2\Big) = 0,$$

откуда следует второй интеграл

$$\tilde{u}^2/2 = C_2 - \Psi(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}') - gx_2.$$

8. Закон Бернулли. На свободной границе $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(S)$ имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \tilde{\rho}(S)\tilde{u}(S) = C_1, \\ u(S)^2 = C_2 - 2\Psi(\tilde{\rho}(S), \tilde{\theta}'(S)) - 2gx_2(S); \end{gathered} \tag{31а}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(S)\tilde{u}(S)^2\tilde{\theta}'(S) + (P(\tilde{\rho}(S), \tilde{\theta}'(S))\tilde{\theta}'(S))' - (Q(\tilde{\rho}(S), \tilde{\theta}'(S)))'' + {}& \\ + \tilde{\rho}(S)g\cos\tilde{\theta}(S) = p(\boldsymbol{x}(S)) + C,& \end{aligned} \tag{31б}$$

где S — длина дуги; $\tilde{\theta}'(S)$ — кривизна. Разрешая алгебраическую систему (31а) относительно величин $\tilde{\rho}$, $\tilde{u}$ и подставляя их в (31б), можно получить одно динамическое условие, связывающее кривизну границы $\tilde{\theta}'$ с давлением p.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильгамов М. А.** Введение в нелинейную гидроупругость. М.: Наука, 1991.
2. **Toland J. F.** Heavy hydroelastic travelling waves // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 2007. V. 463. P. 2371–2397.
3. **Friesecke G., James R., Muller S.** A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from three dimensional elasticity // Comm. Pure Appl. Math. 2002. V. 35, N 11. P. 1461–1506.
4. **Willmore T.** Total curvature in Riemannian geometry. N. Y.: John Wiley and Sons, 1982.
5. **Иванова-Каратопраклиева И., Марков П. Е., Сабитов И. Х.** Изгибание поверхностей. 3 // Фундам. и прикл. математика. 2006. Т. 12. С. 3–56.
6. **Capovilla R., Guven J.** Stresses in lipid membranes // J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 6233–6247.
7. **Antman S. S.** Nonlinear problems of elasticity. N. Y.: Springer-Verlag, 1995.

Поступила в редакцию 30/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 3/X 2007 г.