

УДК 517.9, 532.5

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПЕРИСТАЛЬТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙДА В ГИБКОМ КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА

М. Ф. Эль-Сайед<sup>\*,\*\*</sup>, М. Х. Хорун<sup>\*,\*\*\*</sup>, Д. Р. Мостафа<sup>\*</sup>

\* Университет Аин Шамс, 11566 Каир, Египет

\*\* Университет Куассим, 51452 Бурайдах, Саудовская Аравия

\*\*\* Университет Тайбах, 41911 Янбу, Саудовская Аравия

E-mails: mfahmye@yahoo.com, hassanbaky@yahoo.com, dodyyasser017@yahoo.com

Исследовано влияние вертикального переменного электрического поля и теплообмена на перистальтическое течение несжимаемой диэлектрической вязкоупругой жидкости в симметричном гибком канале. Представлены результаты математического моделирования, полученные с учетом взаимодействия электрического поля, поля течения и температуры. Для небольших значений волновых чисел получено решение модельной задачи для возмущений. Обсуждено влияние на перистальтическое течение определяющих параметров. Показано, что при увеличении электрического числа Рэлея, чисел Рейнольдса и Вейссенберга вероятность появления возвратного течения увеличивается вблизи нижней границы канала и уменьшается вблизи его верхней границы, а при увеличении температурного параметра и числа Вейссенберга наблюдается противоположный эффект. Также показано, что при увеличении электрического числа Рэлея размер области возвратного течения уменьшается на верхней границе канала и увеличивается на его нижней границе, при увеличении температурного параметра имеет место противоположный эффект. Установлено, что размер этой области в случае жидкости Олдройда меньше, чем в случае ньютоновской жидкости.

**Ключевые слова:** перистальтическое течение, переменное электрическое поле, электрогидродинамика, теплообмен, гибкий канал, явление захвата.

**Введение.** Перистальтическое течение жидкости, вызванное волной сужения и расширения области вдоль растягиваемой трубки, содержащей жидкость, имеет место во многих процессах, например при переносе мочи от почки до мочевого пузыря, пищи через пищевод и пищеварительный тракт, яйца в женской фаллопиевой трубе, химуса в желудочно-кишечном тракте, крови в небольших кровеносных сосудах, в аппарате искусственного дыхания и др. Математический анализ перистальтического течения в двумерной формулировке представлен в работах [1–3], исследования в которых проводились при различных упрощающих предположениях о длине волны, числе Рейнольдса, волновом числе, амплитудном отношении и т. д. Исследовались математические модели, в которых рассматривалась периодическая синусоидальная волна в бесконечно длинном двумерном симметричном канале или осесимметричной трубке, содержащих ньютоновскую или неньютоновскую жидкость [4–11]. Задачи решались как в неподвижной системе отсчета,

так и в системе отсчета волны, перемещающейся с постоянной скоростью, что упрощает исследование, сводя его к случаю стационарных волнистых стенок. Также изучалось перистальтическое течение с учетом теплообмена [12–15] вследствие широкого применения этого течения в биогидроаэромеханике.

Электрогидродинамика занимается исследованием взаимодействия электрического поля и поля течения. Такое взаимодействие имеет место во многих приложениях (увеличение скорости сушки, уменьшение лобового сопротивления, работа плазменных активаторов и газовых насосов). Уравнения движения электрогидродинамики можно разделить на две группы: гидродинамические уравнения и уравнения Максвелла. Связь этих двух систем уравнений проявляется также в граничных условиях. Электрогидродинамическое течение теоретически исследовано в работе [16]. Задача о возникновении конвективной неустойчивости в горизонтальном слое диэлектрической жидкости при одновременном воздействии вертикального переменного электрического поля и вертикального градиента температуры исследована в [15, 17], а также в работах [18, 19], в которых учитывается влияние пористой среды.

Целью настоящей работы является изучение влияния вертикального электрического поля и вертикального температурного градиента на перистальтический поток несжимаемой вязкоупругой диэлектрической жидкости в бесконечном гибком канале при малых значениях волнового числа. Функция тока, распределение температуры и значение электрического потенциала определены до второго порядка малости по электрическому числу Рэлея, температурному параметру, числу Рейнольдса, амплитудному отношению, волновому числу и ширине канала. При этом предполагалось, что компоненты скорости, градиент давления, температуру и электрический потенциал можно разложить в регулярный ряд по возмущению амплитудного отношения, учитывалась нелинейность уравнений движения. В случае когда электрическое число Рэлея, температурный параметр, время релаксации и время запаздывания стремятся к нулю, аналитические результаты аналогичны результатам для ньютоновской жидкости [4].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим симметричный двумерный канал, имеющий постоянную ширину  $2d$  и заполненный вязкоупругой несжимаемой диэлектрической жидкостью, модель которой разработана Дж. Олдройдом. Будем полагать, что бесконечная синусоидальная волна перемещается вдоль стенки (рис. 1). Температуры  $\theta_{00}$ ,  $\theta_{10}$  на нижней и верхней стенках соответственно поддерживаются постоянными. Помимо температурного градиента на канал оказывает воздействие вертикальное переменное электрическое поле. Нижняя стенка заземлена, на верхней стенке сохраняется электрический потенциал  $\varphi_{10}$ .

Материальное уравнение для стенки канала имеет вид

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) S = \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) A, \quad (1)$$

где  $S$  — девиатор тензора напряжений;  $\lambda_1$  — время релаксации;  $\lambda_2 < \lambda_1$  — время запаздывания;  $\mu$  — динамическая вязкость;

$$A = \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T \quad (2)$$

тензор скорости деформации;  $\mathbf{V} = (u, v, 0)$  — скорость жидкости; членами второго порядка малости в выражениях для  $S$  и  $\mathbf{V}$  пренебрегается.

В предположении, что плотность жидкости  $\rho$  является постоянной (поскольку вертикальным течением, возникающим вследствие плавучести, пренебрегается), уравнение неразрывности запишем в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Используем также уравнение движения

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot S + \mathbf{f}_e, \quad (3)$$

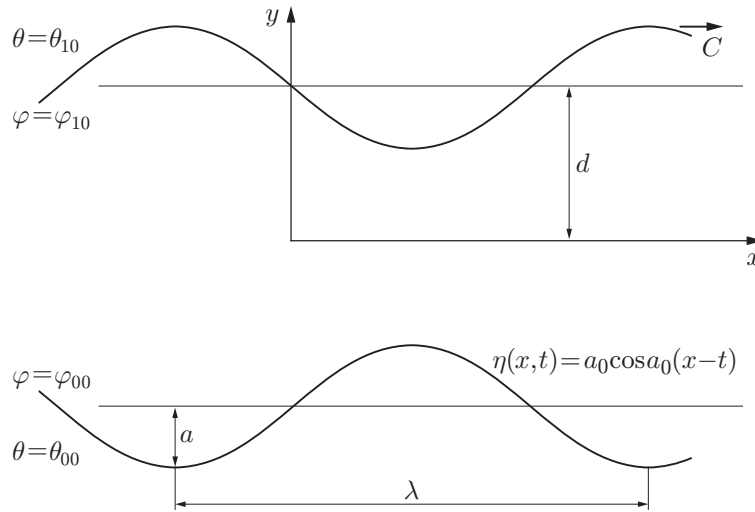


Рис. 1. Схема рассматриваемой задачи

где  $p$  — давление;  $\mathbf{f}_e$  — массовые силы, порожденные электромагнитным полем и приходящиеся на единичный объем [20]:

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 \right), \quad (4)$$

$\mathbf{E}$  — электрическое поле;  $\rho_e$  — плотность свободного заряда;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость. Первым членом в (4) пренебрегается, так как плотность свободного заряда можно принять равной нулю, а последний член включить в выражение для члена давления.

В пренебрежении членами диссипации [21] уравнение энергии принимает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta = k \nabla^2 \theta,$$

где  $\theta$  — температура;  $k = K/(\rho c)$  — температуропроводность;  $K$  — теплопроводность;  $c$  — теплоемкость.

Поскольку свободный заряд отсутствует, уравнения Максвелла [22] имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \end{aligned}$$

( $\varphi$  — электрический потенциал).

Обозначим вертикальные смещения верхней и нижней стенок через  $\eta$  и  $-\eta$  соответственно. Геометрию поверхности стенки зададим выражением

$$\eta = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left( x - \frac{kt}{d} \right),$$

где  $a$  — амплитуда волны;  $\lambda$  — длина волны;  $k/d$  — скорость волны; горизонтальное смещение положим равным нулю. Тогда граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \theta = \theta_{10}, \quad \varphi = \varphi_{10} \quad \text{при} \quad y = d + \eta, \\ u &= 0, \quad v = -\frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \theta = \theta_{00}, \quad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad y = -d - \eta. \end{aligned}$$

Уравнение (3) запишем в форме

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) (-\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{f}). \quad (5)$$

Подставляя соотношение (1) в уравнение (5), получаем

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla p + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla \cdot \mathbf{A} + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{f}_e. \quad (6)$$

С учетом (2), (4) уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial u}{\partial t} = & -\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right) - E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right); \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial v}{\partial t} = & -\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right) - E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right). \quad (8) \end{aligned}$$

Будем полагать, что диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  является функцией температуры [17]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [1 - e(\theta - \theta_{00})] \quad (9)$$

( $e$  — коэффициент теплового расширения, полагаемый малой величиной;  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная в вакууме).

Подставляя уравнение (9) в (7), (8), получаем

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial u}{\partial t} = & -\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \\ & + \frac{\varepsilon_0 e}{2} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial v}{\partial t} = & -\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \\ & + \frac{\varepsilon_0 e}{2} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial y}, \end{aligned}$$

где

$$p^* = p - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 —$$

модифицированное давление.

Управляющие уравнения, записанные через функции тока  $\psi(x, y, t)$ , принимают вид

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} = & -\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial x}\right) + \\ & + \frac{\varepsilon_0 e}{2} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} &= \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x}\right) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon_0 e}{2} \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= k \nabla^2 \theta, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left([1 - e(\theta - \theta_{00})] \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned}$$

и имеют граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2\pi ak}{d\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(x - \frac{kt}{d}\right), \quad \theta = \theta_{10}, \quad \varphi = \varphi_{10} \quad \text{при} \quad y = d + \eta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{2\pi ak}{d\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(x - \frac{kt}{d}\right), \quad \theta = \theta_{00}, \quad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad y = -(d + \eta). \end{aligned}$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры [17]:

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{d}, \quad \bar{y} = \frac{y}{d}, \quad \bar{u} = \frac{ud}{k}, \quad \bar{v} = \frac{vd}{k}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{d}, \quad \bar{t} = \frac{kt}{d^2}, \quad \bar{p}^* = \frac{p^* d^2}{\rho k^2}, \\ \bar{\theta} = \frac{\theta}{\beta d}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{E_0 d}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{k}, \quad \gamma = \frac{L}{L_2 \text{Re}}. \end{aligned}$$

Здесь  $L = \varepsilon_0 E_0^2 d^2 (e\beta d)^2 / (\rho \nu k)$  — электрическое число Рэлея;  $L_2 = e\beta d$ ;  $\beta = (\theta_{00} - \theta_{10}) / (2d)$  — положительный градиент температуры;  $\text{Re} = \nu / k$  — число Рейнольдса.

Управляющие уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \left(1 + W_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= -\left(1 + W_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + W_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \left(1 + W_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \left(1 + W_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} &= \left(1 + W_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(1 + W_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \left(1 + W_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \nabla^2 \theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left([1 + e\theta_{00} - L_2 \theta] \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0$$

и имеют граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -a_0 \alpha_0 \sin \alpha_0 (x - t), \quad \theta = \frac{\theta_{10}}{\beta d}, \quad \varphi = \frac{\varphi_{10}}{E_0 d} \quad \text{при} \quad y = 1 + \eta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = a_0 \alpha_0 \sin \alpha_0 (x - t), \quad \theta = \frac{\theta_{00}}{\beta d}, \quad \varphi = 0 \quad \text{при} \quad y = -(1 + \eta) \end{aligned} \quad (11)$$

( $\eta = a_0 \cos \alpha_0 (x - t)$ ;  $a_0 = a/d$  — амплитудное отношение;  $\alpha_0 = 2\pi d/\lambda$  — волновое число;  $W_1, W_2$  — числа Вейссенберга).

**2. Метод решения.** Предположим, что безразмерные величины, функцию тока  $\psi$ , модифицированное давление  $p^*$ , температуру  $\theta$  и электрический потенциал  $\varphi$  можно разложить в ряды по степеням  $a_0$  аналогично тому, как это сделано в работе [4]:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + a_0\psi_1 + a_0^2\psi_2 + \dots, & p^* &= p_0^* + a_0p_1^* + a_0^2p_2^* + \dots, \\ \theta &= \theta_0 + a_0\theta_1 + a_0^2\theta_2 + \dots, & \varphi &= \varphi_0 + a_0\varphi_1 + a_0^2\varphi_2 + \dots.\end{aligned}\quad (12)$$

Подставляя соотношения (12) в уравнения (10), (11) и сохраняя члены с одинаковыми степенями  $a_0$ , получаем три системы связанных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями для  $\psi_0$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ . Первая система дифференциальных уравнений для  $\psi_0$  описывает стационарное состояние, и в случае отсутствия перистальтического течения (это означает, что жидкость в отсутствие перистальтических волн покоится) решение данной задачи имеет вид

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0,$$

$$\theta_0(y) = -y + \frac{\theta_{00} + \theta_{10}}{2\beta d}, \quad \varphi_0(y) = -\frac{a_1}{L_2} \ln(h + L_2y), \quad p_0^*(y) = \frac{\gamma a_1^2}{2L_2(h + L_2y)} + b_0.$$

Здесь  $b_0$  — произвольная постоянная;  $L_2 = e\beta d = -e(\theta_{10} - \theta_{00})/2$ ;  $a_1 = -\varphi_{10}L_2/(E_0d \ln(1 + 2L_2))$ ;  $h = 1 + L_2$ .

Решениями второй и третьей систем дифференциальных уравнений для  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  с соответствующими граничными условиями являются выражения

$$\begin{aligned}\psi_1 &= [F_1(y) e^{i\alpha_0(x-t)} + F_1^*(y) e^{-i\alpha_0(x-t)}]/2, \\ \varphi_1 &= [E_1(y) e^{i\alpha_0(x-t)} + E_1^*(y) e^{-i\alpha_0(x-t)}]/2, \\ \theta_1 &= [T_1(y) e^{i\alpha_0(x-t)} + T_1^*(y) e^{-i\alpha_0(x-t)}]/2, \\ \psi_2 &= [F_{20}(y) + F_{22}(y) e^{2i\alpha_0(x-t)} + F_{22}^*(y) e^{-2i\alpha_0(x-t)}]/2, \\ \varphi_2 &= [E_{20}(y) + E_{22}(y) e^{2i\alpha_0(x-t)} + E_{22}^*(y) e^{-2i\alpha_0(x-t)}]/2, \\ \theta_2 &= [T_{20}(y) + T_{22}(y) e^{2i\alpha_0(x-t)} + T_{22}^*(y) e^{-2i\alpha_0(x-t)}]/2\end{aligned}$$

(знак “\*” означает комплексно-сопряженное число).

Получаем уравнения

$$\begin{aligned}(1 - iW_2\alpha_0) \frac{d^4 F_1(y)}{dy^4} + (2W_2i\alpha_0^3 + (-2 + W_1 \operatorname{Re})\alpha_0^2 + i\alpha_0 \operatorname{Re}) \frac{d^2 F_1(y)}{dy^2} - \\ - \frac{(W_1\alpha_0^2 + i\alpha_0)\gamma \operatorname{Re} a_1}{h + L_2y} \frac{dE_1(y)}{dy} + (-i\alpha_0^5 W_2 + (1 - W_1 \operatorname{Re})\alpha_0^4 - i\alpha_0^3 \operatorname{Re}) F_1(y) - \\ - (W_1\alpha_0^2 + i\alpha_0) \frac{\gamma a_1^2 \operatorname{Re} L_2 T_1(y)}{(h + L_2y)^3} = 0, \\ \frac{d^2 T_1(y)}{dy^2} - (\alpha_0^2 - i\alpha_0) T_1(y) - i\alpha_0 F_1(y) = 0,\end{aligned}\quad (13)$$

$$\frac{d}{dy} \left( (h + L_2y) \frac{dE_1(y)}{dy} + \frac{a_1 L_2 T_1(y)}{h + L_2y} \right) = 0$$

с граничными условиями

$$\frac{dF_1}{dy}(\pm 1) = 0, \quad F_1(\pm 1) = \pm 1,$$

$$T_1(\pm 1) = \pm 1,$$

$$E_1(-1) = -a_1, \quad E_1(1) = a_1/(1 + 2L_2),$$

а также уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^3 F_{20}}{dy^3}(y) &= \frac{i\alpha_0}{2} \left( \frac{a_1 \gamma}{h + L_2 y} T_1(y) \frac{dE_1^*(y)}{dy} - \frac{a_1 \gamma}{h + L_2 y} T_1^*(y) \frac{dE_1(y)}{dy} \right), \\ \frac{d^2 T_{20}(y)}{dy^2} &= \frac{i\alpha_0}{2} \left( \frac{dF_1^*(y)}{dy} T_1(y) - \frac{dF_1(y)}{dy} T_1^*(y) - \frac{dT_1^*(y)}{dy} F_1(y) - \frac{dT_1(y)}{dy} F_1^*(y) \right), \quad (14) \\ \frac{d}{dy} \left[ (h + L_2 y) \frac{dE_{20}(y)}{dy} - \frac{L_2}{2} \left( \frac{dE_1(y)}{dy} T_1^*(y) + T_1(y) \frac{dE_1^*(y)}{dy} \right) + \frac{a_1 L_2 T_{20}(y)}{h + L_2 y} \right] &= 0, \\ (1 - 2i\alpha_0 W_2) \frac{d^4 F_{22}(y)}{dy^4} + (2i\alpha_0 \text{Re} + (-8 + 4 \text{Re} W_1) \alpha_0^2 + 16i\alpha_0^3 W_2) \frac{d^2 F_{22}(y)}{dy^2} + \\ &+ (-8i\alpha_0^3 \text{Re} + 16(1 + \text{Re} W_1) \alpha_0^4 - 32iW_2 \alpha_0^5) F_{22}(y) + \gamma \text{Re} (i\alpha_0 + 2\alpha_0^2 W_1) \times \\ &\times \left[ -\frac{a_1}{2(h + L_2 y)} T_1(y) \frac{d^2 E_1(y)}{dy^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dE_1(y)}{dy} \right)^2 + \frac{a_1}{2(h + L_2 y)} \frac{dT_1(y)}{dy} \frac{dE_1(y)}{dy} + \right. \\ &\left. + \frac{a_1 L_2}{2(h + L_2 y)^2} T_1(y) \frac{dE_1(y)}{dy} - \frac{2a_1}{h + L_2 y} \frac{dE_{22}(y)}{dy} - \frac{2a_1^2 L_2 T_{22}(y)}{(h + L_2 y)^3} \right] = 0, \\ \frac{d^2 T_{22}(y)}{dy^2} + (-4\alpha_0^2 + 2i\alpha_0) T_{22}(y) - \frac{i\alpha_0}{2} \left( T_1(y) \frac{dF_1(y)}{dy} - F_1(y) \frac{dT_1(y)}{dy} \right) - 2i\alpha_0 F_{22}(y) &= 0, \\ \frac{d}{dy} \left( (h + L_2 y) \frac{dE_{22}(y)}{dy} + \frac{a_1 L_2 T_{22}(y)}{h + L_2 y} - \frac{L_2}{2} \frac{dE_1(y)}{dy} T_1(y) \right) &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{dF_{20}}{dy}(\pm 1) &= \mp \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 F_1(\pm 1)}{dy^2} + \frac{d^2 F_1^*(\pm 1)}{dy^2} \right), \\ T_{20}(\pm 1) &= \mp \frac{1}{2} \left( \frac{dT_1(\pm 1)}{dy} + \frac{dT_1^*(\pm 1)}{dy} \right), \quad (15) \\ E_{20}(-1) &= -\frac{a_1 L_2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dE_1(-1)}{dy} + \frac{dE_1^*(-1)}{dy} \right), \\ E_{20}(1) &= -\frac{a_1 L_2}{2(h + L_2)} - \frac{1}{2} \left( \frac{dE_1(1)}{dy} + \frac{dE_1^*(1)}{dy} \right); \\ \frac{dF_{22}}{dy}(\pm 1) &= \mp \frac{1}{2} \frac{d^2 F_1(\pm 1)}{dy^2}, \quad F_{22}(\pm 1) = \mp \frac{1}{4} \frac{dF_1(\pm 1)}{dy}, \\ T_{22}(\pm 1) &= \mp \frac{1}{2} \frac{dT_1(\pm 1)}{dy}, \\ E_{22}(-1) &= -\frac{a_1 L_2}{4} + \frac{1}{2} \frac{dE_1(-1)}{dy}, \quad E_{22}(1) = -\frac{a_1 L_2}{4(h + L_2)} - \frac{1}{2} \frac{dE_1(1)}{dy}. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (13) ищем в виде

$$\begin{aligned} F_1(y) &= F_{10}(y) + \alpha_0 F_{11}(y) + \alpha_0^2 F_{12}(y) + \dots, \\ E_1(y) &= E_{10}(y) + \alpha_0 E_{11}(y) + \alpha_0^2 E_{12}(y) + \dots, \\ T_1(y) &= T_{10}(y) + \alpha_0 T_{11}(y) + \alpha_0^2 T_{12}(y) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (16) в уравнения (13), получаем

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{1}{2}(-y^3 + 3y), \quad T_{10} = y, \quad E_{10} = \frac{a_1 y}{h + L_2 y}, \\ F_{11} &= c_1 y^5 + c_2 y^3 + c_3 y^2 + c_4 y + c_5 - c_6 (h + L_2 y)^2 \ln(h + L_2 y), \\ T_{11} &= -\frac{i}{120}(3y^5 - 10y^3 + 7y), \\ E_{11} &= \frac{1}{480L_2^4(h + L_2 y)}(c_7 y^5 + c_8 y^4 + c_9 y^3 + c_{10} y^2 + c_{11} y + c_{12}) - c_{13} \ln(h + L_2 y). \end{aligned}$$

Здесь  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 13$ ) — константы, определяемые из граничных условий следующим образом:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{i \operatorname{Re}}{40}, \quad c_2 = \frac{i \operatorname{Re}}{40L_2^4}(-2L_2^4 + 10a_1^2 L_2 \gamma + 10a_1^2 L_2^2 \gamma - 5a_1^2(1 + 2L_2)\gamma \ln(1 + 2L_2)), \\ c_3 &= \frac{i \operatorname{Re}}{40L_2^4}(10a_1^2 L_2^2 \gamma + 10a_1^2 L_2(1 + 2L_2)\gamma \ln(1 + 2L_2)), \\ c_4 &= \frac{i \operatorname{Re}}{40L_2^4}(L_2^4 - 10a_1^2 L_2 \gamma - 10a_1^2 L_2^2 \gamma + 15a_1^2(1 + 2L_2)\gamma \ln(1 + 2L_2) + 20a_1^2 L_2(1 + 2L_2)\gamma \ln(1 + 2L_2)), \\ c_5 &= \frac{i \operatorname{Re}}{40L_2^4}(-10a_1^2 L_2^2 \gamma + 10a_1^2(1 + 2L_2)\gamma \ln(1 + 2L_2) + 10a_1^2 L_2(1 + 2L_2)\gamma \ln(1 + 2L_2)), \\ c_6 &= ia_1^2 \operatorname{Re} / (2L_2^4), \quad c_7 = 3ia_1 L_2^4, \quad c_8 = ia_1(-5L_2^3 - 5L_2^4), \quad c_9 = ia_1(10L_2^2 + 20L_2^3 - 10L_2^4), \\ c_{10} &= ia_1(-30L_2 - 90L_2^2 - 30L_2^3 + 30L_2^4), \quad c_{11} = ia_1(-60 - 300L_2 - 450L_2^2 - 140L_2^3 + 87L_2^4), \quad \dots \end{aligned}$$

Подобные результаты получены также для функций  $F_{12}$ ,  $E_{12}$ ,  $T_{12}$  (в данной работе не представлены).

Поскольку целью настоящей работы является определение среднего течения, в разложении  $\psi_2$  важны только члены  $F_{20}(y)$ ,  $T_{20}(y)$ ,  $E_{20}(y)$ . Таким образом, из дифференциальных уравнений (14) и граничных условий (15) получаем соотношения

$$\begin{aligned} F_{20}(y) &= a_2 + \alpha_0^2(c_{45}y^6 + c_{46}y^5 + c_{47}y^4 + c_{48}y^3 + (c_{49} + c_{50} \ln(h + L_2 y))y^2 + \\ &\quad + (c_{87} + c_{52} \ln(h + L_2 y))y + c_{53} \ln(h + L_2 y)), \\ T_{20}(y) &= \alpha_0^2(-y^9/720 + c_{58}y^7 + c_{59}y^5 + (c_{60} + c_{61} \ln(h + L_2 y))y^4 + (c_{62} + c_{63} \ln(h + L_2 y))y^3 + \\ &\quad + (c_{64} + c_{65} \ln(h + L_2 y))y^2 + c_{86}y + (c_{67} + c_{68} \ln(h + L_2 y))), \\ E_{20}(y) &= \alpha_0^2(c_{69}y^8 + c_{70}y^7 + c_{71}y^6 + c_{72}y^5 + c_{73}y^4 + (c_{74} + c_{75} \ln(h + L_2 y))y^3 + \\ &\quad + (c_{76} + c_{77} \ln(h + L_2 y))y^2 + c_{78}y + c_{83} + c_{85} \ln(h + L_2 y) + c_{84}/(h + L_2 y)^2 + c_{82}/(h + L_2 y)), \end{aligned}$$

где  $a_2$  — произвольная постоянная; константы  $c_i$  ( $i = 45, 46, \dots, 87$ ) определены из граничных условий. Таким образом, получаем следующие соотношения:



— для осредненной по времени скорости

$$\begin{aligned} \bar{U}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(y, t) dt = u_0 + \frac{a_0^2}{2} F'_{20}(y) = \frac{a_0^2}{2} \left\{ \alpha_0^2 \left[ 6c_{45}y^5 + 5c_{46}y^4 + 4c_{47}y^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 3c_{48} + \frac{c_{50}L_2}{h + L_2y} \right) y^2 + \left( 2c_{49} + \frac{c_{52}L_2}{h + L_2y} + 2c_{50} \ln(h + L_2y) \right) y + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( c_{87} + \frac{c_{53}L_2}{h + L_2y} + c_{52} \ln(h + L_2y) \right) \right] \right\}; \end{aligned}$$

— для осредненной по времени температуры

$$\begin{aligned} \bar{T}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(y, t) dt = \theta_0 + \frac{a_0^2}{2} T_{20} = -y + \frac{L_2 + e\theta_{10}}{L_2} + \frac{a_0^2}{2} \left\{ \alpha_0^2 \left[ -\frac{y^9}{720} + \right. \right. \\ \left. \left. + c_{58}y^7 + c_{59}y^5 + (c_{60} + c_{61} \ln(h + L_2y))y^4 + (c_{62} + c_{63} \ln(h + L_2y))y^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + (c_{64} + c_{65} \ln(h + L_2y))y^2 + c_{86}y + (c_{67} + c_{68} \ln(h + L_2y)) \right] \right\}; \end{aligned}$$

— для осредненного по времени электрического потенциала

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(y, t) dt = \varphi_0 + \frac{a_0^2}{2} E_{20} = -\frac{a_1 \ln(h + L_2y)}{L_2} + \\ + \frac{a_0^2}{2} \left[ \alpha_0^2 \left( c_{69}y^8 + c_{70}y^7 + c_{71}y^6 + c_{72}y^5 + c_{73}y^4 + (c_{74} + c_{75} \ln(h + L_2y))y^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + (c_{76} + c_{77} \ln(h + L_2y))y^2 + c_{78}y + c_{83} + c_{85} \ln(h + L_2y) + \frac{c_{84}}{(h + L_2y)^2} + \frac{c_{82}}{h + L_2y} \right) \right]. \end{aligned}$$

**3. Обсуждение результатов расчетов.** Для того чтобы изучить влияние различных параметров, используемых при анализе, на перистальтическое течение, вычислены средние скорость, температура и электрический потенциал при различных значениях этих параметров. Наиболее значимые результаты компьютерных вычислений приведены на рис. 2–8.

**3.1. Характеристики перистальтического течения.** На рис. 2–4 показано изменение средней скорости при различных значениях электрического числа Рэлея  $L$ , температурного параметра  $L_2$  и числа Вейссенберга  $W_1$ . Видно, что вероятность возникновения области возвратного течения увеличивается вблизи нижней границы канала и уменьшается вблизи его верхней границы при увеличении  $L$  и уменьшении  $L_2$  и  $W_1$ . Решение нулевого порядка аналогично решению для ньютоновского течения. Для того чтобы показать неньютоновское перистальтическое течение, были изучены решения высшего порядка. Результаты показывают, что решение второго порядка существенно зависит от значения числа Вейссенберга и область возвратного течения в случае ньютоновской жидкости меньше, чем в случае жидкости Олдройда.

**3.2. Формирование области возвратного течения.** В процессе течения жидкости формируется область возвратного течения, ограниченная замкнутыми линиями тока и движущаяся вперед вместе с перистальтической волной. Влияние электрического числа Рэлея  $L$  на область возвратного течения показано на рис. 5. Видно, что при увеличении  $L$  эта область уменьшается на верхней границе канала и увеличивается на его нижней границе. На рис. 6 показано влияние на данную область температурного параметра  $L_2$ . Видно, что

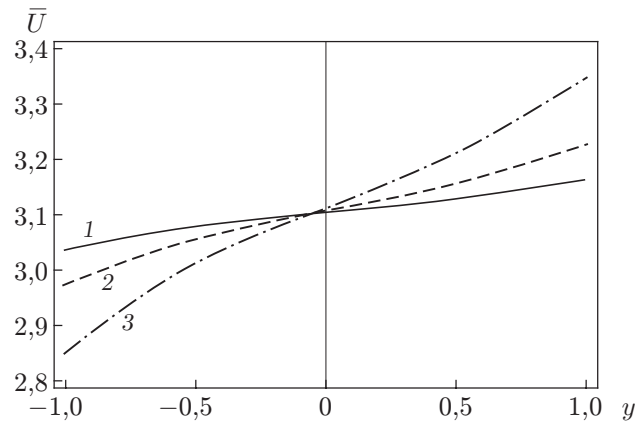


Рис. 2. Распределение средней скорости  $\bar{U}$  по координате  $y$  при  $Re = 1,5$ ,  $\alpha_0 = 0,5$ ,  $L_2 = 0,3$ ,  $W_1 = 0,04$ ,  $W_2 = 0,003$ ,  $a_1 = 0,001$  и различных значениях электрического числа Рэлея:

1 —  $L = 4,8747 \cdot 10^6$ , 2 —  $L = 9,7646 \cdot 10^6$ , 3 —  $L = 1,9208 \cdot 10^7$

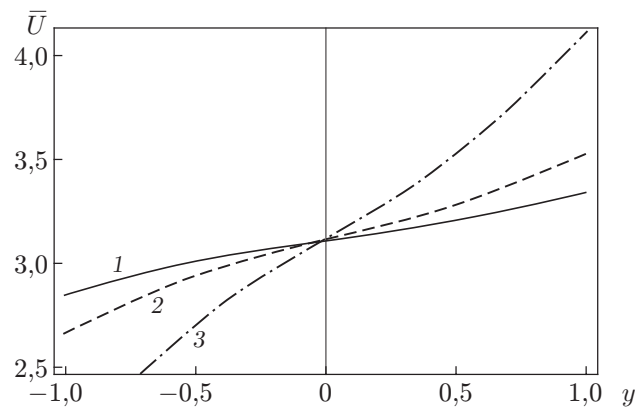


Рис. 3. Распределение средней скорости  $\bar{U}$  по координате  $y$  при  $Re = 1,5$ ,  $\alpha_0 = 0,5$ ,  $L = 1,9208 \cdot 10^7$ ,  $W_1 = 0,04$ ,  $W_2 = 0,003$ ,  $a_1 = 0,001$  и различных значениях температурного параметра:

1 —  $L_2 = 0,30$ , 2 —  $L_2 = 0,20$ , 3 —  $L_2 = 0,10$

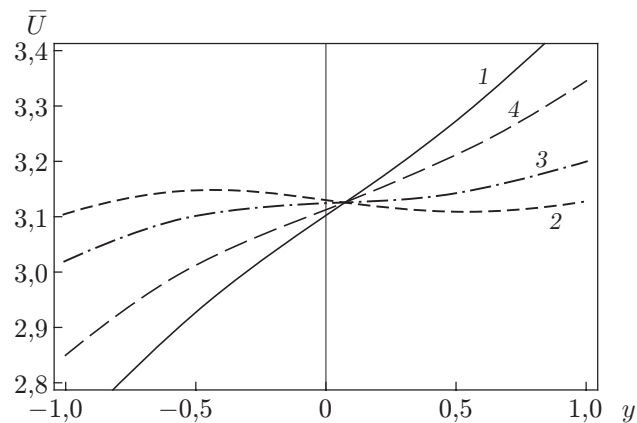


Рис. 4. Распределение средней скорости  $\bar{U}$  по координате  $y$  при  $Re = 1,5$ ,  $\alpha_0 = 0,5$ ,  $L = 1,9208 \cdot 10^7$ ,  $L_2 = 0,3$ ,  $W_2 = 0,003$ ,  $a_1 = 0,001$  и различных значениях числа Вейссенберга:

1 —  $W_1 = W_2 = 0$ , 2 —  $W_1 = 0,10$ , 3 —  $W_1 = 0,08$ , 4 —  $W_1 = 0,04$

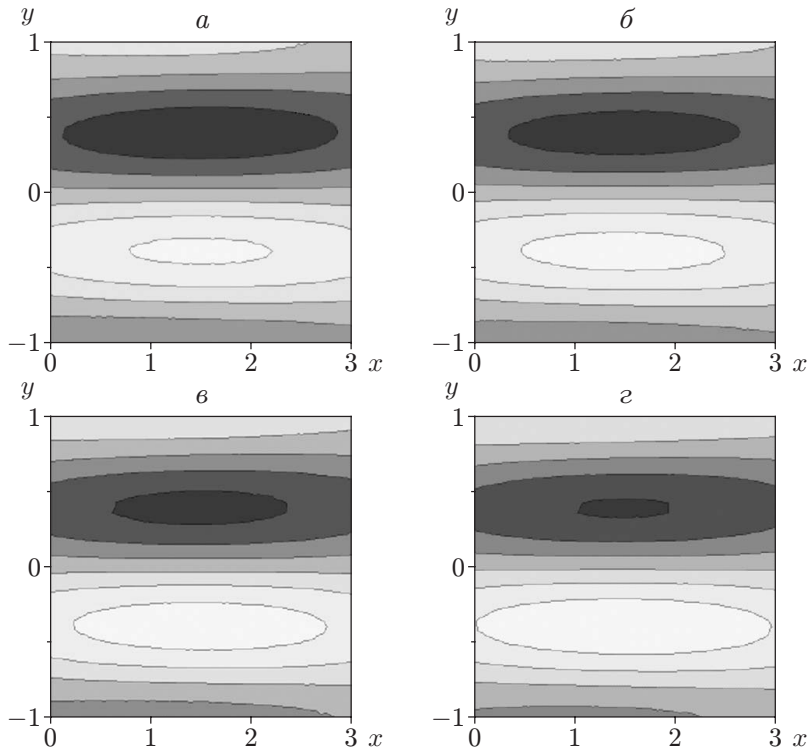


Рис. 5. Линии тока и поле функции тока течения при  $\alpha_0 = 0,5$ ,  $L_2 = 0,08$ ,  $Re = 200$ ,  $a_0 = 0,001$ ,  $t = 1$ ,  $a_1 = 0,0011$ ,  $a_2 = 2$ ,  $W_1 = 0,04$ ,  $W_2 = 0,003$  и различных значениях электрического числа Рэлея:

$a - L = 1,2 \cdot 10^3$ ,  $б - L = 1,3 \times 10^3$ ,  $в - L = 1,4 \cdot 10^3$ ,  $г - L = 1,5 \cdot 10^3$

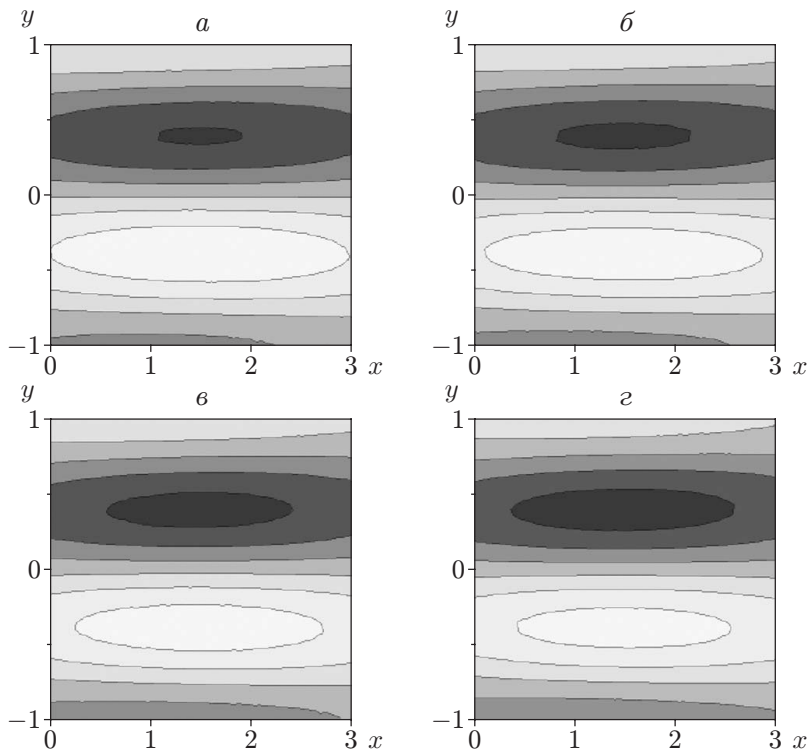


Рис. 6. Линии тока и поле функции тока течения при  $\alpha_0 = 0,5$ ,  $W_1 = 0,04$ ,  $W_2 = 0,003$ ,  $L = 1,1040 \cdot 10^3$ ,  $Re = 200$ ,  $a_0 = 0,001$ ,  $t = 1$ ,  $a_1 = 0,0011$ ,  $a_2 = 2$  и различных значениях температурного параметра:

$a - L_2 = 0,115$ ,  $б - L_2 = 0,117$ ,  $в - L_2 = 0,120$ ,  $г - L_2 = 0,218$

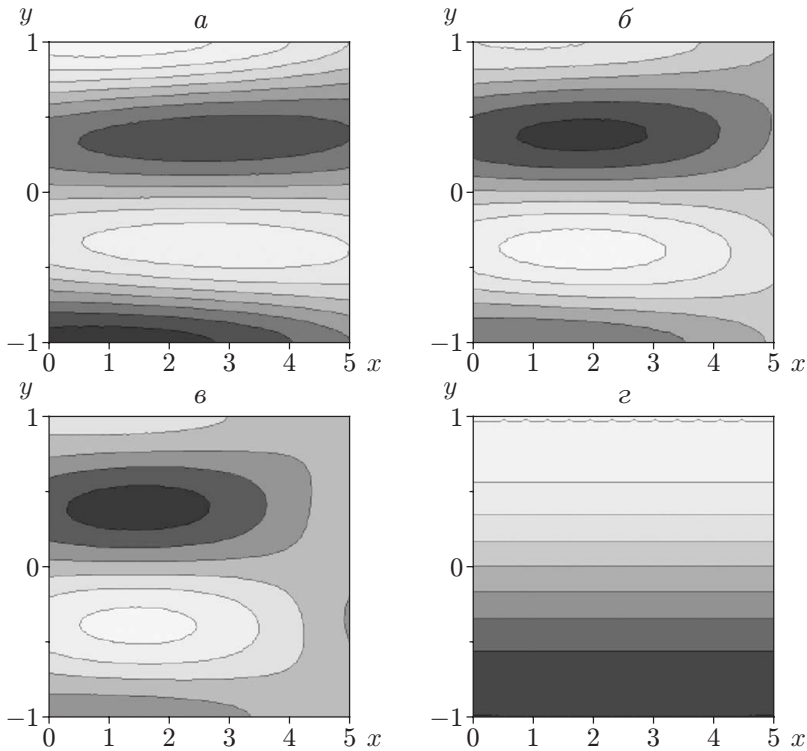


Рис. 7. Линии тока и поле функции тока течения при  $L_2 = 0,1$ ,  $L = 1,1040 \cdot 10^3$ ,  $W_1 = 0,04$ ,  $W_2 = 0,003$ ,  $Re = 200$ ,  $a_0 = 0,001$ ,  $t = 1$ ,  $a_1 = 0,0011$ ,  $a_2 = 2$  и различных значениях волнового числа:  
 $a - \alpha_0 = 0,3$ ,  $б - \alpha_0 = 0,4$ ,  $в - \alpha_0 = 0,5$ ,  $г - \alpha_0 = 0$

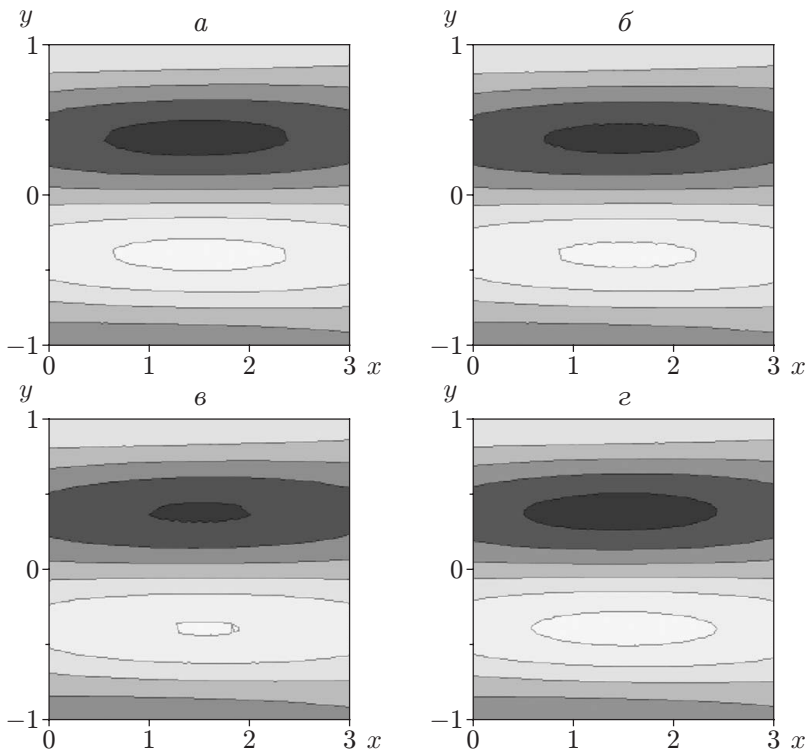


Рис. 8. Линии тока и поле функции тока течения при  $L_2 = 0,1$ ,  $\alpha_0 = 0,5$ ,  $L = 1,1040 \cdot 10^5$ ,  $W_2 = 0,00008$ ,  $Re = 200$ ,  $a_0 = 0,01$ ,  $t = 1$ ,  $a_1 = 0,0011$ ,  $a_2 = 2$  и различных значениях числа Вейссенберга:  
 $a - W_1 = 0,1$ ,  $б - W_1 = 0,4$ ,  
 $в - W_1 = 0,8$ ,  $г - W_1 = W_2 = 0$

при увеличении  $L_2$  область увеличивается на верхней границе канала и уменьшается на его нижней границе. Влияние волнового числа  $\alpha_0$  на данную область показано на рис. 7. Видно, что при  $\alpha_0 = 0$  области возвратного течения жидкости не существует, при  $\alpha_0 \neq 0$  ее размер уменьшается при увеличении волнового числа  $\alpha_0$ . Влияние числа Вейссенберга  $W_1$  на область возвратного течения показано на рис. 8: при увеличении параметра  $W_1$  область уменьшается. Также на рис. 8 видно, что в случае жидкости Олдройда размер данной области меньше, чем в случае ньютоновской жидкости. Аналогичные результаты получены для различных значений чисел Рейнольдса  $Re$  и Вейссенберга  $W_2$ .

**Заключение.** Представлен теоретический подход к изучению влияния электрического числа Рэлея и температурного параметра на перистальтическое течение вязкоупругой диэлектрической жидкости в двумерных гибких каналах, вызванное наличием вертикального переменного электрического поля, теплообмена и динамическими смещениями верхней и нижней стенок. С использованием разложения по волновому числу получено аналитическое решение вплоть до второго порядка малости. Исследовано влияние волнового числа, электрического числа Рэлея, температурного параметра, амплитудного отношения, чисел Рейнольдса и Вейссенберга на среднюю скорость и область возвратного течения. Установлено, что при увеличении параметров  $L$ ,  $Re$ ,  $W_2$  и уменьшении  $L_2$ ,  $W_1$  вероятность возникновения области возвратного течения увеличивается вблизи нижней границы канала и уменьшается вблизи его верхней границы. Показано, что решение нулевого порядка аналогично решению для ньютоновского течения, решение второго порядка существенно зависит от значений числа Вейссенберга. Также установлено, что вблизи нижней границы канала вероятность возникновения области возвратного течения увеличивается с увеличением  $\alpha_0$ , в то время как в остальной части канала вероятность возникновения области возвратного течения уменьшается с увеличением  $\alpha_0$ . При увеличении  $L$  и уменьшении  $L_2$  размер области возвратного течения уменьшается на верхней границе канала и увеличивается на его нижней границе. Кроме того, размер области возвратного течения в случае жидкости Олдройда меньше, чем в случае ньютоновской жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Latham T. W.** Fluid motion in a peristaltic pump: MS thesis. Cambridge, 1966.
2. **Burns J. C., Parkes T.** Peristaltic motion // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29. P. 731–743.
3. **Shapiro A. H., Jaffrin M. Y., Weinberg S. L.** Peristaltic pumping with long wave lengths at low Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 37. P. 799–825.
4. **Fung Y. C., Yih C. S.** Peristaltic transport // *J. Appl. Mech.* 1968. V. 35. P. 669–675.
5. **Haroun M. H.** Effect of relaxation and retardation time on peristaltic transport of Oldroydian viscoelastic fluid // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2005. V. 46, N 6. P. 842–850.
6. **Haroun M. H.** Effect of Deborah number and phase difference on peristaltic transport of a third-order fluid in an asymmetric channel // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2007. V. 12. P. 1464–1480.
7. **Haroun M. H.** Non-linear peristaltic flow of a fourth grade fluid in an inclined asymmetric channel // *Comput. Mater. Sci.* 2007. V. 39. P. 324–333.
8. **Hayat T., Wang Y., Hutter K., et al.** Peristaltic transport of an Oldroyd-B fluid in a planner channel // *Math. Problems Engng.* 2004. V. 4. P. 347–376.
9. **Hayat T., Khan M., Siddiqui A. M., Asghar S.** Non-linear peristaltic flow of a non-Newtonian fluid under effect of a magnetic field in a planner channel // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2007. V. 12. P. 910–919.
10. **Tripathi D., Pandey S. K., Das S.** Peristaltic flow of viscoelastic fluid with fractional Maxwell model through a channel // *Appl. Math. Comput.* 2010. V. 215. P. 3645–3654.

11. **Tripathi D.** Peristaltic transport of viscoelastic fluid in a channel // Acta Astronaut. 2011. V. 68. P. 1379–1385.
12. **Hayat T., Hina S.** The influence of wall properties on the MHD peristaltic flow of a Maxwell fluid with heat and mass transfer // Nonlinear Anal.: Real World Applicat. 2010. V. 11. P. 3155–3169.
13. **Hayat T., Hina S., Ali N.** Effects of slip and heat transfer on the peristaltic flow // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 312–321.
14. **Kothandapani M., Srinivas S.** Peristaltic transport in an asymmetric channel with heat transfer // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2008. V. 35. P. 514–522.
15. **Takashima M.** The stability of a rotating layer of the Maxwell liquid heated from below // J. Phys. Soc. Japan. 1970. V. 29. P. 1061–1068.
16. **Woodson H. H.** Electromechanical dynamics / H. H. Woodson, J. R. Melcher. N. Y.: John Wiley and sons, 1968.
17. **Takashima M., Ghosh A. K.** Electrohydrodynamic instability of viscoelastic liquid layer // J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 47. P. 1717–1722.
18. **El-Sayed M. F.** Onset of electroconvective instability of Oldroydian viscoelastic liquid layer in Brinkman porous medium // Arch. Appl. Mech. 2008. V. 78. P. 211–224.
19. **El-Sayed M. F.** Thermohydrodynamic instability of viscous rotating dielectric fluid layer in porous medium with vertical ac electric field // Special Topics Rev. Porous Media. 2010. V. 1. P. 15–29.
20. **Landau L. D.** Electrodynamics of continuous media / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. N. Y.: The Macmillan co., 1960.
21. **Tropea C.** Hand book of experimental fluid mechanics / C. Tropea, A. L. Yarin, J. F. Foss. Berlin: Springer, 2007.
22. **Wolfgang K. H.** Classical electricity and magnetism / K. H. Wolfgang, M. Phillips. S. l.: Addison-Wesley publ. co., 1955.

*Поступила в редакцию 19/III 2012 г.,  
в окончательном варианте — 7/XII 2012 г.*

---