

торного масла значение $K = 0,269$, для автола $K = 0,06$. Применительно к $Q_{к2}$ значения K равны соответственно 0,452 и 0,3.

Для капельного истечения из неподвижного капилляра известна эмпирическая формула, представляющая зависимость критического расхода Q_k от вязкости жидкости μ : с увеличением μ критический расход Q_k убывает [1, 2]. Приведенные выше значения Q_k и K для трансформаторного масла и автола указывают на существование аналогичной зависимости Q_k от μ при распылении жидкости зубчатым диском.

В технических применениях «монодисперсный» распылитель тем более совершенен, чем меньше (при прочих равных условиях) размер образуемых им капель, чем меньше относительное количество капель-спутников и чем больше критический расход жидкости Q_k . Из приведенных данных видно, что по всем этим показателям зубчатый диск предпочтительнее, чем круглый.

Как было показано, формула (3), выведенная для процесса капания жидкости с остря, сохраняет справедливость (при замене g на $g\omega^2$) и для распыления жидкости зубчатым диском. Это подтверждает наличие аналогии между этими двумя процессами.

Поступила 12 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Дунский В. Ф., Никитин Н. В. О переходе от капельного истечения жидкости к струйному истечению. — ПМТФ, 1974, № 5.
2. Дунский В. Ф., Никитин Н. В., Соколов М. С. Монодисперсные аэрозоли. М., Наука, 1975.
3. Южный З. М. К микроскопическому определению размера капель масляных туманов. — Коллоид. журнал, 1956, т. 20.

УДК 532.593

ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ, ГЕНЕРИРУЕМЫЕ ДВИЖЕНИЕМ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА И СИММЕТРИЧНОГО КРЫЛА

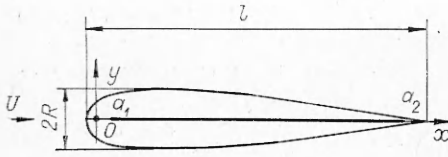
В. И. Букреев
(Новосибирск)

В двухслойной устойчиво стратифицированной по плотности жидкости экспериментально изучены параметры волн, возникающих на границе раздела при равномерном горизонтальном движении кругового цилиндра и симметричного крылового профиля в верхнем слое. Измерения выполнены в диапазоне плотностных чисел Фруда $1 < Fr \leq 10$

$$(1) \quad Fr = U^2(2 + \varepsilon)/\varepsilon gR,$$

где U — скорость движения тела; $2R$ — его максимальный поперечный размер; $\varepsilon = \rho_2/\rho_1 - 1$; ρ_1, ρ_2 — плотность жидкости в верхнем и нижнем слоях; g — ускорение силы тяжести.

Полученные экспериментальные данные сопоставлены с результатами расчетов на основе линейной теории внутренних волн в невязкой стратифицированной жидкости [1—3]. Найдено, что длины волн достаточно хорошо предсказываются этой теорией. Такой же результат был получен и в ранее опубликованных работах [4—6]. Что же касается амплитуд волн,



Фиг. 1

то их расчет в рамках теории идеальной жидкости дает заниженные значения, поскольку при этом не учитываются дополнительные возмущения, связанные с трением и отрывом потока от тела.

Используется связанная с телом система координат, показанная на фиг. 1 (в случае кругового цилиндра ее начало располагалось в центре круга). Все линейные размеры, а именно: координата x , отклонение границы раздела от состояния покоя η , длина волны L и ее амплитуда η_m , толщина верхнего H_1 и нижнего H_2 слоев жидкости, расстояние h от оси x до границы раздела, а также волновое число $k = 2\pi/L$ — отнесены к характерному размеру тела R .

Опыты выполнялись в лотке с прозрачными стенками длиной 120 см, шириной 20 см и высотой 30 см. Верхний слой представлял собой водопроводную воду, нижний — раствор глицерина в воде с плотностью ρ_2 от 1,005 до 1,015 г/см³. Круговой цилиндр имел радиус $R = 1$ см. Число Рейнольдса $Re = 2RU/\nu$ в опытах с ним изменялось от 400 до 1500. Крыло имело поперечное сечение, показанное на фиг. 1. В идеальной жидкости вносимое им возмущение имитируется комбинацией точечного источника интенсивности q , помещенного в начале координат, и равномерно распределенного между точками a_1, a_2 стока той же суммарной интенсивности q [7]. В данных опытах использовалось крыло с параметрами $q/2\pi RU = 0,5$, $a_1/R = 0,5$, $a_2/R = 10,8$, $l/2R = 6$, $R = 0,5$ см. Число Рейнольдса в опытах с ним менялось от 250 до 800.

Тела приводились в состояние равномерного движения и останавливались в конце пути практически мгновенно (по сравнению с периодом внутренних волн). Нижний слой жидкости в опытах подкрашивался. Параметры волн определялись по фотоснимкам, сделанным в те моменты времени, когда картина волн становилась стационарной (в системе координат, связанной с телом) и еще не происходило отражения волн от торцевых стенок лотка. Погрешности случайного характера при определении параметров волн в данных опытах оцениваются значениями коэффициентов вариации и составляют около 15%.

По упомянутой выше теории волны на границе раздела при больших x становятся моногармоническими

$$(2) \quad \eta = \eta_m \sin(kx + \varphi).$$

Величина k в (2) не зависит от h и от формы тела. Она определяется дисперсионным соотношением [8]

$$(3) \quad \frac{U^2}{gR} = \frac{1}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \operatorname{cth} kH_1 + \rho_2 \operatorname{cth} kH_2},$$

которое при больших H_1, H_2 и с учетом (1) принимает вид

$$(4) \quad L = 2\pi/k = 2\pi Fr.$$

Соответствующие этой теории асимптотические формулы для амплитуд η_m и начальных фаз колебаний φ , справедливые при больших x, h, H_1, H_2 , имеют вид для цилиндра

$$(5) \quad \eta_m = \frac{4\pi k}{2 + \varepsilon} e^{-kh}, \quad \varphi = 0;$$

для крыла

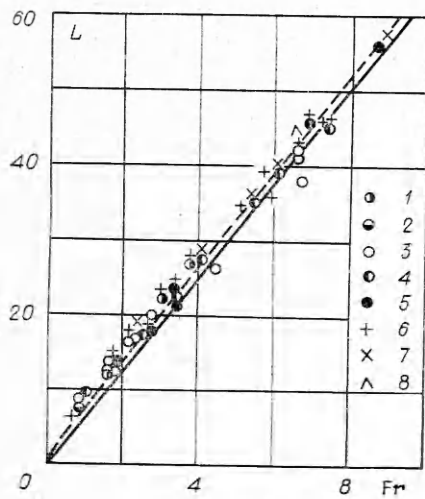
$$(6) \quad \eta_m = \frac{2q}{UR(2 + \varepsilon)} e^{-kh} \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(B/A),$$

где

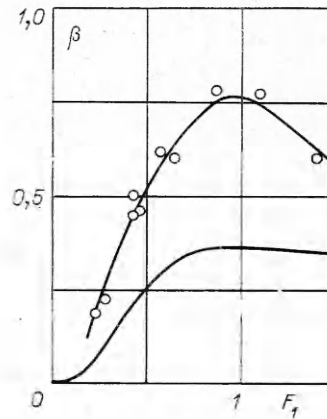
$$A = 1 - \frac{\sin ka_2 - \sin ka_1}{k(a_2 - a_1)}; \quad B = \frac{\cos ka_2 - \cos ka_1}{k(a_2 - a_1)}.$$

Значения x , H_1 , H_2 , начиная с которых становятся справедливыми формулы (4) — (6), оценивались по результатам численных расчетов, выполненных В. А. Сухаревым по методу [3]. Так, по расчетам для крыла при $Fr = 9$ длина волны, определенная по расстоянию между первым и вторым гребнями (считая от тела), отличалась от асимптотической всего лишь на 0,9%, а значение η_m , определенное по первому гребню, отличалось от асимптотического только на 0,3%. При $Fr = 3$ имели место столь же малые отличия в длинах и амплитудах волн от их асимптотических значений, начиная со второго гребня. Эти результаты расчетов согласуются по порядку величины с экспериментальными данными.

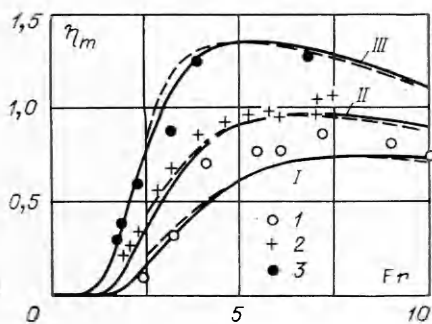
В опытах значения H_1 , H_2 были не менее 24. При этом длины волн, вычисленные с использованием формул (3) и (4), отличаются друг от друга при $Fr = 10$ меньше чем на 1%. При $Fr < 10$ это отличие еще меньше. Расчеты показали также, что в рассмотренном в опытах диапазоне значений Fr , H_1 , H_2 с хорошей точностью применимы и асимптотические формулы (5), (6) для амплитуд волн. Значения h , начиная с которых справедливы формулы (5), (6), можно оценить по полученным экспериментальным данным. Этот вопрос подробнее обсуждается ниже.



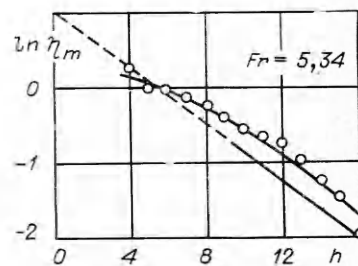
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг.



Фиг. 5

В опытах со смешивающимися жидкостями неизбежно имеет место некоторый размыв границы раздела. Влияние этого фактора изучалось также путем численных расчетов на ЭВМ, выполненных по методу [3] В. А. Сухаревым. При этом зависимость $\rho(y)$ описывалась интегральной функцией ошибок со средним значением, соответствующим $y = -h$, и среднеквадратичным значением σ . Влияние размытости границы раздела показано на фиг. 2, 3, где наряду со сплошными кривыми, соответствующими формулам (4), (6), приведены штриховые кривые, которые были получены в результате расчета при значении $\sigma/R = 0,167$, типичном для данных опытов.

Наиболее существенное различие в условиях проведения опытов и расчетов по формулам (3) — (6) связано с вязкостью реальной жидкости. С одной стороны, вязкость приводит к затуханию волн. Это влияние вязкости проявляется лишь на больших расстояниях от тела, и в данной работе оно было за пределами точности измерений. С другой стороны, при буксировке тела в вязкой жидкости в поток вносится импульс, равный силе сопротивления тела и особенно заметный при наличии отрыва потока от тела. Это влияние вязкости и является главной причиной расхождения расчетных и экспериментальных данных для амплитуд волн.

Сказанное выше иллюстрируется фиг. 2—5. На фиг. 2 приведены данные для длин волн. Цифры 1, 2, 3 — экспериментальные точки, полученные в опытах с цилиндром при его буксировке на расстояниях $h = 2$; 3; 4 соответственно, 4—8 — экспериментальные точки для крыла при $h = 2$; 4; 6; 8 и 10 соответственно.

Экспериментальные и расчетные амплитуды волн, генерируемых движением кругового цилиндра, сопоставляются на фиг. 4. В этом случае заменой

$$\beta = \frac{2 + \varepsilon}{4\pi} \eta_m h, \quad F_1 = F\Gamma/h$$

экспериментальные и расчетные данные при различных $F\Gamma$ и h удается представить в виде функций от одной переменной

$$\beta_a = \beta_a(F_1), \quad \beta_p = \beta_p(F_1).$$

Но из-за отмеченного выше влияния вязкости функции β_a (верхняя кривая на фиг. 4) и β_p (нижняя кривая на фиг. 4) сильно отличаются друг от друга. Тот факт, что экспериментальные точки на фиг. 4 ложатся на одну универсальную кривую, подтверждает экспоненциальный характер зависимости η_m от h для цилиндра вплоть до $h = 2$.

В случае крылового профиля экспоненциальная зависимость η_m от h подтверждается в опытах лишь при $h > 10$, т. е. при h больше, чем примерно l . Поэтому преобразование функции двух переменных в функцию одной переменной, возможное и для формулы (6), не приводит к соответствующей универсальности для экспериментальных данных во всем исследованном диапазоне h . Для крылового профиля экспериментальные амплитуды волн сопоставляются с расчетными на фиг. 3 и 5. На фиг. 3 приведена зависимость η_m от $F\Gamma$ при $h = 8$; 6 и 4 (точки I—3 и кривые I—III соответственно), а на фиг. 5 — зависимость η_m от h при $F\Gamma = 5,34$. Из фиг. 3—5 видно, что для плохо обтекаемого кругового цилиндра экспериментально полученные амплитуды волн могут превышать расчетные более чем в 2 раза. Для удобообтекаемого крылового профиля расхождение между экспериментальными и расчетными данными не превышало 25%.

Автор выражает благодарность А. В. Гусеву, Ю. М. Лыткину, И. В. Стуровой, В. А. Сухареву за большую помощь в работе.

Поступила 23 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Войцения В. С. О поступательном движении тела над поверхностью раздела двух жидкостей.— Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1963, № 2.
2. Стурова И. В. Волновые движения, возникающие в жидкости со ступенчатой стратификацией, при обтекании погруженного тела.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 6 (№ 3). Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1975.
3. Стурова И. В., Сухарев В. А. Плоская задача о волновых движениях, возникающих в непрерывно стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4.
4. Драутон, Чен. Обтекание тел в канале жидкостью с поперечным градиентом плотности.— Теор. основы инж. расчетов, 1972, № 1.
5. Гураль Т. И., Ершов О. А., Сориц А. Г., Фоменко Б. А. Исследование полей температуры и концентрации методом голографической интерферометрии.— В кн.: Тепломассообмен. Т. 10. Киев, Наукова думка, 1976.
6. Некрасов В. Н., Трохан А. М., Чашечкин Ю. Д. Генерация внутренних волн в плоскостной среде равномерно движущимся гидродинамическим источником (трехмерная задача).— В кн.: Теория дифракции и распространения волн. Краткие тезисы докл. Т. III. М., 1977.
7. Кочин А. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М., Физматгиз, 1963.
8. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М., Мир, 1977.

УДК 532.5.013.2+532.51.511 : 519.34+532.531

**ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ
ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
И ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ
ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Ю. И. Бадрухин, В. В. Кузнецов
(Новосибирск)

При исследовании нестационарных течений со свободной поверхностью известны [1] трудности, связанные с формулировкой задач в традиционных постановках Эйлера или Лагранжа.

Уравнения идеальной несжимаемой жидкости с использованием «потенциалов Клебша» χ , μ , λ можно записать в виде [2, 3]

$$(1) \quad \partial v_i / \partial x_i = 0;$$

$$(2) \quad \partial \mu / \partial t + v_i \partial \mu / \partial x_i = 0;$$

$$(3) \quad \partial \lambda / \partial t + v_i \partial \lambda / \partial x_i = 0,$$

где компоненты скорости v_i выражаются соотношениями

$$(4) \quad v_i = \partial \chi / \partial x_i + \lambda \partial \mu / \partial x_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь и в дальнейшем при написании формул используется правило суммирования по повторяющимся дважды («немым») индексам.

Для давления p существует выражение

$$(5) \quad p = -\rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{1}{2} v_i^2 \right) \quad (i = 1, 2, 3),$$

где ρ — плотность жидкости. При этом поверхности $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ являются вихревыми поверхностями.