

**СПЕКТР ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ  
ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ**

**Г. А. Кузьмин**

(Новосибирск)

Изучается асимптотическое поведение спектральной функции, когда волновое число неограниченно возрастает. Обсуждается возможность применения полученных результатов к изучению заключительного периода вырождения турбулентности.

1. Асимптотическому поведению спектра турбулентности при  $k \rightarrow \infty$ , где  $k$  — волновое число, посвящен ряд работ. В работе [1] рассмотрено поведение мелкомасштабных вихревых возмущений в поле скорости, линейном на расстояниях порядка вязкого масштаба  $\eta \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$ , где  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\varepsilon$  — средняя скорость диссипации энергии. В предположении, что мелкомасштабные вихри не взаимодействуют между собой, а получают энергию непосредственно от возмущений масштабов порядка  $\eta$ , был получен спектр

$$U(k) \sim \exp(-ck^2) \quad (c = \text{const}) \quad (1.1)$$

Этот подход развивался в [2-4]. В работе [5] рассмотрен вид спектра при  $k \rightarrow \infty$  в предположении, что прямые взаимодействия играют главную роль. Полученный результат отличается от (1.1)

$$U(k) \sim (\eta k)^2 \exp(-ck) \quad (1.2)$$

Использование гипотез о спектральном переносе энергии дает серию формул для спектра [6,7], в некоторых случаях совпадающих либо с (1.1), либо с (1.2).

В области больших волновых чисел турбулентность всегда практически однородна и изотропна, поэтому для исследования вида спектра может быть использована «диаграммная техника», выведенная Уайлдом [8]. Как известно, основная трудность в теории турбулентности возникает вследствие незамкнутости цепочки уравнений для моментов. Диаграммная техника позволяет выразить моменты высших порядков через три функции — обобщенный пропагатор, вершину и спектральную функцию [8]. В результате получается система уравнений относительно этих функций, но возникает новая трудность, состоящая в том, что правые части уравнений имеют вид бесконечных рядов. Приближение Крейчмана [5] эквивалентно тому, что в правых частях уравнений составляются лишь первые члены разложения [8].

Спектр в инерциальном интервале отличается при этом от полученного А. Н. Колмогоровым [6], поэтому представляется необходимым изучить влияние последующих членов разложения.

Ниже предполагается, что в области больших волновых чисел ряды сходятся, так что для исследования асимптотического поведения спектра при  $k \rightarrow \infty$  можно ограничиться произвольно большим, но конечным числом членов разложения.

2. Аналогично [8] будем для простоты исходить из модельного уравнения

$$(-i\omega + \nu k^2)v(\mathbf{k}, \omega) = f(\mathbf{k}, \omega) + g \int v(\mathbf{q}, \alpha)v(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \omega - \alpha) d\mathbf{q} d\alpha \quad (2.1)$$

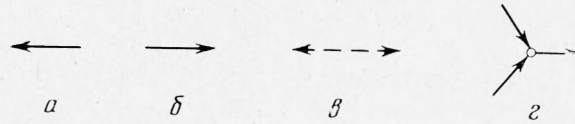
где  $f(\mathbf{k}, \omega)$  — внешняя сила,  $g$  — константа взаимодействия. В п.5 показывается, что все проведенные ниже выкладки справедливы и в том случае, когда за исходное берется уравнение Навье — Стокса. Для дальней-

шего будет удобно несколько изменить графические обозначения, использованные в [8].

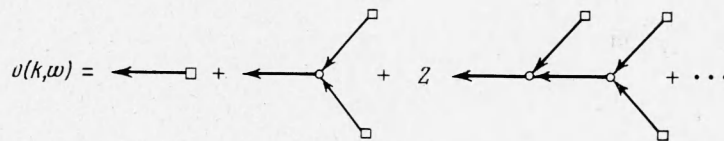
Пропагатору  $S(\mathbf{k}, \omega)$  сопоставим стрелку (фиг. 1, а). Величину  $S(-\mathbf{k}, -\omega)$  обозначим стрелкой в обратную сторону (фиг. 1, б). Рассмотрим величину

$$S(\mathbf{k}, \omega) \langle |f(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle S(-\mathbf{k}, -\omega)$$

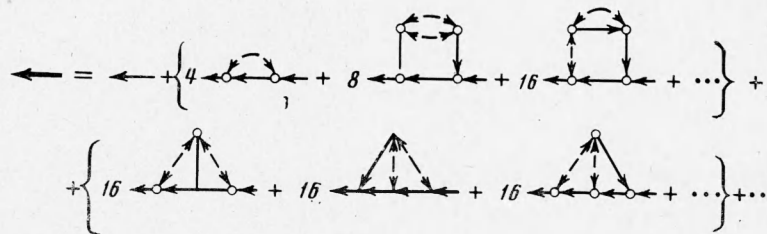
Символ  $\langle \rangle$  обозначает усреднение по ансамблю. Этой величине будем сопоставлять пунктирную линию. В соответствии со сказанным выше ее концам следует придать противоположные направления (фиг. 1, в).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Обозначения вершин — те же, что и в работе [8]. Сопоставим внешней силе  $f(\mathbf{k}, \omega)$  квадратик.

Функция  $v(\mathbf{k}, \omega)$  может быть представлена в виде функционального разложения по возбуждающей силе [8].

В графическом виде оно изображено на фиг. 2. Аналогично могут быть переписаны в обозначениях ряды для обобщенного пропагатора, которому сопоставим жирную стрелку (фиг. 3) спектральной функции и вершин.

Нетрудно видеть, что спектральная функция может быть определена как сумма всевозможных графиков, составленных из элементов фиг. 1 и обладающих двумя выходами.

Рассмотрим момент высшего порядка

$$\langle v(\mathbf{k}_1, \omega_1) v(\mathbf{k}_2, \omega_2) \dots v(\mathbf{k}_n, \omega_n) \rangle$$

Чтобы получить его графическое представление, необходимо выразить здесь  $v(\mathbf{k}_i, \omega_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$  в виде фиг. 2. В результате получим сумму всевозможных графиков, составленных из элементов фиг. 1 и обладающих двумя выходами. Графически моменту  $n$ -го порядка будем сопоставлять заштрихованный кружок с  $n$  выходами (фиг. 4, а). Моменту второго порядка —

спектральной функции — будем сопоставлять жирную пунктирную линию (фиг. 4, б). В силу условий однородности и стационарности турбулентности на импульсы и частоты внешних линий наложено по одному условию вида

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = 0 \quad (2.2)$$

Произведем почленное вариационное дифференцирование ряда фиг. 2 по внешней силе, а полученный результат осредним (определение вариационных производных см., например, в [6]).

При этом получается сумма всевозможных графиков, составленных из элементов фиг. 1, с одним входом и одним выходом. Нетрудно видеть, что именно таким образом может быть определен обобщенный пропагатор  $S'(\mathbf{k}, \omega)$ . Функция  $S'(\mathbf{k}, \omega)$  описывает отклик на бесконечно малое возмущение внешней силы.

Если обозначить через  $F(\mathbf{k}, \omega)$  бесконечно малую, не случайную добавку к полю внешних сил, то осредненный отклик  $u(\mathbf{k}, \omega)$  выразится в линейном приближении формулой

$$u(\mathbf{k}, \omega) = S'(\mathbf{k}, \omega) F(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.3)$$

Этот результат из других соображений был получен Крейчаном [5].

Можно высказать и более общее утверждение: сумме всевозможных графиков с  $m$  входами и  $n$  выходами соответствует  $m$ -кратная вариационная производная от  $n$ -точечного момента поля скорости. Графически такой величине будем сопоставлять заштрихованный прямоугольник с  $m$  входящими линиями и  $n$  выходящими линиями (фиг. 4, в). В каждой вершине сходятся три линии: две из них входят, а одна выходит, и сохраняется импульс и частота. Сумма импульсов входящих линий равна импульсу выходящей линии. То же справедливо и для частот. Отсюда следует соотношение для произвольного графика с  $m$  входящими линиями и  $n$  выходящими линиями.

Если  $\mathbf{k}_i \omega_i$  — импульсы и частоты выходящих линий, а  $\mathbf{p}_j \alpha_j$  — входящих, то

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_m \quad (2.4)$$

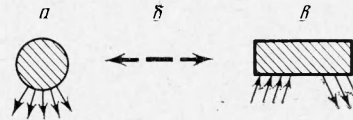
$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \quad (2.5)$$

При этом если график связный, то на его внешние импульсы и частоты наложено лишь по одному условию типа (2.4), (2.5).

Это свойство позволяет доказать утверждение, что импульсы и частоты некоторого числа линий в том и только в том случае связаны между собой, если при их разрыве график распадается на две либо более частей.

Действительно, сохранение импульса и частоты в каждой вершине является единственным ограничением на импульсы и частоты внутренних линий. Поэтому единственно возможна лишь связь типа (2.4), (2.5). Предположим, что импульсы и частоты некоторого числа линий связаны соотношениями типа (2.4), (2.5), но при разрыве этих линий график не распался на части. Тогда можно разорвать еще некоторое число линий так, чтобы график распался на две связные части. Но в этом случае на импульсы и частоты каждой из частей может быть наложено по два условия типа (2.3), (2.4), и, следовательно, приходим к противоречию.

3. Рассмотрим соотношение фиг. 3. В каждом графике в правой части имеется сплошная линия, проходящая через весь график. Просуммируем вначале все графики, в которых эта линия соединяется с остальной частью



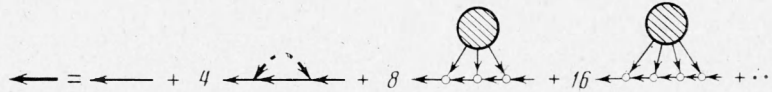
Фиг. 4

графика посредством двух линий, затем графики с тремя соединяющими линиями и т. д. Результат суммирования изображен на фиг. 5.

Заштрихованному кружку с выходами соответствует точечный момент поля скорости. Если обозначить его через  $U(q_1, \alpha_1, q_2, \alpha_2, \dots, q_{n-1}, \alpha_{n-1})$ , то соотношение фиг. 5 может быть переписано в аналитической форме

$$S'(\mathbf{k}, \omega) = S(\mathbf{k}, \omega) + S(\mathbf{k}, \omega) \sum_{n=2}^{\infty} (2g)^n \int U(q_1 \alpha_1 \dots q_{n-1} \alpha_{n-1}) S(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1, \omega + \alpha_1) \times \\ \times S(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \omega + \alpha_1 + \alpha_2) S(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_{n-1}, \omega + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}) \\ d\mathbf{q}_1 d\alpha_1 \dots d\mathbf{q}_{n-1} d\alpha_{n-1} \quad (3.1)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение  $S'(\mathbf{k}, \omega)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Обозначим через  $k^\circ$  — граничный импульс, а через  $\omega^\circ$  — граничную частоту,



Фиг. 5

начиная с которых спектральная функция  $U(k, \omega)$  быстро убывает (например, экспоненциально). Если число Рейнольдса течения достаточно велико, то  $k^\circ, \omega^\circ$  могут быть выражены через вязкий масштаб

$$k^\circ \sim \eta^{-1}, \quad \omega^\circ \sim \nu \eta^{-2}$$

В дальнейшем предполагается, что все функции

$$U(q_1 \alpha_1 \dots q_{n-1} \alpha_{n-1}) \text{ вне области } |q_i| \lesssim k^\circ, |\alpha_i| \lesssim \omega^\circ \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

так, что интегрирование может быть распространено лишь на область, где переменные интегрирования ограничены.

Стоящие под интегралом функции

$$S(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_s, \omega + \alpha_1 + \dots + \alpha_s) \quad (s = 1, 2, \dots, n-1)$$

можно разложить в этой области по малым величинам  $q_i/k, \alpha_i/\nu k^2$  и ограничиться первым членом разложения, равным  $S(\mathbf{k}, \omega)$ .

После этого все множители  $S(\mathbf{k}, \omega)$  можно вынести из-под знака интеграла, а интегрирование распространить до бесконечности.

Используя обратное преобразование Фурье, легко показать, что интегралы пропорциональны величинам  $\langle [v(\mathbf{x}, t)]^n \rangle$ , т. е. одноточечным моментам в пространственно-временном представлении.

В случае однородной изотропной турбулентности  $\langle [v(\mathbf{x}, t)]^n \rangle$  будут ограниченными константами. Соотношение (3.1) переписется в виде

$$S'(\mathbf{k}, \omega) = S(\mathbf{k}, \omega) \{1 + \sum [2(2\pi)^4 g S(\mathbf{k}, \omega)]^n \langle [v(\mathbf{x}, t)]^n \rangle\} \quad (3.2)$$

При  $k \rightarrow \infty$  пропагатор  $S(\mathbf{k}, \omega) \sim 1/\nu k^2$ , поэтому

$$S'(\mathbf{k}, \omega) \approx S(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.3)$$

В случае  $\omega \rightarrow \infty$ , проводя выкладки, аналогичные проделанным, также придем к соотношению (3.2), которое будет иметь вид разложения по малой величине  $\sim 1/\omega$ , и снова получим равенство. (3.3).



Выясним физический смысл формулы (3.3). С использованием уравнения Дайсона [8]

$$S'(\mathbf{k}, \omega) = S(\mathbf{k}, \omega) + S(\mathbf{k}, \omega) \Sigma_1(\mathbf{k}, \omega) S'(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.4)$$

(определение функции  $\Sigma_1(\mathbf{k}, \omega)$  дано в [8]) соотношение (2.3) может быть переписано в виде

$$(-i\omega + \nu k^2) u(\mathbf{k}, \omega) = \Sigma_1(\mathbf{k}, \omega) u(\mathbf{k}, \omega) + F(\mathbf{k}, \omega) \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) имеет вид линейаризованного уравнения (2.1) с дополнительным членом  $\Sigma_1(\mathbf{k}, \omega) u(\mathbf{k}, \omega)$ , который описывает действие турбулентной вязкости. Пренебрежение ею и приводит согласно



Фиг. 6

(3.4) к равенству (3.3). Таким образом, турбулентные пульсации не оказывают влияния на развитие возмущений с волновыми числами  $k \gg k^0$  либо частотой  $\omega \gg \omega^0$ .

Рассмотрим теперь поведение вершинной функции [8]

$$\Gamma(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega')$$

когда импульсы или частоты каких-либо из внешних линий велики. Если импульсы либо частоты всех внешних линий велики, то рассуждения, аналогичные приведенным выше, приводят к формуле

$$\Gamma(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{k}', \omega') \approx g \quad (3.6)$$

Если же импульс и частота какой-либо из входящих линий, например  $k'$ ,  $\omega'$ , малы, но не равны нулю, то (3.6) остается в силе, если дополнительно использовать условие конечности вариационных производных

$$\delta \langle [v(\mathbf{x}, t)]^n \rangle / \delta f(\mathbf{k}', \omega') d\mathbf{k}' d\omega'$$

Ограниченность вариационных производных попросту означает устойчивость спектра в линейном приближении по отношению к возмущениям с волновым числом  $k'$  и частотой  $\omega'$ .

4. На фиг. 6 изображено уравнение [8] для спектральной функции  $U(k, \omega)$ . Будем предполагать, что ряд в правой части уравнения фиг. 6 сходится, так что для исследования асимптотического поведения спектральной функции можно ограничиться некоторым конечным числом членов.

Усложнение графиков происходит по следующему закону: при добавлении пунктирной линии добавляется одно интегрирование, две вершины и две сплошные линии. Число пунктирных линий всегда превышает на единицу число интегрирований, поэтому между импульсами и частотами некоторого числа пунктирных линий обязательно должна существовать связь.

Для выяснения этого вопроса заметим, что в каждом графике, за исключением первого, в правой части уравнения фиг. 6 можно провести единственное сечение такое, что график распадается на две части разрывом лишь пунктирных линий. Внешние линии графика при этом попадают в разные части. Пунктирные линии, которые попали в такое сечение, выделим в класс (а), все остальные пунктирные линии — в класс (б).

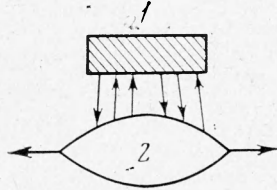
В силу (2.4), (2.5) на импульсы и частоты линий классов (а) наложено по одному условию

$$q_1 + q_2 + \dots + q_l = k, \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_l = \omega \quad (4.1)$$

Здесь  $l$  — число линий класса (а), при этом  $q_i, \beta_i$  — их импульсы и частоты, а  $k, \omega$  — импульс и частота спектральной функции, стоящей в левой части уравнения. Импульсы и частоты линий класса (б) независимы в силу п. 2. Из сказанного следует, что импульсы и частоты пунктирных линий можно взять за переменные интегрирования, но под знак интеграла включить функцию

$$\delta\left(\sum_{i=1}^l q_i - k\right) \delta\left(\sum_{i=1}^l \beta_i - \omega\right) \quad (4.2)$$

Рассмотрим случай  $k \rightarrow \infty$ . В интегралах по импульсам и частотам линий класса (б) можно ограничиться областью, в которой переменные интегрирования ограничены. В интегралах же по  $q_i, \beta_i, i=1, 2, \dots, l$  этого сделать нельзя в силу наличия функции (4.2) под знаком интеграла.



Фиг. 7

Рассмотрим такую область интегрирования, что график может быть разделен на две части, которые соединяются между собой при помощи линий с малыми импульсами и частотами. Всегда можно провести разбиение на две части таким образом, чтобы часть 2 не содержала линий, импульсы которых одновременно малы. Просуммируем все графики, обладающие одинаковой частью 2, одинаковым числом и направлением соединяющих линий, но с различной внутренней структурой части 1. Результат такого суммирования изображен на фиг. 7.

Согласно результатам предыдущего пункта обобщенные вершины и функции отклика части 2 можно заменить на затравочные по формулам (3.3), (3.6). Функции, входящие в часть 2, можно разложить по малым импульсам и частотам соединяющих линий и ограничиться первым членом разложения. После этого часть 2 перестает зависеть от импульсов и частот соединяющих линий, и интегрирование по переменным, от которых зависят части 1 и 2, можно провести независимо.

Обозначим через  $R(k_1, \omega_1, \dots, k_n, \omega_n, p_1, \alpha_1, \dots, p_m, \alpha_m)$  функцию, соответствующую части 1 (фиг. 7). Смысл аргументов — тот же, что и в (2.4), (2.5). Согласно п.2

$$\delta^m \langle v(k_1 \omega_1) \dots v(k_n \omega_n) \rangle = R(k_1 \omega_1 \dots k_n \omega_n; p_1 \alpha_1 \dots p_m \alpha_m) \delta f(p_1 \alpha_1) \dots \delta f(p_m \alpha_m) \quad (4.3)$$

Будем предполагать, что интеграл от функции  $R$  по всем аргументам в ограниченных пределах конечен. Согласно (4.3) это предположение эквивалентно требованию устойчивости величин  $\langle |v(x, t)|^n \rangle$  по отношению к бесконечно малым вариациям внешней силы вида

$$\delta f(p, \alpha) = \kappa \quad \text{при} \quad |p| < p_0, \quad |\alpha| < \alpha_0 \\ \delta f(p, \alpha) = 0 \quad \text{при} \quad |p| > p_0 \quad \text{или} \quad |\alpha| > \alpha_0$$

Здесь  $\kappa$  — некоторая малая константа,  $p_0, \alpha_0$  — некоторые импульсы и частота, удовлетворяющие условиям  $p_0 \ll k, \alpha_0 \ll \nu k^2$ .

В случае  $m = 0$  требование ограниченности интеграла от функции, находящейся в части  $I$ , соответствует условию ограниченности величин  $\langle [v(x, t)]^n \rangle$ .

Легко видеть, что во всех случаях увеличение числа соединяющих линий приводит к увеличению числа линий с большим импульсом либо частотой в части  $\mathcal{Z}$ , поэтому рассмотренный график будет мал по сравнению с некоторым графиком низшего порядка. Из сказанного следует, что в правой части уравнения следует оставить лишь графики, не содержащие линий класса (б), а в интегралах — ограничиться областью, где импульсы либо частоты всех линий велики.

Представим функцию  $U(k, \omega)$  в виде

$$U(k, \omega) = U(k) r(k, \omega) \quad (4.4)$$

где  $r(k, \omega)$  нормирована условием

$$\int r(k, \omega) d\omega = 1 \quad (4.5)$$

Будем искать решение для  $U(k)$  в виде

$$U(k) = \psi(k) \exp[-a(k/k^\circ)^\gamma] \quad (4.6)$$

Здесь  $a, \gamma$  — некоторые константы,  $\psi(k)$  — функция, меняющаяся с изменением  $k$  не быстрее, чем степенным образом. Функция  $r(k, \omega)$  имеет смысл распределения энергии гармоник с волновым числом  $k$  по частотам.

Обозначим через  $\omega_*(k)$  — характерную частоту, выше которой  $r(k, \omega)$  быстро падает. Можно привести аргументы в пользу того, что  $\omega_*(k)$  растет с ростом  $k$  не быстрее, чем  $k^2$ . В первом приближении, которое рассматривается в этой работе, определяется лишь показатель  $\gamma$ .

Для этой цели достаточно предположить, что  $\omega_*(k)$  растет с ростом  $k$  не быстрее, чем степенным образом.

Подставим (4.4), (4.6) в уравнение для  $U(k, \omega)$  и проинтегрируем его правую и левую части по  $\omega$ . Тогда вторая из  $\delta$ -функций в (4.2) исчезает и произвольный график в правой части уравнения фиг. 6, содержащий  $l$  линий класса (а), запишется в виде

$$\int \exp\left(-a \sum_{i=1}^l q_i^\gamma\right) \delta\left(\sum_{i=1}^l q_i - k\right) dq_1 \dots dq_l \int_{|\beta_1|=0}^{\beta_1=\omega_*(q_1)} \dots \int_{|\beta_l|=0}^{\beta_l=\omega_*(q_l)} \Psi(q_1 \beta_1, \dots, q_l \beta_l) d\beta_1 \dots d\beta_l \quad (4.7)$$

Здесь  $\Psi$  включает в себя функции  $S, r(q, \beta)$  и вершины. Интеграл по  $\beta_1, \dots, \beta_l$  меняется с изменением  $q_1, \dots, q_l$  не быстрее, чем степенным образом, поэтому главный вклад в интеграл по  $q_1, \dots, q_l$  дает область, в которой экспоненциальный множитель максимален, т. е. выражение

$$\sum_{i=1}^l g_i^\gamma \delta\left(\sum_{j=1}^l q_j - k\right)$$

минимально. Легко проверить, что при  $\gamma \neq 1$  минимум этого выражения лежит при  $q_1 = q_2 = \dots = q_l = k/l$ . При  $\gamma = 1$  выражение минимально при параллельных  $q_1, \dots, q_l$ .

Предположим, что спектр внешних сил  $\langle |f(k, \omega)|^2 \rangle$  ограничен сверху, так что в области больших  $k$  можем пренебречь первым членом в правой части уравнения фиг. 6. С учетом сказанного уравнение фиг. 6 пере-

пишется при  $\gamma \neq 1$  в виде

$$\exp \left[ -a \left( \frac{k}{k^0} \right)^\gamma \right] = \sum_{l=2}^N \varphi_l(k) \exp \left[ -al \left( \frac{k}{k^0 l} \right)^\gamma \right] \quad (4.8)$$

где  $\varphi_l(k)$  — некоторые функции, меняющиеся с изменением  $k$  не быстрее, чем степенным образом,  $N$  — произвольно большое, но конечное целое число. Умножив правую и левую часть (4.7) на  $\exp [a(k/k^0)^\gamma]$ , получим

$$1 = \sum_{l=2}^N \varphi_l(k) \exp \left[ -a \left( \frac{k}{k^0} \right)^\gamma \left( \frac{1}{l^{\gamma-1}} - 1 \right) \right] \quad (4.9)$$

Легко видеть, что это уравнение не может быть удовлетворено в случае  $k \rightarrow \infty$ , если  $l$  отлично от единицы. Отсюда следует, что

$$U(k) \sim \exp [-ak / k^0] \quad (4.10)$$

5. Все приведенные выше рассуждения остаются справедливыми и в том случае, если (2.1) заменим на уравнение Навье — Стокса. В спектральном представлении оно имеет вид [8]

$$(-i\omega + \nu k^2) v_i(\mathbf{k}, \omega) = f_i(\mathbf{k}, \omega) + P_{ijl}(\mathbf{k}) \int v_j(\mathbf{q}, \alpha) v_l(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \omega - \alpha) d\mathbf{q} d\alpha$$

$$P_{ijl}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{(2\pi)^4} [k_j \Delta_{il}(\mathbf{k}) + k_l \Delta_{ij}(\mathbf{k})], \Delta_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

Спектральный тензор в случае однородной изотропной турбулентности определяется одной скалярной функцией [6]

$$U_{ij}(k, \omega) = \Delta_{ij}(\mathbf{k}) U(k, \omega)$$

Функцию  $U(k, \omega)$  представим в виде (4.4), (4.6). Так как  $P_{ijl}(\mathbf{k}) \sim k$ , то в качестве параметра, по которому будут малы отбрасываемые графики при  $k \rightarrow \infty$  или при  $\omega \rightarrow \infty$ , будет служить

$$kS(k, \omega) = \frac{k}{-i\omega + \nu k^2}$$

Подынтегральное выражение в (4.7) будет содержать множитель, зависящий от углов между векторами  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_l$ , однако максимум подынтегрального выражения будет по-прежнему со степенной точностью лежать при  $q_1 = q_2 = \dots = q_l = k/l$ .

Формула (4.10) может быть проверена сравнением с экспериментальными данными по турбулентности в трубе. Есть, однако, еще одна область ее применимости — заключительный период вырождения турбулентности. Обычно при его изучении полагают

$$\frac{\partial U(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \approx 2\nu k^2 U(\mathbf{k}, t) \quad (5.1)$$

полностью пренебрегая нелинейными взаимодействиями. Решение (5.1) есть

$$U(\mathbf{k}, t) = C \exp (-2\nu k^2 (t - t_0))$$

В начале заключительного периода вырождения турбулентности пренебрежение нелинейными членами оправдано, так как скорость вязкого затухания пульсаций будет гораздо выше, чем нелинейная передача энергии по спектру. С течением времени, однако, нелинейные взаимодействия



будут единственным источником энергии для гармоник достаточно большим волновым числом, и ими пренебрегать уже нельзя. При этом в силу вступает формула (4.10), в которой наиболее крупномасштабные возмущения будут играть роль медленно меняющегося с течением времени предэкспоненциального множителя.

Автор благодарит А. З. Паташинского за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 11 XII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Townsend A. A. On the fine-scale structure of turbulence. Proc. Roy. Soc., 1951, vol. A208, No. 1095.
2. Pearson J. R. A. The effect of uniform distortion on weak homogeneous turbulence. J. Fluid. Mech., 1959, vol. 15, pt 2.
3. Saffman P. G. On the fine-scale structure of vector fields convected by a turbulent fluid. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, pt 4.
4. Новиков Е. А. О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2.
5. Kraichnan R. H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, pt 4.
6. Моин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, 2. М., «Наука», 1965—1967.
7. Яглом А. М. Асимптотическое поведение спектра турбулентности при различных моделях спектрального переноса энергии. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды», М., «Наука», 1969.
8. Wyld H. W. Jr. Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid. Annals Phys., 1961, vol. 14.