

УДК 532.536

ПОВЕРХНОСТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ НАКЛОННЫХ КАНАЛАХ*

Е.А. ДЕМЕХИН, Е.М. ШАПАРЬ, А.С. СЕЛИН

*Кубанский государственный университет, Южный научный центр РАН,
Краснодар*

В работе рассмотрено течение слоя вязкой жидкости в открытом наклонном канале при турбулентном режиме течения. Для описания турбулентной вязкости использована модель Ван–Дрифта. Численно исследован спектр собственных значений задачи о линейной устойчивости плоскопараллельного течения. Найдены параметры волн максимального роста, исследовано влияние поверхностного натяжения, проведено сравнение теоретических расчетов с экспериментами.

ВВЕДЕНИЕ

При числах Рейнольдса $Re^* \approx 800-1200$ [1] течение вязкого слоя жидкости как на наклонной, так и на вертикальной плоскостях становится неустойчивым к волнам Толлмина–Шлихтинга и, как следствие, при $Re > Re^*$ ламинарный режим течения сменяется турбулентным. Эксперименты показывают, что, как и в ламинарном случае ([2] — вертикальные течения, [3] — слабо наклонные каналы), поверхность турбулентного слоя оказывается неустойчивой и покрытой системой волн ([4] — вертикальный случай, [5] — слабо наклонные каналы). Гидравлический подход [6] позволяет только грубо оценить критические параметры поверхностной неустойчивости, давая критическое число Фруда $Fr^* = 2$. Применение модели с турбулентной вязкостью [7, 8] позволило дать более точные предсказания о критических параметрах. В настоящей работе модель [7, 8] применена в расчетах линейной неустойчивости для сверхкритических течений, найдены параметры волн максимального роста, исследовано влияние поверхностного натяжения. Результаты теории хорошо согласуются с экспериментами [5].

1. Двумерное нестационарное течение жидкости на наклонной плоскости с углом наклона описывается системой [9]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + c_f,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - c_f \operatorname{ctg} \theta,$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-08-33585а).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$y = h(x, t):$$

$$-p - WK + \tau_{xx} n_x^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + \tau_{yy} n_y^2 = 0,$$

$$(\tau_{xx} - \tau_{yy}) n_x n_y + \tau_{xy} (n_y^2 - n_x^2) = 0,$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$y = 0:$$

$$u = v = 0.$$

Здесь

$$n_x = \frac{-h_x}{(1+h_x^2)^{1/2}}, \quad n_y = \frac{1}{(1+h_x^2)^{1/2}}, \quad K = \left(\frac{h_x}{(1+h_x^2)^{1/2}} \right)_x = \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{1/2}} \quad (2)$$

τ_{ij} — компоненты тензора напряжений; n_j — компоненты внешнего вектора по нормали n относительно свободной поверхности, K — кривизна поверхности.

Система приведена к безразмерному виду, где в качестве базисных величин взяты: h_N — толщина слоя невозмущенной жидкости, U_N — невозмущенная скорость на поверхности слоя, ρ — плотность жидкости. Коэффициент трения c_f определен из соотношения

$$\tau_{xy} \Big|_{y=0} = c_f \rho U_N^2. \quad (3)$$

Рассматривалась система с турбулентной вязкостью, определяемой гипотезой Буссинеска [10], согласно которой напряжения Рейнольдса пропорциональны градиенту скорости и турбулентной вязкости:

$$\tau_{xx} = 2(1/\text{Re} + v_T^{xx}) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = (1/\text{Re} + v_T^{xy}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = 2(v + v_T^{yy}) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (4)$$

$$v_T^{xx} = 2l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|, \quad v_T^{xy} = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| \equiv v_T, \quad v_T^{yy} = 2l^2 \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| = v_T^{xx} \equiv v_T^x. \quad (5)$$

Здесь v_T^{ij} — тензор компонент турбулентной вязкости, l — длина перемешивания Прандтля, для которой используется соотношение Ван-Дрифта [11]

$$l = \kappa y \left(1 - \exp \left[- \frac{y \text{Re} \sqrt{c_f}}{A} \right] \right),$$

где κ — постоянная Кармана, $\kappa \approx 0,4$, $A = 30$.

Вместо c_f и $c_f \text{ctg} \theta$ можно использовать число Фруда

$$\text{Fr}^2 = \frac{U_N^2}{gh_N} = \frac{\sin \theta}{c_f}.$$

При заданных физических параметрах жидкости число Вебера является функцией Re и Fr

$$We = \frac{\sigma}{\rho U_N^2 h_N} = \gamma \frac{1}{Re^{4/3}} \frac{1}{Fr^{2/3}},$$

где γ — число Капицы, ответственное за физические свойства жидкости, $\gamma = \frac{\sigma}{\rho} v^{-4/3} g^{-1/3}$.

2. Для безволнового плоского слоя система (1) переходит в

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + c_f = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = c_f \operatorname{ctg} \theta, \end{cases}$$

$$y = 1: -p + \tau_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (6)$$

$$y = 0: u = 0;$$

из решения системы

$$\begin{cases} \tau_{xy} = -c_f (y-1), \\ p = -c_f \operatorname{ctg} \theta y + \text{const.} \end{cases}$$

Таким образом, напряжения τ_{xy} и давление p линейно зависят от вертикальной координаты y .

В конечном итоге получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения относительно скорости $U(y)$:

$$\frac{1}{Re} \frac{dU}{dy} + l^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = c_f (1-y), \quad (7)$$

$$y = 1: \frac{dU}{dy} = 0, \quad y = 0: U = 0. \quad (8)$$

Система (7)–(8) была проинтегрирована численно, а для определения c_f использовалось дополнительное соотношение нормировки

$$U|_{y=1} = 1.$$

3. Для рассмотрения линейной устойчивости найденного тривиального решения на это решение накладывались малые возмущения вида:

$$u = U(y) + \varepsilon \hat{u}(y)E, \quad v = \varepsilon \hat{v}(y)E,$$

$$h = 1 + \varepsilon \hat{h}E, \quad \tau_{xx} = \varepsilon \hat{\tau}_{xx}E, \quad \tau_{yy} = \varepsilon \hat{\tau}_{yy}E, \quad (9)$$

$$\tau_{xy} = c_f (1-y) + \varepsilon \hat{\tau}_{xy}E, \quad v_t = v_t^{(0)} + \varepsilon \hat{v}E,$$

$$E = e^{i(\alpha x - \alpha c t)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

После подстановки (9) в (1), введения функции тока $\hat{\phi}$

$$\hat{u} = \hat{\phi}', \quad \hat{v} = -i\alpha \hat{\phi},$$

и устремления $\varepsilon \rightarrow 0$, получим уравнения:

$$\begin{aligned}
i\alpha \left[(U - c)(\hat{\phi} - \alpha^2 \hat{\phi}) - U'' \hat{\phi} \right] &= a_4 \hat{\phi}^{IV} + a_3 \hat{\phi}''' + a_2 \hat{\phi}'' + a_1 \hat{\phi}' + a_0 \hat{\phi}, & (10) \\
a_4 &= \frac{1}{\text{Re}} + 2l^2 U', \quad a_3 = 4(2ll'U' + l^2 U''), \quad a_1 = 4\alpha^2 (2ll'U' + l^2 U''), \\
a_2 &= -2\alpha^2 \frac{1}{\text{Re}} + 4 \left[(l')^2 + ll'' + \alpha^2 l^2 \right] U' + 8ll'U'' + 2l^2 U''', \\
a_0 &= \alpha^4 \left(\frac{1}{\text{Re}} + 2l^2 U' \right) + \alpha^2 \left\{ 4 \left[(l')^2 + ll'' \right] U' + 8ll'U'' + 2l^2 U''' \right\},
\end{aligned}$$

с краевыми условиями:

$$y = 1:$$

$$\hat{\phi}''' - 3\alpha^2 \hat{\phi}' + i\alpha \text{Re}(c-1) \hat{\phi}' - i\alpha \text{Re} \left(\frac{\cos \theta}{\text{Fr}^2} + \alpha^2 W \right) \hat{h} - 2l^2 \text{Re}^3 c_f^2 = 0, \quad (11)$$

$$\hat{\phi}'' + \alpha^2 \hat{\phi} = c_f \text{Re} \hat{h}, \quad \hat{\phi} = (c-1)\hat{h}, \quad y = 0: \quad \hat{\phi} = \hat{\phi}' = 0. \quad (12)$$

Уравнения (10) вместе с граничными условиями (11)–(12) дают задачу на собственные значения комплексной скорости c . Параметрами задачи в отсутствие поверхностного натяжения, $W = 0$, являются волновое число α , число Фруда Fr и угол наклона θ (или число Рейнольдса). Синусоидальное возмущение с некоторым волновым числом α будет расти во времени, если мнимая часть c положительна, и затухать, если c_i отрицательна. Нейтральная устойчивость и нейтральное волновое число α_0 определяются соотношением $c_i = 0$.

Система (10)–(12) должна решаться численно при больших числах Рейнольдса $\text{Re} = 10^3 - 10^5$. При этом в системе появляется малый параметр при старшей производной, делающий решение системы исключительно сложным при таких больших числах Рейнольдса. Решение осложняется также тем обстоятельством, что профиль скоростей $U(y)$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$ очень резко меняется как вблизи жесткой стенки, так и вблизи поверхности раздела. Применение асимптотических методов типа сращиваемых разложений сильно затруднено большой громоздкостью системы. Для решения (10)–(12) был выбран квазиспектральный метод. Разновидность этого метода — τ -метод [12] был обобщен и применен для решения нашей задачи. Независимая переменная $0 \leq y \leq 1$ заменялась на $z = 2y - 1$, $-1 \leq z \leq 1$. Функция тока искалась в виде разложения по полиномам Чебышева $T_j(z)$, $j = 0, 1, \dots, N$

$$\hat{\phi} = \sum_{j=0}^N \beta_j T_j(z),$$

где β_j — неизвестные коэффициенты разложения. Система (10) представлялась в виде

$$L_1(\hat{\phi}) + cL_2(\hat{\phi}) = 0$$

и проектировалась с весом $(1 - z^2)^{1/2}$ на первые $N - 4$ полинома Чебышева. Как результат, получались первые $N - 4$ уравнения системы

$$(A + cB) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \\ \hat{h} \end{pmatrix} = 0. \quad (14)$$

Рис. 1. Зависимость α_m от числа Рейнольдса.
 $\theta = 0,38^\circ$ (1), $0,32^\circ$ (2), $0,2^\circ$ (3).

Требование удовлетворения краевых условий (11)–(12) при подстановке в них (13) давало недостающие пять уравнений для замыкания системы (14). Эта система из $N + 1$ уравнения и $N + 1$ неизвестной является однородной и ее нетривиальное решение существует при условии, что определитель системы равен нулю

$$|A + cB| = 0.$$

Для нахождения собственных значений $\{c_k\}$ применялся QR-алгоритм. $N + 1$ менялось от 32 до 512, что давало возможность продвинуться в вычислениях до чисел Рейнольдса порядка 10^5 .

На рис. 1 показана зависимость волнового числа волн максимального роста α_m от $Re - Re^*$, где Re^* — критическое число Рейнольдса при различных углах наклона θ для слабо наклоненных каналов. При критических параметрах $Re = Re^*$, Re^* определен в [7, 8], $\alpha_m = 0$ и неустойчивость является длинноволновой, как и при ламинарном стекании слоя. При увеличении числа Рейнольдса на величину порядка 700 достигается максимум α_m и минимум длины волны максимального роста. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса α_m монотонно уменьшается.

4. Типичный спектр собственных значений $\{c_i\}$ при $Re = 1000$, $\theta = \pi/2$ и $\alpha = 0,8$ показан на рис. 2. В спектре присутствуют две поверхностные моды (на рисунке обозначенные цифрами 1 и 2), описывающие возмущения, распространяющиеся вверх и вниз по потоку. Кроме поверхностных мод существуют также внутренние или сдвиговые моды. Эти моды для турбулентного профиля всегда

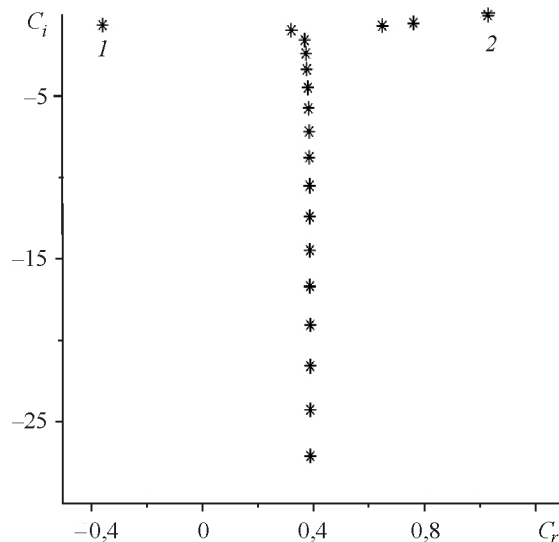


Рис. 2. Спектр собственных значений, $Re = 1000$, $\theta = \pi/2$, $\alpha = 0,8$.

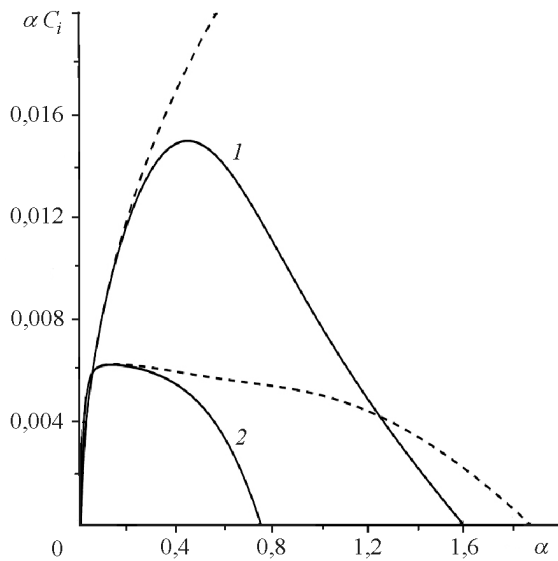


Рис. 3. Влияние поверхностного натяжения на коэффициент максимального роста волны.

Re = 1000, $\theta = \pi/2$; течения: ламинарное (1), турбулентное (2); линии: сплошные — We \neq 0, пунктирные — We = 0.

устойчивы и распространяются со скоростью 0,4–0,5 от скорости на поверхности раздела, вниз по потоку. Имеется счетное множество таких сдвиговых мод c_i . Единственная мода, которая может быть неустойчива, это поверхностная мода, распространяющаяся вниз по течению, мода 2. Ее поведение рассматривается дальше.

Интересным вопросом является зависимость неустойчивости от поверхностного натяжения. Для слабо наклонных каналов толщина слоя велика и влияние поверхностного натяжения пренебрежимо мало. Для вертикального же случая стекания ответ не так очевиден. На рис. 3 показана зависимость коэффициента роста $\alpha c_i(\alpha)$ при вертикальном стекании $\theta = 90^\circ$ и переходном числе Re = 1000, когда течение может быть как ламинарным, так и турбулентным. При сохранении ламинарного режима неучет сил поверхностного натяжения приводит качественно к совершенно другим результатам. При смене режима на турбулентный коэффициент максимального роста αc_i уменьшается более чем в 2 раза, кроме того, волны становятся более длинными, α_m уменьшается примерно в 3-4 раза. Влияние поверхностных сил выглядит, на первый взгляд, значительным, однако как коэффициент максимального роста αc_i , так и его длина волны α_m нечувствительны

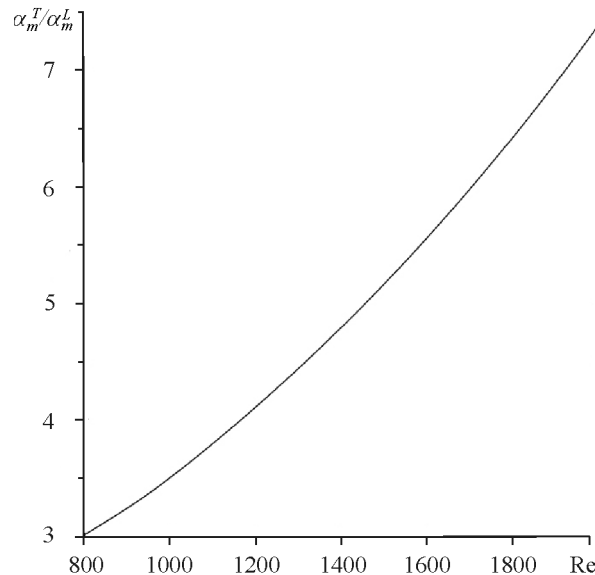


Рис. 4. Зависимость α_m^L / α_m^T волны максимального роста турбулентного и ламинарного течений от $\langle \text{Re} \rangle$ при вертикальном стекании, $\theta = 90^\circ$.

к влиянию сил поверхностного натяжения, а именно αc_i^m и α_m определяют место и частоту возникновения волн вниз по потоку.

На рис. 4 приведена зависимость отношения волновых чисел максимального роста при ламинарном и турбулентном режимах в зоне переходных чисел Рейнольдса при вертикальном стекании. Это отношение меняется от 3 до 8 и качественно соответствует факту увеличения характерной длины волны при смене режима с сантиметров до десятков сантиметров в [4]. Количественные экспериментальные данные, которые можно было бы сравнить с теоретическими, к сожалению, отсутствуют для вертикального случая.

Малые случайные возмущения на входе растут вниз по потоку согласно линейной теории устойчивости. Согласно этой теории вниз по потоку выживает узкий диапазон частот вблизи максимума $\alpha c_i = \alpha c_i^m$. Волновое число α_m , при котором имеет место максимум, дает частоту волны $\omega_m = \alpha_m c_i$ вблизи точки возникновения волн и период $T_m = 2\pi/\omega_m$, которые можно пересчитать на размерные. Обычно период волны является консервативным и не меняется сильно вниз по потоку вплоть до момента слияния соседних волн (сильный нелинейный эффект). Таким образом, T_m предсказывает временной интервал и расстояние между соседними катящимися волнами в самом начале нелинейной области. Далее, согласно линейной теории, амплитуда волны должна в начале области волнообразования нарастать экспоненциально с показателем экспоненты $\gamma = \alpha c_i^m / c_R$, $\exp(\gamma x)$. На рис. 5 показана зависимость экспериментальной амплитуды волны от расстояния вниз по потоку [5]. Одновременно на рисунке представлена теоретическая зависимость $\exp(\gamma x)$, которая в полулогарифмической системе переходит в прямую линию (γx). Первые несколько экспериментальных точек должны быть отброшены при сравнении: во-первых, при очень малых амплитудах точность измерения невелика, во-вторых, что самое главное, в самом начале канала эволюция не подчиняется теории волн максимального роста, т. к. эта волна не успевает вырасти из начального шума с равномерным распределением амплитуды. Далее, при достаточно большой амплитуде волны достигают нелинейного насыщения и выходят на константу.

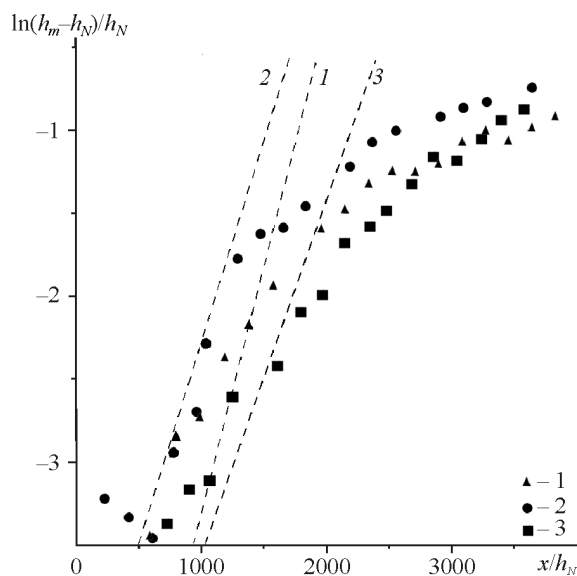


Рис. 5. Сравнение с экспериментами Брока [5].

Fr = 3,71 (1), 4,96 (2), 3,81 (3); Re = 7775 (1), 10825 (2), 11175 (3).

Таким образом, для сравнения с теорией максимального роста должны быть взяты только промежуточные точки. С учетом этих замечаний анализ рисунков позволяет сказать, что действительно эволюция на начальном участке является экспоненциальной и удовлетворительно подчиняется нашей теории максимального роста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.** Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке // ПМТФ. — 1979. — № 6. — С. 77–87.
2. **Капица П.Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. — 1948. — Т. 18, вып. 1. — С. 3–28.
3. **Binnie A.M.** Instability in slightly inclined water channel. // J. Fluid Mech. — 1959. — Vol. 5. — P. 561–570.
4. **Chu K.J., Dukler A.E.** Studies of the substrate and its wave structure.// AIChE J. — 1974. — Vol. 20, No. 4. — P. 695–706.
5. **Brock R.R.** Development of roll waves in open channels // Report NKNR16. — 1967. — 226 p.
6. **Dressler P.S.** Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels // Pure Appl. Math. — 1949. — No. 2. — P. 149–194.
7. **Демехин Е.А., Калайдин Е.Н., Шапарь Е.М.** К теории катящихся волн в наклонных руслах // ДАН. — 2005. — Т. 401, № 4. — С. 220–223.
8. **Демехин Е.А., Калайдин Е.Н., Шапарь Е.М., Каллиадасис С.** Определение критических параметров устойчивости плоскопараллельного течения тонкой пленки жидкости // Теплофизика и аэромеханика. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 249–257.
9. **Chang H.-C. and Demekhin E.A.** Complex wave dynamics on thin films. — Elsevier, 2002. — 402 p.
10. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
11. **Van Driest E.R.** On turbulent flow near a wall // JAS. — 1956. — Vol. 23, No. 2. — P.
12. **Orzsag S.A.** Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 50, No. 4. — P. 689–704.

Статья поступила в редакцию 5 марта 2007 г.