УДК 539.3: 517.958

ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В СМЕЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: abd@hydro.nsc.ru

Для динамической трехмерной системы уравнений в смещениях линейной теории упругости трансверсально-изотропных сред приведены явные выражения для фазовых скоростей и векторов поляризации плоских волн. Найдены все продольные нормали. При некоторых значениях модулей упругости система уравнений приводится к диагональному виду. Для статических уравнений определены все условия эллиптичности системы. Даны два новых представления смещений через потенциальные функции, удовлетворяющие трем независимым квазигармоническим уравнениям. Определены ограничения на модули упругости, при которых соответствующие коэффициенты в этих представлениях действительные различные, равные или комплексные. Показано, что эти представления являются общими и полными. Каждому представлению соответствует оператор рекурсии (симметрии), т. е. формула производства новых решений.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная среда, модули упругости, продольные нормали, общее решение, операторы рекурсии, диагонализация эллиптической системы.

Упругие трансверсально-изотропные среды, обладающие вращательной симметрией относительно некоторой оси, встречаются достаточно часто (слоистые горные породы, слоистые композитные материалы, кристаллы гексагональной сингонии и т. д.). Если в качестве оси симметрии выбирается ось x_3 прямоугольной системы координат x_i, $i = 1, 2, 3$, то матрица модулей упругости трансверсально-изотропной среды принимает следующий вид [1]:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11} & & & & & \\ A_{21} & A_{11} & & & \text{sym} & \\ A_{31} & A_{31} & A_{33} & & & \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11} - A_{21} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Здесь и далее обозначение sym соответствует элементам матрицы, симметричным относительно ее диагонали. Матрице A_{ij} (1) соответствует тензор четвертого ранга модулей упругости $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}$. Обратному тензору коэффициентов податливости $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$ отвечает матрица $a_{ij} = a_{ji}$, имеющая тот же вид, что и матрица (1).

Используя для симметричных по двум индексам тензоров формулы перехода от двух индексов к одному

$$\begin{gathered} h_{11} = h_1, \quad h_{22} = h_2, \quad h_{33} = h_3, \\ \sqrt{2} h_{23} = \sqrt{2} h_{32} = h_4, \quad \sqrt{2} h_{13} = \sqrt{2} h_{31} = h_5, \quad \sqrt{2} h_{12} = \sqrt{2} h_{21} = h_6, \end{gathered} \tag{2}$$

обобщенный закон Гука, связывающий напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и деформации $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$, можно записать в виде

$$\sigma_i = A_{ij} \varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = a_{ij} \sigma_j, \quad i, j = \overline{1, 6}. \tag{3}$$

Здесь ∂_i — производная по координате x_i; u_j — вектор смещения; по повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование. Формулы перехода вида (2) имеют место для модулей упругости A_{ijkl} и коэффициентов податливости a_{ijkl}. Матрицы A_{ij}, a_{ij} являются взаимно обратными и положительно-определенными.

Величины A_{ij}, a_{ij} представляются через собственные модули $\lambda_i > 0$ и ортогональные собственные состояния t_{ip}, $t_{ip} t_{iq} = \delta_{pq}$, $i, p, q = \overline{1, 6}$ (δ_{pq} — символ Кронекера, единичная матрица) в виде [2]

$$A_{ij} = \lambda_1 t_{i1} t_{j1} + \lambda_2 t_{i2} t_{j2} + \lambda_3 (t_{i3} t_{j3} + t_{i6} t_{j6}) + \lambda_4 (t_{i4} t_{j4} + t_{i5} t_{j5}),$$

$$a_{ij} = \frac{1}{\lambda_1} t_{i1} t_{j1} + \frac{1}{\lambda_2} t_{i2} t_{j2} + \frac{1}{\lambda_3} (t_{i3} t_{j3} + t_{i6} t_{j6}) + \frac{1}{\lambda_4} (t_{i4} t_{j4} + t_{i5} t_{j5});$$

$$\begin{gathered} \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \Big[A_{11} + A_{21} + A_{33} \pm \sqrt{(A_{11} + A_{21} - A_{33})^2 + 8 A_{31}^2} \, \Big] > 0, \\ \lambda_3 = \lambda_6 = A_{11} - A_{21} > 0, \qquad \lambda_4 = \lambda_5 = A_{44} > 0; \end{gathered} \tag{4}$$

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\alpha & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos\alpha & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\alpha & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}\, A_{31}}{A_{11} + A_{21} - A_{33}}.$$

Неравенства (4) являются необходимыми и достаточными условиями положительной определенности матрицы (1). В зависимости от соотношений между величинами собственных модулей (4) существуют трансверсально-изотропные материалы различных классов [2, 3]: $\{1, 1, 2, 2\}$, $\{1, 2, 1, 2\}$, $\{1, 2, 2, 1\}$, $\{2, 1, 1, 2\}$, $\{2, 1, 2, 1\}$, $\{2, 2, 1, 1\}$.

Тензор модулей упругости A_{ijkl} можно представить в виде линейного инвариантного разложения на постоянную (изотропную) часть и части, содержащие два девиатора и нонор, аналогично неприводимым линейным представлениям ортогональной группы преобразований системы координат [4, 5]:

$$\begin{aligned} A_{ijkl} = H \frac{1}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \delta_{ijkl}) + 2h \frac{1}{3} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ijkl}) + \frac{1}{6} (H_{ij} \delta_{kl} + H_{kl} \delta_{ij} + {} \\ + H_{ik} \delta_{lj} + H_{lj} \delta_{ik} + H_{il} \delta_{jk} + H_{jk} \delta_{il}) + \frac{1}{3} (h_{ij} \delta_{kl} + h_{kl} \delta_{ij}) - {} \\ - \frac{1}{6} (h_{ik} \delta_{lj} + h_{lj} \delta_{ik} + h_{il} \delta_{jk} + h_{jk} \delta_{il}) + N_{ijkl}, \quad \delta_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \tag{5}$$

Тензоры H_{ij}, h_{ij}, N_{ijkl} симметричны по всем индексам, причем $H_{ii} = 0$, $h_{ii} = 0$, $N_{ijkk} = 0$. Соответствующие части разложения (5) ортогональны между собой и неприводимы. Для матрицы (1) разложение (5) в матричной записи принимает вид [5]

$$A_{ij} = \frac{H}{3}\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & \mathrm{sym} & & \\ 1 & 1 & 3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{2h}{3}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & \mathrm{sym} & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{H_1}{6}\begin{bmatrix} 6 & & & & & \\ 2 & 6 & & & \mathrm{sym} & \\ -1 & -1 & -12 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \frac{h_1}{3}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 2 & 0 & & \mathrm{sym} & & \\ -1 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} +$$

$$+ N\begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & & \mathrm{sym} & \\ -4 & -4 & 8 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -8 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$H = \frac{1}{15}\,[8A_{11} + 3A_{33} + 4(A_{31} + A_{44})], \quad h = \frac{1}{6}\,[-A_{11} + 3A_{21} + 2(2A_{31} - A_{44})],$$

$$H_1 = \frac{2}{21}\,(4A_{11} - A_{31} - 3A_{33} - A_{44}), \quad H_{ij} = H_1(\delta_{ij} - 3\delta_{i3}\delta_{j3}),$$

$$h_1 = \frac{1}{3}\,(-A_{11} + 3A_{21} - 2A_{31} + A_{44}), \quad h_{ij} = h_1(\delta_{ij} - 3\delta_{i3}\delta_{j3}),$$

$$N_{21} = N = \frac{1}{35}\,[A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44})].$$

Если вектор n_i ($n_i n_i = 1$) задает направление произвольной оси вращения, то тензор A_{ijkl} для трансверсально-изотропной среды можно записать в виде [1]

$$A_{ijkl} = c_1\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\,c_2(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}) + c_3(n_i n_j\delta_{kl} + n_k n_l\delta_{ij}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,c_4(n_i n_k\delta_{lj} + n_l n_j\delta_{ik} + n_i n_l\delta_{jk} + n_j n_k\delta_{il}) + c_5 n_i n_j n_k n_l. \quad (6)$$

При $n_i = (0, 0, 1)$ в результате сравнения (6) и (1) получаем коэффициенты

$$c_1 = A_{21}, \quad c_2 = A_{11} - A_{21}, \quad c_3 = A_{31} - A_{21},$$

$$c_4 = A_{44} - A_{11} + A_{21}, \quad c_5 = A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44}).$$

В случае динамики уравнения в смещениях при произвольной анизотропии и отсутствии объемных сил имеют вид [1]

$$(A_{i(kl)j}\partial_{kl} - \rho c^2\delta_{ij}\partial_{44})u_j = 0, \tag{7}$$

где $A_{i(kl)j} = (A_{iklj} + A_{ilkj})/2$; $\partial_t = c\partial_4$; $x_4 = ct$; c — некоторая постоянная, имеющая размерность скорости; t — время; ρ — постоянная плотность среды; $\partial_{kl} = \partial_k\partial_l$ — вторые производные по координатам x_k, x_l. Уравнения (7) допускают решение в виде плоских волн [1, 6]

$$u_j = p_j g(n_s x_s - x_4), \tag{8}$$

где n_s — единичная нормаль к фронту волны; p_j — вектор поляризации; g — любая функция, имеющая вторую производную, не равную нулю. Подставляя выражение (8) в уравнения (7), получаем

$$(A_{i(kl)j}n_k n_l - \rho c^2\delta_{ij})p_j = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что для любого направления n_s волновой нормали вектор p_j является собственным вектором, а $\rho c^2 = \lambda$ — собственным значением симметричного тензора $Q_{ij} = Q_{ji} = A_{i(kl)j}n_k n_l$. Тензор Q_{ij} называется акустическим или тензором Кристоффеля. Для положительно-определенных тензоров модулей упругости A_{ijkl} тензор Q_{ij} всегда является положительно-определенным [1] и поэтому имеет положительные собственные значения.

В случае статики для трансверсально-изотропного материала (см. (1)) уравнения (7) принимают вид

$$Lu = 0, \tag{10}$$

где L — матрица операторов:

$$L = \begin{bmatrix} A_{11}\partial_{11} + \frac{1}{2}(A_{11} - A_{21})\partial_{22} + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} & \frac{1}{2}(A_{11} + A_{21})\partial_{12} & \Big(\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}\Big)\partial_{13} \\ \frac{1}{2}(A_{11} + A_{21})\partial_{21} & \frac{1}{2}(A_{11} - A_{21})\partial_{11} + A_{11}\partial_{22} + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} & \Big(\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}\Big)\partial_{23} \\ \Big(\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}\Big)\partial_{31} & \Big(\frac{1}{2}A_{44} + A_{31}\Big)\partial_{32} & \frac{1}{2}A_{44}(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\partial_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_{11} + \mu\partial_{22} + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} & (\lambda + \mu)\partial_{12} & \varkappa\partial_{13} \\ (\lambda + \mu)\partial_{21} & \mu\partial_{11} + (\lambda + 2\mu)\partial_{22} + \frac{1}{2}A_{44}\partial_{33} & \varkappa\partial_{23} \\ \varkappa\partial_{31} & \varkappa\partial_{32} & \frac{1}{2}A_{44}(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\partial_{33} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Здесь

$$A_{11} = \lambda + 2\mu, \quad \frac{1}{2}(A_{11} - A_{21}) = \mu, \quad \frac{1}{2}A_{44} + A_{31} = \varkappa, \quad \frac{1}{2}(A_{11} + A_{21}) = \lambda + \mu.$$

Запись оператора L в (11) показывает отличие этого оператора от аналогичного оператора в случае изотропного материала. Постоянные Ламе λ_1, μ_1 изотропного материала, ближайшего к материалу с матрицей модулей упругости (1), выражаются через приведенные выше постоянные H, h:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}\,(H + 2h) = \frac{1}{15}\,(A_{11} + 5A_{21} + 8A_{31} + A_{33} - 2A_{44}),$$

$$\mu_1 = \frac{1}{3}\,(H - h) = \frac{1}{30}\,(7A_{11} - 5A_{21} - 4A_{31} + 2A_{33} + 6A_{44}).$$

Если в (11) символы ∂_k заменить на компоненты единичного вектора n_k, то L совпадет с тензором Кристоффеля Q.

Определитель матрицы операторов (11) равен [7–9]

$$|L| = D_1 D_2 D_3,$$

$$\begin{aligned} D_1 D_2 &= \frac{1}{2}\,A_{44}A_{11}\,(\partial_{11} + \partial_{22})^2 + [A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}]\,(\partial_{11} + \partial_{22})\,\partial_{33} + \frac{1}{2}\,A_{44}A_{33}\partial_{3333} = \\ &= \frac{1}{2}\,A_{44}A_{11}\Big\{\Big(\partial_{11} + \partial_{22} + \frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}}\,\partial_{33}\Big)^2 + \\ &\quad + \Big[\frac{A_{33}}{A_{11}} - \Big(\frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}}\Big)^2\Big]\partial_{3333}\Big\} = \\ &= \frac{1}{2}\,A_{44}A_{11}\,(\partial_{11} + \partial_{22} + a_1\partial_{33})(\partial_{11} + \partial_{22} + a_2\partial_{33}), \end{aligned} \tag{12}$$

$$D_3 = \mu\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + \frac{1}{2}\,A_{44}\,\partial_{33} = \mu\,(\partial_{11} + \partial_{22} + a_3\partial_{33}), \quad a_3 = \frac{A_{44}}{A_{11} - A_{21}},$$

где

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}} \pm \sqrt{\Big(\frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}}\Big)^2 - \frac{A_{33}}{A_{11}}} = \\ &= \frac{1}{A_{11}A_{44}}\Big[A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31} \pm \sqrt{(A_{11}A_{33} - A_{31}^2)(A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})^2)}\,\Big]. \end{aligned} \tag{13}$$

Величины a_1, a_2 являются корнями уравнения

$$a^2 - \frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{(A_{44}/2)A_{11}}\,a + \frac{A_{33}}{A_{11}} = 0. \tag{14}$$

Система (10) будет эллиптической, если определитель (12) $|L| = D_1D_2D_3 > 0$ при любых действительных значениях символов ∂_k, $\partial_{kk} \neq 0$, понимаемых в данном случае как действительные переменные. Неравенство $|L| > 0$ выполняется, если

$$A_{11} - A_{21} < 0, \quad A_{44} < 0, \quad A_{11} > 0, \quad A_{33} > 0 \tag{15}$$

или

$$A_{11} - A_{21} > 0, \quad A_{44} > 0, \quad A_{11} > 0, \quad A_{33} > 0 \tag{16}$$

и, кроме того,

$$\frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}} + \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} > 0. \tag{17}$$

Неравенства (15), (17) или (16), (17) обеспечивают эллиптичность системы уравнений (10). Первые два неравенства (15) не соответствуют условиям (4) положительной определенности матрицы (1). Условия сильной эллиптичности [10] совпадают с неравенствами (16), (17).

Неравенство (17) запишем в виде

$$\frac{(\sqrt{A_{11}A_{33}} - A_{31})(\sqrt{A_{11}A_{33}} + A_{31} + A_{44})}{A_{44}A_{11}} > 0. \tag{18}$$

С учетом (15) из (18) получаем неравенства

$$\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} < \frac{A_{31}}{A_{11}}, \qquad -\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}} < \frac{A_{31}}{A_{11}}; \tag{19}$$

$$\frac{A_{31}}{A_{11}} < \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}}, \qquad \frac{A_{31}}{A_{11}} < -\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}}. \tag{20}$$

Неравенства (15), (19), (20) образуют один вариант условий эллиптичности для матрицы операторов (11). Второй вариант условий эллиптичности следует из (16), (18):

$$-\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}} < \frac{A_{31}}{A_{11}} < \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}}. \tag{21}$$

Области допустимых значений параметров, определяемых неравенствами (19), (20), при которых система (10) является эллиптической, показаны на рис. 1. Область допустимых значений параметров, определяемых неравенствами (21), при которых система (10) также является эллиптической, показана на рис. 2.

Условие действительности и положительности корней a_1, a_2 (13) уравнения (14) можно записать в виде

$$\frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}} - \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} = \frac{(\sqrt{A_{11}A_{33}} + A_{31})(\sqrt{A_{11}A_{33}} - A_{31} - A_{44})}{A_{44}A_{11}} \geqslant 0. \tag{22}$$

С учетом (15) из (22) получаем неравенства

$$\frac{A_{31}}{A_{11}} \leqslant -\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}}, \qquad \frac{A_{31}}{A_{11}} \leqslant \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}}; \tag{23}$$

$$-\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} \leqslant \frac{A_{31}}{A_{11}}, \qquad \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}} \leqslant \frac{A_{31}}{A_{11}}. \tag{24}$$

Области допустимых значений параметров, определяемых неравенствами (23), (24), показаны на рис. 1 (области I, II). Если параметры находятся в областях I, II, то корни a_1, a_2 являются действительными и положительными, если в областях III, IV (две полуполосы) — комплексными. При знаках равенства в (23), (24), т. е. на линиях l_1, l_2, корни действительные и совпадают: $a_1 = a_2$.

Для случая (16) из (22) получаем неравенства

$$-\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} \leqslant \frac{A_{31}}{A_{11}} \leqslant \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}}; \tag{25}$$

$$\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}} \leqslant \frac{A_{31}}{A_{11}} \leqslant -\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}}. \tag{26}$$

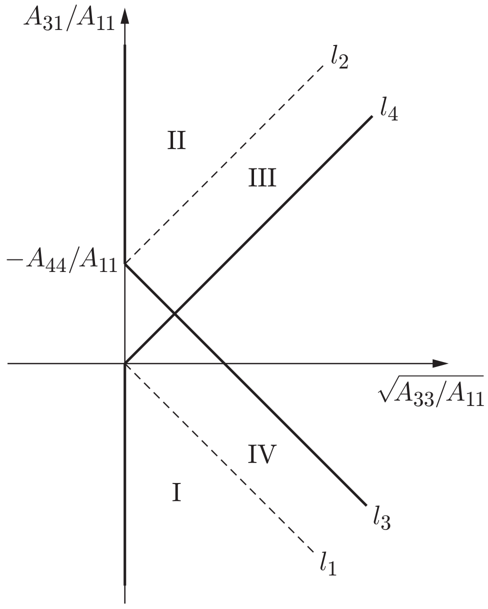

Рис. 1

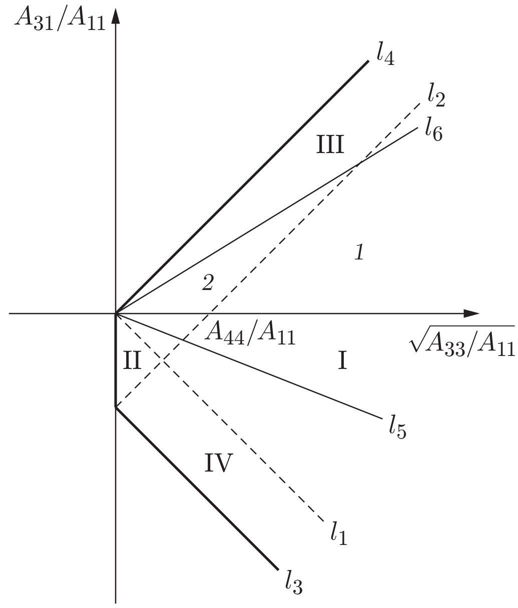

Рис. 2

Рис. 1. Области I, II, III, IV допустимых значений A_{ij}, определяемых неравенствами (19), (20):
I, II — области, определяемые неравенствами (23), (24)

Рис. 2. Области I, II, III, IV допустимых значений A_{ij}, определяемых неравенствами (21):
I, II — области, определяемые неравенствами (25), (26); *1, 2* — области, определяемые неравенствами (27), (28)

Области I, II допустимых значений параметров, определяемых неравенствами (25), (26), показаны на рис. 2 (I — между линиями l_1, l_2 справа от точки их пересечения; II — между линиями l_1, l_2 слева от точки их пересечения). При нахождении параметров в областях I, II корни a_1, a_2 являются действительными и положительными, на линиях l_1, l_2 они совпадают: $a_1 = a_2$. При нахождении параметров в областях III, IV (две полуполосы) корни a_1, a_2 комплексные.

Неравенства (4) запишем в виде

$$-\sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\frac{A_{21}}{A_{11}}\Big)}\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} < \frac{A_{31}}{A_{11}} < \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\frac{A_{21}}{A_{11}}\Big)}\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}}; \tag{27}$$

$$0 < \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\frac{A_{21}}{A_{11}}\Big)} < 1, \qquad \frac{A_{44}}{A_{11}} > 0. \tag{28}$$

Область параметров, соответствующая положительной определенности матрицы (1) и определяемая неравенствами (27), (28), показана на рис. 2. Эта область расположена в остром угле между линиями l_5, l_6. Величина угла, которая всегда больше нуля и меньше $\pi/2$, зависит от A_{21}/A_{11} и определяется первым неравенством (28). Область упругости, характеризуемая неравенствами (27), (28), разбивается линией l_2 на области *1* и *2*. В области *1*, которая является частью области I, корни a_1, a_2 (13) уравнения (14) действительные. В области *2*, которая является частью области III, корни a_1, a_2 комплексные, на линии l_2, очевидно, корни совпадают: $a_1 = a_2$.

Таким образом, если коэффициенты A_{ij} в уравнениях (10), (11) таковы, что соответствующие параметры не принадлежат областям *1, 2* (см. рис. 1, 2), то уравнения (10), (11) не являются уравнениями теории упругости для реальных материалов. Однако эти уравнения остаются эллиптическими, и для определителя $|L|$ имеет место представление (12). Область эллиптичности уравнений (10), (11) шире областей упругости *1, 2* (см. рис. 1, 2). Несмотря на то что в классической теории упругости обычно принимается требование положительной определенности удельной энергии деформации, в общем случае это предположение не является достаточно обоснованным [11].

Если для матрицы операторов L (11) существуют такие матрицы C, B, D операторов с постоянными коэффициентами, что выполняется соотношение

$$LC = BD, \tag{29}$$

то общее решение уравнений (10) имеет вид [12]

$$u = C\varphi, \qquad D\varphi = f, \qquad Bf = 0. \tag{30}$$

Матрицу D в (29) считаем диагональной. Из (29) следует соотношение

$$C'L = DB'. \tag{31}$$

Штрих означает транспонирование матрицы. Если рассматривать матрицы операторов с переменными коэффициентами, то вместо транспонированных операторов в (31) должны быть сопряженные операторы [12].

В алгебре матрицы L и D считаются эквивалентными, если выполняется равенство (29), где C, B — квадратные невырожденные матрицы. Так как $|L||C| = |B||D|$ и если $|L| = |D| = D_1D_2D_3$, то $|C| = |B|$.

Согласно (30), (29) каждому φ, удовлетворяющему уравнению $D\varphi = 0$, соответствует решение $u = C\varphi$ уравнений (10): $Lu = LC\varphi = BD\varphi = 0$. Обратно: если $\tilde{u}$ есть какое-либо решение уравнений $L\tilde{u} = 0$, то в силу (31) выражение $\varphi = B'\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению $D\varphi = DB'\tilde{u} = C'L\tilde{u} = 0$. В этом смысле представление (30) при $f = 0$ является общим, но взаимно однозначное соответствие между u и φ в общем случае отсутствует, хотя матрицы L и D могут быть эквивалентными. Поэтому, для того чтобы не была утрачена часть решений, в общем решении (30) должны учитываться функции f, являющиеся ядром оператора B.

Выражение $u = CB'\tilde{u}$ есть формула производства новых решений, т. е. если $L\tilde{u} = 0$, то из (29), (31) следует, что $u = CB'\tilde{u}$ — новое решение: $Lu = LCB'\tilde{u} = BDB'\tilde{u} = BC'L\tilde{u} = 0$. Значит, $S = CB'$ — оператор симметрии (рекурсии) [12, 13].

Для представления Эллиотта — Лоджа [8, 9] решения уравнений (10), (11) матрицы C, B, D имеют следующий вид:

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_1 & -\partial_2 \\ \partial_2 & \partial_2 & \partial_1 \\ k_1\partial_3 & k_2\partial_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_1 & -\partial_2 \\ \partial_2 & \partial_2 & \partial_1 \\ k_1a_2\partial_3 & k_2a_1\partial_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \partial_{11} + \partial_{22} + a_1\partial_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{11} + \partial_{22} + a_2\partial_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} + a_3\partial_{33} \end{bmatrix}, \tag{32}$$

причем коэффициенты связаны соотношениями

$$a_1 = \frac{A_{44}/2 + \varkappa k_1}{A_{11}} = \frac{A_{33}k_1}{\varkappa + (A_{44}/2)k_1}, \quad a_2 = \frac{A_{44}/2 + \varkappa k_2}{A_{11}} = \frac{A_{33}k_2}{\varkappa + (A_{44}/2)k_2}; \tag{33}$$

$$k_1 = \frac{A_{11}a_1 - A_{44}/2}{\varkappa} = \frac{\varkappa a_1}{A_{33} - (A_{44}/2)a_1}, \quad k_2 = \frac{A_{11}a_2 - A_{44}/2}{\varkappa} = \frac{\varkappa a_2}{A_{33} - (A_{44}/2)a_2}. \tag{34}$$

Из (34) находим

$$k_1 + k_2 = 2\Big(-1 + \frac{A_{11}A_{33} - A_{31}^2}{A_{44}\varkappa}\Big), \quad k_1 k_2 = 1,$$

т. е. k_1, k_2 — корни уравнения

$$k^2 + 2\Big(1 - \frac{A_{11}A_{33} - A_{31}^2}{A_{44}\varkappa}\Big)k + 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= -1 + \frac{A_{11}A_{33} - A_{31}^2}{A_{44}\varkappa} \pm \sqrt{\Big(-1 + \frac{A_{11}A_{33} - A_{31}^2}{A_{44}\varkappa}\Big)^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{A_{44}\varkappa}\Big[A_{11}A_{33} - A_{31}^2 - A_{44}\varkappa \pm \sqrt{(A_{11}A_{33} - A_{31}^2)(A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})^2)}\Big]. \end{aligned} \tag{35}$$

Аналогично из (33) получаем

$$a_1 + a_2 = \frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{(A_{44}/2)A_{11}}, \qquad a_1 a_2 = \frac{A_{33}}{A_{11}},$$

т. е. a_1, a_2 (13) — корни уравнения (14). Из формул (13), (35) или (33), (34) следует, что коэффициенты k_1, k_2 действительные или комплексные наряду с a_1, a_2.

Определители матриц (32) равны

$$\begin{aligned} |C| = (k_1 - k_2)(\partial_{11} + \partial_{22})\,\partial_3, \qquad |B| &= A_{11}^2\mu(k_1 a_2 - k_2 a_1)\,(\partial_{11} + \partial_{22})\,\partial_3 = \\ = (A_{44}/2)A_{11}\mu(k_1 - k_2)\,(\partial_{11} + \partial_{22})\,\partial_3 &= (A_{44}/2)A_{11}\mu\,|C|, \end{aligned} \tag{36}$$

а матрицы C, B (32) являются невырожденными, если $k_1 - k_2 \neq 0$. При этом с учетом (32) смещения представляются в виде (30)

$$u_1 = \partial_1(\varphi_1 + \varphi_2) - \partial_2\varphi_3, \quad u_2 = \partial_2(\varphi_1 + \varphi_2) + \partial_1\varphi_3, \quad u_3 = \partial_3(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2); \tag{37}$$

$$(\partial_{11} + \partial_{22} + a_1\partial_{33})\varphi_1 = f_1, \quad (\partial_{11} + \partial_{22} + a_2\partial_{33})\varphi_2 = f_2, \quad (\partial_{11} + \partial_{22} + a_3\partial_{33})\varphi_3 = f_3; \tag{38}$$

$$\partial_1 A_{11}(f_1 + f_2) - \partial_2\mu f_3 = 0, \quad \partial_2 A_{11}(f_1 + f_2) + \partial_1\mu f_3 = 0, \quad \partial_3(k_1 a_2 f_1 + k_2 a_1 f_2) = 0. \tag{39}$$

Первые два уравнения (39) являются условиями Коши — Римана для аналитической функции

$$A_{11}(f_1 + f_2) + i\mu f_3 = 2g(z, x_3) \tag{40}$$

комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$, $i = \sqrt{-1}$. Из (40) и третьего уравнения (39) находим (черта над буквой означает, что величина является комплексно-сопряженной)

$$A_{11}(f_1 + f_2) - i\mu f_3 = 2\overline{g(z, x_3)}, \quad A_{11}(f_1 + f_2) = g(z, x_3) + \overline{g(z, x_3)},$$

$$\mu f_3 = i(\,\overline{g(z, x_3)} - g(z, x_3)), \quad k_1 a_2 f_1 + k_2 a_1 f_2 = g_3(x_1, x_2).$$

Здесь $g(z, x_3)$, $g_3(x_1, x_2)$ — произвольные функции соответствующих аргументов. Из последних трех уравнений получаем

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{k_2 a_1(g(z, x_3) + \overline{g(z, x_3)}\,) - A_{11}g_3(x_1, x_2)}{(A_{44}/2)(k_2 - k_1)}, \quad k_2 \neq k_1, \\ f_2 &= \frac{A_{11}g_3(x_1, x_2) - k_1 a_2(g(z, x_3) + \overline{g(z, x_3)}\,)}{(A_{44}/2)(k_2 - k_1)}, \quad f_3 = \frac{i}{\mu}\,(\,\overline{g(z, x_3)} - g(z, x_3)). \end{aligned} \tag{41}$$

Выражения (41) есть решение уравнений (39), т. е. они являются ядром оператора B (32). Общность представления (37), (38) Эллиотта — Лоджа [8, 9] и некоторых других представлений при $f_i = 0$ обсуждается в [14, 15].

С учетом матриц (32) находим оператор симметрии

$$S = CB' = \begin{bmatrix} 2A_{11}\partial_{11} + \mu\partial_{22} & (2A_{11} - \mu)\partial_{12} & A_{11}(k_1a_2 + k_2a_1)\partial_{13} \\ (2A_{11} - \mu)\partial_{12} & \mu\partial_{11} + 2A_{11}\partial_{22} & A_{11}(k_1a_2 + k_2a_1)\partial_{23} \\ A_{11}(k_1 + k_2)\partial_{13} & A_{11}(k_1 + k_2)\partial_{23} & A_{11}(k_1^2a_2 + k_2^2a_1)\partial_{33} \end{bmatrix}.$$

Представление решения уравнений (10), (11) возможно не только с матрицами C, B вида (32) (решение Эллиотта — Лоджа), но и с матрицами вида

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_1\partial_{13} & \alpha_2\partial_{13} & -\partial_2 \\ \alpha_1\partial_{23} & \alpha_2\partial_{23} & \partial_1 \\ \partial_{11} + \partial_{22} & \partial_{11} + \partial_{22} & 0 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} (\alpha_1/a_1)\partial_{13} & (\alpha_2/a_2)\partial_{13} & -\partial_2 \\ (\alpha_1/a_1)\partial_{23} & (\alpha_2/a_2)\partial_{23} & \partial_1 \\ \partial_{11} + \partial_{22} & \partial_{11} + \partial_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{44}/2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{44}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \qquad (42)$$

при этом матрица D та же, что и в (32). Коэффициенты в (42) связаны соотношениями

$$a_1 = \frac{(A_{44}/2)\alpha_1}{A_{11}\alpha_1 + \varkappa} = \frac{A_{33} + \varkappa\alpha_1}{A_{44}/2}, \quad a_2 = \frac{(A_{44}/2)\alpha_2}{A_{11}\alpha_2 + \varkappa} = \frac{A_{33} + \varkappa\alpha_2}{A_{44}/2}; \qquad (43)$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1\varkappa}{A_{44}/2 - a_1A_{11}} = \frac{(A_{44}/2)a_1 - A_{33}}{\varkappa}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2\varkappa}{A_{44}/2 - a_2A_{11}} = \frac{(A_{44}/2)a_2 - A_{33}}{\varkappa}. \qquad (44)$$

Из (44) находим

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{A_{11}A_{33} + (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{11}\varkappa}, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \frac{A_{33}}{A_{11}},$$

т. е. α_1, α_2 — корни уравнения

$$\alpha^2 + \frac{A_{11}A_{33} + (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{11}(A_{44}/2 + A_{31})}\alpha + \frac{A_{33}}{A_{11}} = 0,$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{A_{11}A_{33} + (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{11}(A_{44} + 2A_{31})} \pm \sqrt{\Big[\frac{A_{11}A_{33} + (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{11}(A_{44} + 2A_{31})}\Big]^2 - \frac{A_{33}}{A_{11}}} = \qquad (45)$$
$$= \frac{1}{A_{11}(A_{44} + 2A_{31})}\Big[-(A_{11}A_{33} + (A_{44} + A_{31})A_{31}) \pm$$
$$\pm\sqrt{(A_{11}A_{33} - A_{31}^2)(A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})^2)}\,\Big].$$

Из (13), (45) или (43), (44) следует, что коэффициенты α_1, α_2 действительные или комплексные наряду с a_1, a_2.

Определители матриц (42) равны

$$|C| = (\alpha_2 - \alpha_1)(\partial_{11} + \partial_{22})^2\partial_3, \quad |B| = (A_{44}/2)^2\mu(\alpha_2/a_2 - \alpha_1/a_1)(\partial_{11} + \partial_{22})^2\partial_3 = \\ = (A_{44}/2)A_{11}\mu(\alpha_2 - \alpha_1)(\partial_{11} + \partial_{22})^2\partial_3 = (A_{44}/2)A_{11}\mu|C|, \tag{46}$$

а матрицы C, B (42) являются невырожденными, если $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$. С учетом (42) смещения представляются в виде (30)

$$u_1 = \partial_{13}(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) - \partial_2\varphi_3, \qquad u_2 = \partial_{23}(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) + \partial_1\varphi_3, \\ u_3 = (\partial_{11} + \partial_{22})(\varphi_1 + \varphi_2), \tag{47}$$

при этом функции φ_1, φ_2, φ_3 удовлетворяют уравнениям (38), а функции f_1, f_2, f_3 — уравнениям

$$\frac{A_{44}}{2}\,\partial_{13}\Big(\frac{\alpha_1}{a_1}\,f_1 + \frac{\alpha_2}{a_2}\,f_2\Big) - \partial_2\mu f_3 = 0, \quad \frac{A_{44}}{2}\,\partial_{23}\Big(\frac{\alpha_1}{a_1}\,f_1 + \frac{\alpha_2}{a_2}\,f_2\Big) + \partial_1\mu f_3 = 0, \\ (\partial_{11} + \partial_{22})(f_1 + f_2) = 0. \tag{48}$$

Первые два уравнения (48) являются условиями Коши — Римана для аналитической функции

$$\frac{A_{44}}{2}\,\partial_3\Big(\frac{\alpha_1}{a_1}\,f_1 + \frac{\alpha_2}{a_2}\,f_2\Big) + i\mu f_3 = 2\partial_3 g(z, x_3) \tag{49}$$

комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$, $i = \sqrt{-1}$. Из (49) находим

$$\frac{A_{44}}{2}\,\partial_3\Big(\frac{\alpha_1}{a_1}\,f_1 + \frac{\alpha_2}{a_2}\,f_2\Big) - i\mu f_3 = 2\partial_3\,\overline{g(z, x_3)},$$

$$\frac{A_{44}}{2}\,\partial_3\Big(\frac{\alpha_1}{a_1}\,f_1 + \frac{\alpha_2}{a_2}\,f_2\Big) = \partial_3(g(z, x_3) + \overline{g(z, x_3)}\,);$$

$$\frac{A_{44}}{2}\Big(\frac{\alpha_1}{a_1}\,f_1 + \frac{\alpha_2}{a_2}\,f_2\Big) = g(z, x_3) + \overline{g(z, x_3)} + g_3(x_1, x_2), \\ \mu f_3 = i\partial_3(\,\overline{g(z, x_3)} - g(z, x_3)). \tag{50}$$

Здесь $g(z, x_3)$, $g_3(x_1, x_2)$ — произвольные функции соответствующих аргументов. Из третьего уравнения (48) следует, что $f_1 + f_2$ — гармоническая функция по x_1, x_2 и ее можно представить в виде

$$f_1 + f_2 = \psi(z, x_3) + \overline{\psi(z, x_3)}, \tag{51}$$

где $\psi(z, x_3)$ — аналитическая по $z = x_1 + ix_2$ функция. Из (50), (51) получаем

$$f_1 = \frac{1}{A_{11}(\alpha_1 - \alpha_2)}\,\Big[g(z, x_3) + \overline{g(z, x_3)} + g_3(x_1, x_2) - \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2}{a_2}\,(\psi(z, x_3) + \overline{\psi(z, x_3)}\,)\Big],$$

$$f_2 = \frac{1}{A_{11}(\alpha_1 - \alpha_2)}\,\Big[\frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_1}{a_1}\,(\psi(z, x_3) + \overline{\psi(z, x_3)}\,) - (g(z, x_3) + \overline{g(z, x_3)} + g_3(x_1, x_2))\Big], \tag{52}$$

$$f_3 = \frac{i}{\mu}\,\partial_3(\,\overline{g(z, x_3)} - g(z, x_3)), \qquad \alpha_2 \neq \alpha_1.$$

Выражения (52) являются решением уравнений (48), т. е. ядром оператора B (42). С учетом матриц (42) находим оператор симметрии

$$S = CB' = \begin{bmatrix} \dfrac{A_{44}}{2}\Big(\dfrac{\alpha_1^2}{a_1} + \dfrac{\alpha_2^2}{a_2}\Big)\,\partial_{1133} + \mu\,\partial_{22} & \Big(\dfrac{A_{44}}{2}\Big(\dfrac{\alpha_1^2}{a_1} + \dfrac{\alpha_2^2}{a_2}\Big)\,\partial_{33} - \mu\Big)\,\partial_{12} & \dfrac{A_{44}}{2}\,(\alpha_1 + \alpha_2)\,(\partial_{11} + \partial_{22})\,\partial_{13} \\ \Big(\dfrac{A_{44}}{2}\Big(\dfrac{\alpha_1^2}{a_1} + \dfrac{\alpha_2^2}{a_2}\Big)\,\partial_{33} - \mu\Big)\,\partial_{12} & \dfrac{A_{44}}{2}\Big(\dfrac{\alpha_1^2}{a_1} + \dfrac{\alpha_2^2}{a_2}\Big)\,\partial_{2233} + \mu\,\partial_{11} & \dfrac{A_{44}}{2}\,(\alpha_1 + \alpha_2)(\partial_{11} + \partial_{22})\,\partial_{23} \\ \dfrac{A_{44}}{2}\Big(\dfrac{\alpha_1}{a_1} + \dfrac{\alpha_2}{a_2}\Big)\,(\partial_{11} + \partial_{22})\,\partial_{13} & \dfrac{A_{44}}{2}\Big(\dfrac{\alpha_1}{a_1} + \dfrac{\alpha_2}{a_2}\Big)\,(\partial_{11} + \partial_{22})\,\partial_{23} & A_{44}(\partial_{11} + \partial_{22})^2 \end{bmatrix}.$$

Недостаток представлений смещений в виде (37) или (47) заключается в том, что они непригодны в случае $a_2 = a_1$, так как при этом определители (36), (46) матриц C, B обращаются в нуль. Кроме того, представления (37), (47) не переходят в представления смещений для случая динамических уравнений (7).

Наиболее естественное представление смещений можно получить с использованием матриц C, B вида

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & \alpha_2\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & \alpha_2\partial_{23} \\ k_1\partial_3 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & (\alpha_2/a_2)\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & (\alpha_2/a_2)\partial_{23} \\ a_2k_1\partial_3 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & A_{44}/2 \end{bmatrix}, \qquad (53)$$

при этом в матрице D (32) нужно поменять местами D_2 и D_3, т. е. $D = \operatorname{diag}(D_1, D_3, D_2)$. В (53) величины k_1, α_2 соответствуют корням a_1, a_2 и определяются формулами (34), (35), (44), (45).

Определители матриц (53) равны

$$|C| = (\partial_{11} + \partial_{22} - k_1\alpha_2\partial_{33})(\partial_{11} + \partial_{22}), \qquad |B| = (A_{44}/2)A_{11}\mu|C|$$

и не вырождаются при $a_2 = a_1$. С учетом (53) смещения представляются в виде (30)

$$u_1 = \partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 + \alpha_2\,\partial_{13}\varphi_3, \qquad u_2 = \partial_2\varphi_1 + \partial_1\varphi_2 + \alpha_2\,\partial_{23}\varphi_3,$$
$$u_3 = k_1\,\partial_3\varphi_1 + (\partial_{11} + \partial_{22})\varphi_3, \qquad (54)$$

при этом функции φ_1, φ_2, φ_3 удовлетворяют уравнениям вида (38) $D_1\varphi_1 = f_1$, $D_3\varphi_2 = f_2$, $D_2\varphi_3 = f_3$, а функции f_1, f_2, f_3 — уравнениям

$$A_{11}\,\partial_1 f_1 - \mu\partial_2 f_2 + \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2}{a_2}\,\partial_{13}f_3 = 0, \quad A_{11}\,\partial_2 f_1 + \mu\,\partial_1 f_2 + \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2}{a_2}\,\partial_{23}f_3 = 0,$$
$$A_{11}a_2k_1\,\partial_3 f_1 + \frac{A_{44}}{2}\,(\partial_{11} + \partial_{22})f_3 = 0. \qquad (55)$$

Из уравнений (55) получаем

$$A_{11}f_1 = -\frac{\alpha_2}{a_2}\,\partial_3\Big(\frac{A_{44}}{2}\,f_3\Big) + g(z,x_3) + \overline{g(z,x_3)}, \qquad \mu f_2 = i(\,\overline{g(z,x_3)} - g(z,x_3)),$$

$$(\partial_{11} + \partial_{22} - k_1\alpha_2\,\partial_{33})((A_{44}/2)f_3) + a_2k_1\,\partial_3(g(z,x_3) + \overline{g(z,x_3)}\,) = 0,$$

где $g(z,x_3)$ — аналитическая по $z = x_1 + ix_2$, $i = \sqrt{-1}$ функция. С учетом матриц (53) находим оператор симметрии

$$S = CB' = \left[\begin{matrix} \Big(A_{11} + \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2^2}{a_2}\,\partial_{33}\Big)\,\partial_{11} + \mu\,\partial_{22} \\ \Big(A_{11} - \mu + \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2^2}{a_2}\,\partial_{33}\Big)\,\partial_{12} \\ \Big(A_{11}k_1 + \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2}{a_2}\,(\partial_{11} + \partial_{22})\Big)\,\partial_{13} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \Big(A_{11} - \mu + \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2^2}{a_2}\,\partial_{33}\Big)\partial_{12} & \Big(A_{11}a_2k_1 + \frac{A_{44}}{2}\,\alpha_2\,(\partial_{11} + \partial_{22})\Big)\partial_{13} \\ \Big(A_{11} + \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2^2}{a_2}\,\partial_{33}\Big)\,\partial_{22} + \mu\,\partial_{11} & \Big(A_{11}a_2k_1 + \frac{A_{44}}{2}\,\alpha_2\,(\partial_{11} + \partial_{22})\Big)\,\partial_{23} \\ \Big(A_{11}k_1 + \frac{A_{44}}{2}\,\frac{\alpha_2}{a_2}\,(\partial_{11} + \partial_{22})\Big)\,\partial_{23} & A_{11}a_2k_1^2\partial_{33} + \frac{A_{44}}{2}\,(\partial_{11} + \partial_{22})^2 \end{matrix}\right].$$

Если модули упругости такие, что

$$\frac{A_{31}}{A_{11}} = \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}} \tag{56}$$

(линия l_2 на рис. 2), то из (35) следует $k_1 = k_2 = 1$. Если выполняется равенство

$$\frac{A_{31}}{A_{11}} = -\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} \tag{57}$$

(линия l_1 на рис. 2), то из (35) следует $k_1 = k_2 = -1$. При выполнении равенств (56), (57) не только $k_1 = k_2$, но и

$$a_1 = a_2 = \frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}} = \frac{A_{44} + A_{31}}{A_{11}} = \frac{\sqrt{A_{11}A_{33}}}{A_{11}} =$$

$$= \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} = \frac{A_{33}}{A_{44} + A_{31}} = \frac{A_{33}}{\sqrt{A_{11}A_{33}}};$$

$$a_1 = a_2 = \frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}} = -\frac{A_{31}}{A_{11}} = \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}}.$$

В случае $a_1 = a_2$, $k_1 = k_2 = 1$ из (44) получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = -a_1$, при этом матрицы (53) принимают вид

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -a_1\,\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & -a_1\,\partial_{23} \\ \partial_3 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & -\partial_{23} \\ a_1\,\partial_3 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & A_{44}/2 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Определители матриц (58) не обращаются в нуль. Смещения представляются формулами (54), (38), (55) при соответствующих значениях коэффициентов с учетом того, что вместо D_2 используется D_3 и наоборот. Допустим также вариант, когда $a_1 = a_2 = a_3$. В этом случае трансверсально-изотропный материал с матрицей модулей упругости вида (1) конгруэнтен изотропному материалу [9, 16].

Если в (58) $a_1 = 1$, то матрица C и первая матрица в выражении для B совпадают, а столбцы матрицы оказываются ортогональными друг другу и являются собственными векторами тензора Кристоффеля (9), (11). Эти матрицы дают представление смещений и для динамических уравнений (7), (11).

В случае $a_1 = a_2$, $k_1 = k_2 = -1$ из (44) получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = a_1$, при этом матрицы (53) принимают вид

$$C = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & a_1\,\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & a_1\,\partial_{23} \\ -\partial_3 & 0 & \partial_{11}+\partial_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & \partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & \partial_{23} \\ -a_1\,\partial_3 & 0 & \partial_{11}+\partial_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & A_{44}/2 \end{bmatrix}. \qquad (59)$$

Определители матриц (59) не обращаются в нуль. Смещения представляются формулами (54), (38), (55) при соответствующих значениях коэффициентов с учетом того, что вместо D_2 используется D_3 и наоборот. Для матриц (59) допустимы случаи $a_1 = 1$ (при этом получается представление смещений для динамических уравнений (7), (11) [17]) и $a_1 = a_2 = a_3$, когда материал конгруэнтен изотропному материалу [9, 16].

Для динамических уравнений (7), (11) столбцы матрицы C и первой матрицы в выражении для B (53) должны совпадать. Тогда из (53), (13) следует, что $a_2 = 1$, $a_1 = A_{33}/A_{11}$, при этом из (44) находим [18]

$$\alpha_2 = \frac{\varkappa}{A_{44}/2 - A_{11}} = \frac{A_{44}/2 - A_{33}}{\varkappa}. \qquad (60)$$

Отсюда получаем условие [6, 19–22]

$$(A_{44}/2 + A_{31})^2 = (A_{44}/2 - A_{11})(A_{44}/2 - A_{33}). \qquad (61)$$

Из (34), (60) следует $k_1 = -\alpha_2$, матрицы (53) принимают вид [17, 18]

$$C = B = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & -k_1\,\partial_{13} \\ \partial_2 & \partial_1 & -k_1\,\partial_{23} \\ k_1\,\partial_3 & 0 & \partial_{11}+\partial_{22} \end{bmatrix}. \qquad (62)$$

В данном случае вторая матрица в выражении для B (53) объединяется с матрицей D.

Итак, при выполнении условия (61) или (60) с учетом (62) решение динамических уравнений (7), (11) представляется в виде (30)

$$\begin{gathered} u_1 = \partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 - k_1\,\partial_{13}\varphi_3, \qquad u_2 = \partial_2\varphi_1 + \partial_1\varphi_2 - k_1\,\partial_{23}\varphi_3, \\ u_3 = k_1\,\partial_3\varphi_1 + (\partial_{11}+\partial_{22})\varphi_3, \end{gathered} \qquad (63)$$

при этом функции φ_1, φ_2, φ_3 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} [A_{11}(\partial_{11}+\partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_1 = f_1, \\ [(1/2)(A_{11} - A_{21})(\partial_{11}+\partial_{22}) + (A_{44}/2)\partial_{33} - \rho c^2\partial_{44}]\varphi_2 = f_2, \\ [(A_{44}/2)\partial_{kk} - \rho c^2\partial_{44}]\varphi_3 = f_3, \end{gathered} \qquad (64)$$

а функции f_1, f_2, f_3 — уравнениям

$$\begin{gathered} \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 - k_1\,\partial_{13} f_3 = 0, \quad \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 - k_1\,\partial_{23} f_3 = 0, \\ k_1\,\partial_3 f_1 + (\partial_{11}+\partial_{22}) f_3 = 0. \end{gathered} \qquad (65)$$

Представление (63)–(65) решения динамических уравнений (7), (11) аналогично представлению (54), (55) решения статических уравнений (10), (11). Для матриц (62) оператор симметрии $S = CB' = CC'$ приведен в [18]. Столбцы матрицы (62) ортогональны друг другу и являются собственными векторами тензора Кристоффеля (9), (11), а собственные значения даются выражениями D_1, D_3, D_2 (64). При замене ∂_k на n_k находим фазовые скорости, соответствующие волновой нормали n_k:

$$\rho c_1^2 = A_{11}(n_1^2 + n_2^2) + A_{33}n_3^2 = A_{11} + (A_{33} - A_{11})n_3^2,$$
$$\rho c_3^2 = (1/2)(A_{11} - A_{21})(n_1^2 + n_2^2) + (A_{44}/2)n_3^2 = \mu + (A_{44}/2 - \mu)n_3^2,$$
$$\rho c_2^2 = (A_{44}/2)n_k n_k = A_{44}/2.$$

Выше предполагалось, что параметр $\varkappa = A_{44}/2 + A_{31} \neq 0$. Однако если

$$A_{31} = -A_{44}/2, \tag{66}$$

то из (13) получаем $a_1 = A_{44}/(2A_{11})$, $a_2 = 2A_{33}/A_{44}$, при этом матрицы C, B можно записать в виде [18]

$$C = B = \begin{bmatrix} \partial_1 & -\partial_2 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{67}$$

С учетом (67) смещения представляются в виде (30)

$$\begin{gathered} u_1 = \partial_1\varphi_1 - \partial_2\varphi_2, \quad u_2 = \partial_2\varphi_1 + \partial_1\varphi_2, \quad u_3 = \varphi_3; \\ [A_{11}(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\partial_{44}]\varphi_1 = f_1, \\ [(1/2)(A_{11} - A_{21})(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_2 = f_2, \\ [(A_{44}/2)(\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33}\,\partial_{33} - \rho c^2\,\partial_{44}]\varphi_3 = 0; \\ \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 = 0, \quad \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 = 0, \quad f_3 = 0. \end{gathered} \tag{68}$$

Столбцы матрицы (67) являются собственными векторами тензора Кристоффеля (9), (11), а собственные значения даются выражениями D_1, D_3, D_2 (68). При замене ∂_k на n_k получаем фазовые скорости, соответствующие волновой нормали n_k:

$$\rho c_1^2 = A_{11}(n_1^2 + n_2^2) + (A_{44}/2)n_3^2 = A_{11} + (A_{44}/2 - A_{11})n_3^2,$$
$$\rho c_3^2 = \mu(n_1^2 + n_2^2) + (A_{44}/2)n_3^2 = \mu + (A_{44}/2 - \mu)n_3^2,$$
$$\rho c_2^2 = (A_{44}/2)(n_1^2 + n_2^2) + A_{33}n_3^2 = A_{44}/2 + (A_{33} - A_{44}/2)n_3^2.$$

Очевидно, что вектор $c_{j3} = (-\partial_2,\, \partial_1,\, 0)$ и выражение (12) $D_3 = \mu(\partial_{11}+\partial_{22})+(A_{44}/2)\,\partial_{33}$ являются собственным вектором и собственным значением тензора Кристоффеля (9), (11) при любых значениях модулей A_{ij}. Выражения (12) для D_1, D_2 являются собственными значениями тензора Кристоффеля (9), (11), только если выполняются условия (61) или (66) (см. (64), (68)). Найдем собственные значения D_1, D_2 акустического тензора (9), (11) в общем случае (ср. с [1, 6]):

$$\begin{aligned} D_{1,2} = (1/2)\big[&(A_{44}/2 + A_{11})(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{33} + A_{44}/2)\partial_{33} \pm \\ &\pm \sqrt{[(A_{44}/2 - A_{11})(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{33} - A_{44}/2)\partial_{33}]^2 + 4\varkappa^2(\partial_{11} + \partial_{22})\partial_{33}}\,\big]. \end{aligned} \tag{69}$$

При выполнении условия (61) или (66) из (69) следуют выражения (64) или (68). При замене в (69) ∂_k на n_k формула (69) дает выражения для фазовых скоростей ρc_1^2, ρc_2^2, соответствующих волновой нормали n_k.

Собственные векторы (поляризации) акустического тензора (9), (11) можно записать в виде матрицы $C = B$ (ср. с [1, 6])

$$C = \begin{bmatrix} \varkappa\,\partial_{13} & -\partial_2 & -\partial_1\,t_1 \\ \varkappa\,\partial_{23} & \partial_1 & -\partial_2 t_1 \\ t_1 & 0 & \varkappa\,(\partial_{11}+\partial_{22})\partial_3 \end{bmatrix} \quad\leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} \varkappa\,\partial_{13} & -\partial_2 & \varkappa\,\partial_{13} \\ \varkappa\,\partial_{23} & \partial_1 & \varkappa\,\partial_{23} \\ t_1 & 0 & t_2 \end{bmatrix}, \tag{70}$$

где

$$t_{1,2} = (1/2)\big[(A_{44}/2 - A_{11})(\partial_{11}+\partial_{22}) + (A_{33} - A_{44}/2)\partial_{33} \pm$$
$$\pm \sqrt{[(A_{44}/2 - A_{11})(\partial_{11}+\partial_{22}) + (A_{33} - A_{44}/2)\partial_{33}]^2 + 4\varkappa^2(\partial_{11}+\partial_{22})\partial_{33}}\ \big] \text{ —}$$

корни уравнения

$$t^2 - [(A_{44}/2 - A_{11})(\partial_{11}+\partial_{22}) + (A_{33} - A_{44}/2)\,\partial_{33}]t - 4\varkappa^2(\partial_{11}+\partial_{22})\,\partial_{33} = 0.$$

Столбцы матриц (70) ортогональны друг другу, а определители равны

$$|C| = (\partial_{11}+\partial_{22})\,[t_1^2 + \varkappa^2(\partial_{11}+\partial_{22})\,\partial_{33}], \quad |C| = \varkappa\,\partial_3(\partial_{11}+\partial_{22})(t_2 - t_1).$$

Очевидно, что при рассмотрении случая распространения волн в формулах (69), (70) и последующих нужно заменять символы ∂_k на компоненты волновой нормали n_k. При выполнении условия (61) или (66) матрицы (70) переходят в матрицу (62) или (67).

Найдем продольные нормали [1], т. е. волновые нормали, для которых $p_j = n_j$. В направлении продольных нормалей распространяется чисто продольная волна. Для акустического тензора (9), (11) получаем уравнения для определения продольных нормалей

$$\begin{gathered} [A_{11}(n_1^2+n_2^2) + (A_{31}+A_{44})n_3^2 - \lambda]n_1 = 0, \\ [A_{11}(n_1^2+n_2^2) + (A_{31}+A_{44})n_3^2 - \lambda]n_2 = 0, \\ [(A_{31}+A_{44})(n_1^2+n_2^2) + A_{33}n_3^2 - \lambda]n_3 = 0, \\ n_1^2+n_2^2+n_3^2 = 1. \end{gathered} \tag{71}$$

Система (71) имеет следующие решения:

1) $n_1^2 = 1,\ \ n_2 = 0,\ \ n_3 = 0,\ \ \lambda = A_{11}$;

2) $n_1 = 0,\ \ n_2^2 = 1,\ \ n_3 = 0,\ \ \lambda = A_{11}$;

3) $n_1 = 0,\ \ n_2 = 0,\ \ n_3^2 = 1,\ \ \lambda = A_{33}$;

4) $n_1 = 0,\ \ n_2^2 = \dfrac{A_{33} - A_{31} - A_{44}}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31}+A_{44})},\ \ n_3^2 = \dfrac{A_{11} - A_{31} - A_{44}}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31}+A_{44})},$

$$\lambda = \frac{A_{11}A_{33} - (A_{31}+A_{44})^2}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31}+A_{44})}. \tag{72}$$

Решение (72) имеет место, если

$$d = A_{11} + A_{33} - 2(A_{31}+A_{44}) \ne 0$$

и выполняются неравенства

$$0 < n_2^2 < 1, \quad 0 < n_3^2 < 1, \quad 0 < \lambda. \tag{73}$$

Если $d = 0$, то система (71) не имеет решения вида (72). Неравенства (73) выполняются, если

$$\begin{gathered} A_{31} + A_{44} < A_{33}, \quad A_{31} + A_{44} < A_{11}, \\ -\sqrt{A_{11}A_{33}} < A_{31} + A_{44} < \sqrt{A_{11}A_{33}} \end{gathered} \tag{74}$$

или

$$A_{33} < A_{31} + A_{44}, \quad A_{11} < A_{31} + A_{44}, \quad \sqrt{A_{11}A_{33}} < A_{31} + A_{44}. \tag{75}$$

Имеем также следующие решения системы (71):

$$\begin{gathered} 5) \qquad n_1^2 = \frac{A_{33} - A_{31} - A_{44}}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44})}, \quad n_2 = 0, \\ n_3^2 = \frac{A_{11} - A_{31} - A_{44}}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44})}, \qquad \lambda = \frac{A_{11}A_{33} - (A_{31} + A_{44})^2}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44})}; \end{gathered} \tag{76}$$

(для (76) должны выполняться неравенства (74) или (75));

$$6) \qquad n_1 \neq 0, \quad n_2 \neq 0, \quad n_3 = 0, \quad \lambda = A_{11} \tag{77}$$

(продольная нормаль $n_i = (n_1,\, n_2,\, 0)$ — любое направление в плоскости $n_3 = 0$);

$$\begin{gathered} 7) \qquad n_1^2 + n_2^2 = \frac{A_{33} - A_{31} - A_{44}}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44})}, \quad n_3^2 = \frac{A_{11} - A_{31} - A_{44}}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44})}, \\ \lambda = \frac{A_{11}A_{33} - (A_{31} + A_{44})^2}{A_{11} + A_{33} - 2(A_{31} + A_{44})}, \quad n_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{gathered} \tag{78}$$

причем для (78) должны выполняться неравенства (74) или (75).

Из (78) как частные случаи следуют решения (72), (76), из (77) — решения 1, 2, но и из (78) при $A_{11} - A_{31} - A_{44} = 0$ следует решение (77). В решениях 1–7 выражения $\rho c^2 = \lambda$ дают значения скорости продольных волн. В [1] рассмотрены не все варианты 1–7 продольных нормалей.

Уравнения (71) являются условиями экстремума [1] формы $\tilde{A} = A_{ijkl}n_in_jn_kn_l$ при $n_in_i = 1$ в случае трансверсально-изотропной среды с модулями (1). При замене модулей упругости A_{ijkl} (A_{ij}) на коэффициенты податливости a_{ijkl} (a_{ij}) решения 1–7 системы (71) определяют направления, в которых модуль Юнга $1/E_n = a_{ijkl}n_in_jn_kn_l$ принимает экстремальные значения $1/E_n = \lambda$ (см. также [23, 24]). В общем случае анизотропии существует ортогональная система координат, образованная продольными нормалями, в которой шесть компонент A_{42}, A_{43}, A_{51}, A_{53}, A_{61}, A_{62} обращаются в нуль, при этом остается только 15 независимых модулей упругости A_{ij} [25].

Вернемся к статическим уравнениям (10), (11). Можно показать, что вектору $c_{j3} = (-\partial_2,\, \partial_1,\, 0)$ ортогонален вектор вида

$$c_j = (\alpha_3\partial_{13},\ \alpha_3\partial_{23},\ \alpha_{11}(\partial_{11} + \partial_{22}) + \alpha_{33}\partial_{33}). \tag{79}$$

Если в (79) $\alpha_{11} = 0$, то получаем известное решение Эллиотта [8] (32), (37)–(39). Если $\alpha_{33} = 0$, то получаем решение (42), (47), (48). Объединяя эти решения, получаем решение (53)–(55). Если в (79) $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{33} \neq 0$, то соотношение (29) принимает вид

$$L \begin{bmatrix} -(A_{44}/2 + A_{31})\,\partial_{13} & -\partial_2 \\ -(A_{44}/2 + A_{31})\,\partial_{23} & \partial_1 \\ A_{11}(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_2 \\ 0 & \partial_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1D_2 & 0 \\ 0 & D_3 \end{bmatrix}, \tag{80}$$

где D_1D_2, D_3 даются формулами (12), а матрицы C, B уже не являются квадратными. С учетом (80) смещения представляются в виде (30)

$$\begin{gathered} u_1 = -(A_{44}/2 + A_{31})\,\partial_{13}\varphi_1 - \partial_2\varphi_2, \quad u_2 = -(A_{44}/2 + A_{31})\,\partial_{23}\varphi_1 + \partial_1\varphi_2, \\ u_3 = [A_{11}(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33}]\varphi_1; \end{gathered} \tag{81}$$

$$D_1D_2\varphi_1 = \frac{1}{2}\,A_{44}A_{11}\Big\{\Big(\partial_{11} + \partial_{22} + \frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}}\,\partial_{33}\Big)^2 + \\ + \Big[\frac{A_{33}}{A_{11}} - \Big(\frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}}\Big)^2\Big]\partial_{3333}\Big\}\varphi_1 = 0, \tag{82}$$

$$D_3\varphi_2 = [\mu(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33}]\varphi_2 = f(x_3),$$

где $(f_1,\ f_2) = (0,\ f(x_3))$ — ядро оператора B из (80). Представление (81), (82) соответствует решению Лехницкого — Ху — Новацкого [14, 15, 26–28]. С учетом матриц (80) находим оператор симметрии

$$S = CB' = \begin{bmatrix} \partial_{22} & -\partial_{12} & -(A_{44}/2 + A_{31})\,\partial_{13} \\ -\partial_{12} & \partial_{11} & -(A_{44}/2 + A_{31})\,\partial_{23} \\ 0 & 0 & A_{11}\,(\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2)\,\partial_{33} \end{bmatrix}.$$

Если модули A_{ij} такие, что вместо (22) выполняется неравенство

$$\frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}} - \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} = \frac{(\sqrt{A_{11}A_{33}} + A_{31})(\sqrt{A_{11}A_{33}} - A_{31} - A_{44})}{A_{44}A_{11}} < 0, \tag{83}$$

то корни a_1, a_2 (13) комплексные:

$$\begin{gathered} a_1 = \frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}} + i\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}} - \Big[\frac{A_{11}A_{33} - (A_{44} + A_{31})A_{31}}{A_{44}A_{11}}\Big]^2} = \alpha + i\beta, \\ a_2 = \overline{a_1} = \alpha - i\beta, \qquad \beta > 0, \quad i = \sqrt{-1}. \end{gathered} \tag{84}$$

Для реальных материалов $A_{11} > 0$, $A_{44} > 0$, поэтому из (83) следуют неравенства

$$\frac{A_{31}}{A_{11}} < -\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}}, \qquad \frac{A_{31}}{A_{11}} < \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}}; \tag{85}$$

$$-\sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} < \frac{A_{31}}{A_{11}}, \qquad \sqrt{\frac{A_{33}}{A_{11}}} - \frac{A_{44}}{A_{11}} < \frac{A_{31}}{A_{11}}, \tag{86}$$

при выполнении которых корни a_1, a_2 (84) являются комплексными. Неравенствам (85), (86) на рис. 2 соответствуют области IV, III. Представление (81), (82) имеет смысл использовать в тех случаях, когда выполняются неравенства (85), (86), т. е. когда корни a_1, a_2 (84) комплексные, чтобы не использовать комплексные величины и функции, но при этом оператор D_1D_2 (82) содержит производные четвертого порядка.

Приведем некоторые примеры. Пусть значения модулей следующие (все A_{ij} отнесены к A_{11}):

1) $A_{11} = 1$, $A_{21} = -0{,}5$, $A_{31} = 2$, $A_{33} = 17$, $A_{44} = 2$, при этом корни $a_1 = 6{,}303$, $a_2 = 2{,}697$ действительные;

2) $A_{11} = 1$, $A_{21} = -0{,}5$, $A_{31} = 2$, $A_{33} = 17$, $A_{44} = 3$, при этом корни $a_1 = 2{,}333 + 3{,}399i$, $a_2 = 2{,}333 - 3{,}399i$ комплексные. Отметим, что в случаях 1, 2 матрицы A_{ij} являются положительно-определенными. В [6] приведены другие значения модулей материалов, обозначенных через $C1, \ldots, C4$, для которых корни a_1, a_2 также являются комплексными.

Существуют также реальные материалы, для которых корни a_1, a_2 оказываются комплексными, например:

3) для цинка [1] (см. [8])

$$A_{11} = 1, \quad A_{21} = 0{,}212, \quad A_{31} = 0{,}311, \quad A_{33} = 0{,}379, \quad A_{44} = 0{,}476,$$
$$a_1 = 0{,}282 + 0{,}547i, \qquad a_2 = 0{,}282 - 0{,}547i;$$

4) для кадмия [6]

$$A_{11} = 1, \quad A_{21} = 0{,}362, \quad A_{31} = 0{,}353, \quad A_{33} = 0{,}439, \quad A_{44} = 0{,}338,$$
$$a_1 = 0{,}576 + 0{,}328i, \quad a_2 = 0{,}576 - 0{,}328i;$$

5) для борида титана TiB_2 [6]

$$A_{11} = 1, \quad A_{21} = 0{,}594, \quad A_{31} = 0{,}464, \quad A_{33} = 0{,}638, \quad A_{44} = 0{,}725,$$
$$a_1 = 0{,}119 + 0{,}790i, \qquad a_2 = 0{,}119 - 0{,}790i.$$

Чтобы выявить все материалы с модулями A_{ij}, допускающими комплексные корни a_1, a_2, необходимо для известных справочных значений модулей A_{ij} проверить выполнение неравенств (85), (86).

С учетом (84) матрицу D, соответствующую представлению (53), можно записать в виде

$$D = \begin{bmatrix} \partial_{11} + \partial_{22} + \alpha\,\partial_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{11} + \partial_{22} + a_3\,\partial_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{11} + \partial_{22} + \alpha\,\partial_{33} \end{bmatrix} +$$
$$+\, i \begin{bmatrix} \beta\,\partial_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\,\partial_{33} \end{bmatrix} = D_{(1)} + iD_{(2)}.$$

Здесь $D_{(1)}$, $D_{(2)}$ — действительная и мнимая части матрицы D. Аналогично пусть

$$C = C_{(1)} + iC_{(2)}, \qquad B = B_{(1)} + iB_{(2)},$$

тогда соотношение (29) принимает вид

$$L(C_{(1)} + iC_{(2)}) = (B_{(1)} + iB_{(2)})(D_{(1)} + iD_{(2)}) =$$
$$= B_{(1)}D_{(1)} - B_{(2)}D_{(2)} + i(B_{(2)}D_{(1)} + B_{(1)}D_{(2)}).$$

Сравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$LC_{(1)} = B_{(1)}D_{(1)} - B_{(2)}D_{(2)}, \qquad LC_{(2)} = B_{(2)}D_{(1)} + B_{(1)}D_{(2)}. \tag{87}$$

По формулам (30) находим представление смещений (функции φ, f также считаем комплексными)

$$u = (C_{(1)} + iC_{(2)})(\varphi_{(1)} + i\varphi_{(2)}) = C_{(1)}\varphi_{(1)} - C_{(2)}\varphi_{(2)} + i(C_{(2)}\varphi_{(1)} + C_{(1)}\varphi_{(2)}).$$

Так как $u = \overline{u}$ — действительная функция, то должно выполняться равенство

$$C_{(2)}\varphi_{(1)} + C_{(1)}\varphi_{(2)} = 0, \tag{88}$$

при этом

$$u = C_{(1)}\varphi_{(1)} - C_{(2)}\varphi_{(2)}. \tag{89}$$

Помимо соотношений (87), (88) выполняются последние два уравнения (30):

$$(D_{(1)} + iD_{(2)})(\varphi_{(1)} + i\varphi_{(2)}) = f_{(1)} + if_{(2)}, \quad (B_{(1)} + iB_{(2)})(f_{(1)} + if_{(2)}) = 0,$$

из которых, отделяя действительные и мнимые части, получаем

$$D_{(1)}\varphi_{(1)} - D_{(2)}\varphi_{(2)} = f_{(1)}, \quad D_{(2)}\varphi_{(1)} + D_{(1)}\varphi_{(2)} = f_{(2)}; \tag{90}$$

$$B_{(1)}f_{(1)} - B_{(2)}f_{(2)} = 0, \quad B_{(2)}f_{(1)} + B_{(1)}f_{(2)} = 0. \tag{91}$$

Итак, в случае комплексных корней a_1, a_2 (84) смещения представляются в форме (89), причем соответствующие матрицы и функции связаны уравнениями (87), (88), (90), (91). Во всех вариантах представления смещений напряжения записываются в соответствии с обобщенным законом Гука (3).

Таким образом, в работе рассмотрены все варианты диагонализации трехмерной системы уравнений (10), (11) в случае трансверсально-изотропных упругих сред. Даны новые представления смещений через потенциальные функции, приведены формулы производства (операторы симметрии) новых решений. Установлены все ограничения на модули упругости, при которых обеспечиваются эллиптичность уравнений и существование соответствующих корней. Отмечены случаи, когда имеет место переход к динамическим уравнениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
2. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75. С. 113–125.
3. **Остросаблин Н. И.** О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 71. С. 82–96.
4. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
5. **Остросаблин Н. И.** Линейные инвариантные неприводимые разложения тензора четвертого ранга модулей упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2002. Вып. 120. С. 149–160.
6. **Chadwick P.** Wave propagation in transversely isotropic elastic media. 1. Homogeneous plane waves // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1989. V. 422, N 1862. P. 23–66.
7. **Kröner E.** Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen // Z. Phys. 1953. Bd 136, H. 4. S. 402–410.
8. **Elliott H. A.** Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1948. V. 44, N 4. P. 522–533.
9. **Lodge A. S.** The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955. V. 8, N 2. P. 211–225.
10. **Chiriţă S., Danescu A., Ciarletta M.** On the strong ellipticity of the anisotropic linearly elastic materials // J. Elast. 2007. V. 87, N 1. P. 1–27.
11. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
12. **Остросаблин Н. И.** Операторы симметрии и общие решения уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 5. С. 98–104.
13. **Олвер П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

14. **Wang M. Z., Wang W.** Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity // Intern. J. Solids Struct. 1995. V. 32, N 3/4. P. 501–513.
15. **Wang W., Shi M. X.** On the general solutions of transversely isotropic elasticity // Intern. J. Solids Struct. 1998. V. 35, N 25. P. 3283–3297.
16. **Остросаблин Н. И.** Об аффинных преобразованиях уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 4. С. 124–134.
17. **Остросаблин Н. И.** Об уравнениях линейной теории упругости анизотропных материалов, сводящихся к трем независимым волновым уравнениям // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 143–150.
18. **Остросаблин Н. И.** Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории упругости к диагональному виду // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 112–122.
19. **Carrier G. F.** The propagation of waves in orthotropic media // Quart. Appl. Math. 1946. V. 4, N 2. P. 160–165.
20. **Gassmann F.** Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media // Pure Appl. Geophys. 1964/II. V. 58. P. 63–113.
21. **Chadwick P., Norris A. N.** Conditions under which the slowness surface of an anisotropic elastic material is the union of aligned ellipsoids // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1990. V. 43, N 4. P. 589–603.
22. **Аннин Б. Д.** Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 5–14.
23. **Cazzani A., Rovati M.** Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids // Intern. J. Solids Struct. 2003. V. 40, N 7. P. 1713–1744.
24. **Boulanger P., Hayes M.** On Young's modulus for anisotropic media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62, N 3. P. 819–820.
25. **Остросаблин Н. И.** Канонические модули и общее решение уравнений двумерной статической задачи анизотропной упругости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 3. С. 94–106.
26. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
27. **Hu Hai-chang.** On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Acta Phys. Sinica. 1953. V. 9, N 2. P. 130–147.
28. **Nowacki W.** The stress function in three-dimensional problems concerning an elastic body characterized by transverse isotropy // Bull. Acad. Pol. Sci. 1954. Cl. 4. V. 2, N 1. P. 21–25.

Поступила в редакцию 28/XI 2012 г.