Физика горения и взрыва

2

1966 г.

УДК 536.46

К ТЕПЛОВОЙ ТЕОРИИ ЗАЖИГАНИЯ

В. Н. Вилюнов

(Томск)

Установлению стационарного горения взрывчатых систем предшествует существенно нестационарный процесс зажигания. Критические условия зажигания расчетным путем исследованы в работах [1—7].

При всей универсальности расчетный способ сопряжен с большим объемом вычислений, посильных лишь современной машинной математике. Это замечание относится особенно к тем краевым задачам зажигания, решение которых определяется большим числом параметров, когда качественный анализ результатов расчета затруднен. Между тем, используя специфику задач зажигания и аррениусовскую зависимость тепловыделения от температуры, можно развить приближенную теорию зажигания, которая вскрывает качественную картину явления. Примером является теория зажигания Я. Б. Зельдовича [8—9]. Полученное в работе [9] критическое время зажигания накаленной поверхностью $\tau_з = \theta_0^2/2\pi$ находится в согласии с расчетами [5], где найдено $\tau_з = 0{,}21\,\theta_0^2$.

В настоящей работе в развитие теории Я. Б. Зельдовича приводится еще один вариант приближенной теории зажигания.

Физические соображения. Рассмотрим квазилинейное уравнение одномерной теории зажигания

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Qz}{c} e^{-E/RT} \qquad (1)$$

и однородное начальное условие

$$T(x,\ 0) = T_0 = \text{const},\ 0 \leqslant x < \infty. \qquad (2)$$

Здесь использованы общеупотребительные в теории самовоспламенения обозначения [12]. Из всего бесчисленного множества решений уравнения (1) с условием (2) будем исследовать только те, которые удовлетворяют неравенству $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$ при $t > 0,\ 0 \leqslant x < \infty$. Например, решение уравнения (1) с простейшими условиями

$$x = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_s = \text{const} > 0; \quad x \to \infty, \ \frac{\partial T}{\partial x} \to 0, \quad t > 0 \qquad (3)$$

или

$$x = 0, \ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\,(T_c - T_s) > 0; \ \ x \to \infty, \ \frac{\partial T}{\partial x} \to 0, \ \ t > 0 \qquad (4)$$

удовлетворяет неравенству $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$. Напротив, решение уравнения (1) с краевыми условиями

$$x = 0, \quad T = T_c = \text{const}; \quad x \to \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \to 0 \tag{5}$$

при $\alpha/\lambda \to \infty$ не удовлетворяет этому неравенству на поверхности $x=0$, а поэтому к такому типу краевых задач развиваемый ниже метод не применим. (Здесь T_0 — начальная температура, T_c — температура среды, q_s и T_s — соответственно тепловой поток и температура на поверхности ($x=0$)). Однако к подобным задачам применима теория, развитая в работах [8—9].

Известно, что в задачах зажигания начальная температура взрывчатой системы T_0 значительно ниже некоторой характерной температуры $T_з$, при которой тепловыделение в зоне химической реакции существенно. Можно указать такой температурный интервал $T_п - T_0$ ($T_п$ — температура прогрева), где тепловыделение от химических реакций мало по сравнению с теплом, отводимым в глубь вещества. Этот интервал соответствует области прогрева, где приближенно справедливо линейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant t < t_п, \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{6}$$

Напротив, высоко над пределом зажигания в области температур $T_з > T_п$ скорость тепловыделения велика по сравнению с теплом, отводимым из зоны реакции, поэтому для адиабатической области зажигания имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{Qz}{c} e^{-E/RT}. \tag{7}$$

Очевидно, в общем случае, между областью прогрева и адиабатического зажигания находится смешанная зона, для которой необходимо рассматривать точное уравнение (1). Идея излагаемого метода заключается в том, что на пределе зажигания, по крайней мере, в окрестности $x=0$. кривизна температурного профиля по x меняет знак, поэтому здесь возможна склейка решений уравнений (6) и (7) независимо от смешанной зоны, описываемой уравнением (1).

Пусть $T=\varphi(x, t)$ есть решение уравнения (6) с соответствующими условиями типа (2), (3) или (2), (4), тогда при $x=0$ имеем

$$T=\varphi(0, t). \tag{8}$$

В области адиабатического взрыва решение находится из уравнения (7). Оно зависит от одной произвольной функции, однако для окрестности $x=0$ решение (7) можно представить как однопараметрическое семейство кривых

$$T=f(t, C); \tag{9}$$

к уравнениям (8) и (9) необходимо еще добавить условие сшивки решений

$$\frac{d\varphi(0, t_п)}{dt} = \frac{df(t_п, C)}{dt}. \tag{10}$$

Уравнения (8)—(10) позволяют вычислить искомые параметры: время и температуру прогрева $t_п$, $T_п$ и постоянную интегрирования (C), а, следовательно, время зажигания $(t_з)$. Изложенному можно дать простую геометрическую интерпретацию (рис. 1). Решению линейного уравнения (7) при $x=0$ в плоскости время — температура соответствует кривая L; семейство линий K отвечает различным параметрам C. Касание одной из семейства кривых K с кривой L дает критическое значение параметра C_* и определяет параметры прогрева топлива, а вертикальная асимптота к кривой K_* дает критическое время зажигания. Разность $t_з - t_п$ определяет период индукции зажигания. Сшитые ветви кривых L и K_* дают приближенное решение уравнения (1) при $x=0$.

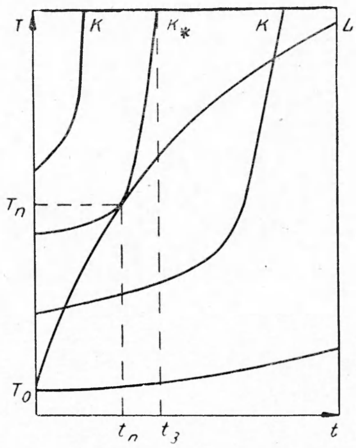

Рис. 1. Характер поведения решений при $x=0$.

Рассмотрим два примера применения метода и выясним границы его применения.

Тепловое зажигание полупрозрачного топлива лучистой энергией. Если топливо полупрозрачно, то существенная доля теплового потока может проходить вглубь, нагревая конденсированное вещество изнутри. С учетом этого обстоятельства к правой части уравнения (1) необходимо добавить положительный член $\frac{nq_s e^{-nx}}{\rho c}$, где q_s — падающий на поверхность $x=0$ тепловой поток лучистой энергии, n — коэффициент ослабления потока (коэффициент диффузного отражения включен в q_s). Величина n зависит от диапазона длин волн источника излучения и материала топлива и обычно определяется из эксперимента.

В безразмерных переменных краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \mu e^{-\mu\xi} + e^{\frac{\theta}{1+\gamma\theta}};$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0 < 0, \quad 0 \leqslant \xi < \infty; \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right|_{\xi\to\infty} = 0. \qquad (11)$$

Здесь

$$\theta = \frac{E}{RT_1^2}(T - T_1), \quad \tau = \frac{t}{t_1}, \quad \xi = \frac{x}{x_1}, \quad x_1 = \sqrt{\varkappa t_1},$$

$$t_1 = \frac{RT_1^2}{E}\frac{c}{Qz}e^{E/RT_1}, \quad \theta_0 = \frac{E}{RT_1^2}(T_0 - T_1), \quad \gamma = \frac{RT_1}{E}.$$

Масштаб температуры находится из условия

$$\frac{\lambda RT_1^2}{Ex_1} = q_s. \qquad (12)$$

Как показали расчеты [7], при таком выборе масштаба влияние параметра γ оказывает слабое влияние на критические параметры зажигания (T_1 близка к $T_п$).

Решение линейного уравнения (пренебрегаем только нелинейным членом) при $x=0$ дает равенство [10]

$$\theta_n = \theta_0 + 2\sqrt{\frac{\tau_n}{\pi}} + \frac{1}{\mu}\left[e^{\mu^2 \tau_n}\Phi^*\left(\mu\sqrt{\tau_n}\right) - 1\right]. \qquad (13)$$

Индексом n отмечаются параметры в точке касания (см. рис. 1). Здесь

$$\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\eta^2}\,d\eta. \qquad (14)$$

Интегрирование уравнения адиабатического зажигания приводит к зависимости

$$\tau_з = \tau_n + (1+\gamma\theta_n)^2(1+2\gamma)\,e^{-\frac{\theta_n}{1+\gamma\theta_n}}, \qquad (15)$$

которая при $\tau_n \to 0$, $\theta_n \to \theta_0$ дает адиабатическое время взрыва, результат, полученный О. М. Тодесом [11]. Наконец, из условия склейки кривых находим

$$\theta_n = (1+\gamma\theta_n)\ln\left[\mu e^{\mu^2\tau_n}\Phi^*\left(\mu\sqrt{\tau_n}\right)\right]. \qquad (16)$$

Уравнения (13)—(16) в параметрической форме представляют решение задачи о зажигании полупрозрачных топлив лучистой энергией. В частности, для непрозрачных топлив $\mu \to \infty$, используя (13) и (16), имеем соотношение

$$\left(1+\gamma\ln\sqrt{\pi\tau_n}\right)\left(\theta_0 + 2\sqrt{\frac{\tau_n}{\pi}}\right) + \ln\sqrt{\pi\tau_n} = 0, \qquad (17)$$

которое совместно с (15) определяет $\tau_з$.

На рис. 2 представлена зависимость $\lg\tau_з$ от $\lg\,|\theta_0|$ для различных значений μ, найденная из (13)—(16). Совпадение теории и расчета вполне удовлетворительное. В исследуемом диапазоне изменения θ_0 отклонение не превышает 7%. Для $\gamma=0$ и $\gamma=0{,}05$, критическое время зажигания несколько растет, значения при $\gamma=0$ и $\gamma=0{,}05$ отличаются не более чем на 3%. Приведем аппроксимирующие формулы

$$\theta_n = -\frac{2{,}67\lg|\theta_0| - 0{,}2}{1+\gamma(2{,}67\lg|\theta_0| - 0{,}2)}; \quad \tau_n = \frac{\pi}{4}(\theta_n - \theta_0)^2, \qquad (18)$$

где $\tau_з$ определяется из (15). Для согласования с расчетами на ЭВМЦ, правая часть (15) умножается на коэффициент 1,07.

Тепловое зажигание топлива в потоке газа. Исходным для данной задачи является уравнение (1) с условиями (4). Переходя к ранее введенным безразмерным переменным и определяя масштаб температур вместо (12) равенством $T_1 = T_c$, получаем, что решение зависит теперь от трех безразмерных параметров

$$\theta_0 = \frac{E}{RT_c^2}(T_0 - T_c) < 0, \quad \gamma = \frac{RT_c}{E}, \quad \mathrm{Nu} = \frac{\alpha x_c}{\lambda}. \qquad (19)$$

Используя развитый выше метод, приходим к зависимостям

$$\theta_n = (1 + \gamma\theta_n) \ln \left[|\theta_0| \left(\frac{1}{z\sqrt{\pi}} - e^{z^2}\Phi^*(z) \right) \right]; \quad \theta_n = \theta_0 e^{z^2} \Phi^*(z), \qquad (20)$$

где $z = \mathrm{Nu}\sqrt{\tau_n}$. Формулы (15), (20), (21) позволяют вычислить все критические параметры зажигания. Крайние значения числа Нуссельта $\mathrm{Nu} \to 0$ и $\mathrm{Nu} \to \infty$ соответственно дают два предельных режима поведения вещества топлива — классический адиабатический взрыв и зажигание накаленной поверхностью. Из (15), (20) соответственно следует:

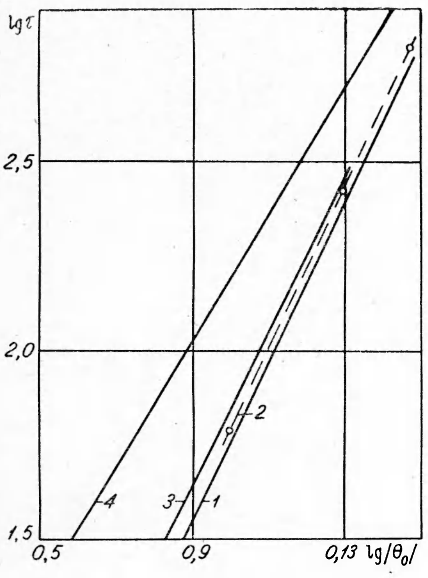

Рис. 2. Зависимость времени зажигания от θ_0 для $\gamma = 0$.

1 — $\mu = \infty$; *2* — $\mu \to \infty$, численное интегрирование [7]; *3* — $\mu = 1{,}0$; *4* — $\mu = 0{,}1$.

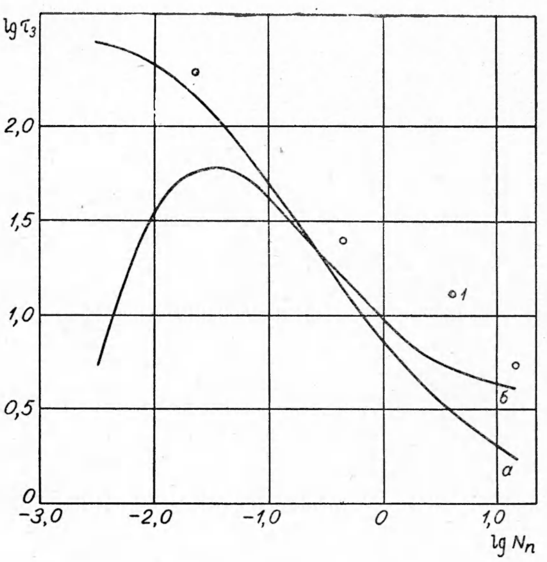

Рис. 3. Зависимость времени зажигания от числа Nu для $\theta_0 = -5$; $\gamma = 0{,}025$.

а — по формулам (15), (20); *б* — по формулам (21), (22). *1* — точки, полученные численным интегрированием.

при $\mathrm{Nu} \to 0$, $\tau_n \to 0$, $\theta_n \to \theta_0$, $\tau_з \to \tau_a$, где τ_a определяется по (15), а при $\mathrm{Nu} \to \infty$, $\tau_n \to 0$, $\theta_n \to 0$, $\tau_з \to (1 + 2\gamma)$. Таким образом, изложенный метод расчета должен давать хороший результат при $\mathrm{Nu} \ll 1$ и не пригоден для $\mathrm{Nu} \gg 1$. Для анализа $\mathrm{Nu} \gg 1$ используем теорию зажигания Я. Б. Зельдовича [9]. Уточняя ее поправкой на γ, вместо (20) приходим к зависимостям:

$$\mathrm{Nu}\,\theta_s = -\sqrt{2\left\{(1 + \gamma\theta_s)^2 e^{\frac{\theta_s}{1 + \gamma\theta_s}} - (1 + \gamma\theta_0)^2 e^{\frac{\theta_0}{1 + \gamma\theta_0}}\right\}(1 - 2\gamma)}, \qquad (21)$$

$$\theta_s = \theta_0 e^{z_з^2} \Phi^*(z_з); \quad z_з = \mathrm{Nu}\sqrt{\tau_з}, \qquad (22)$$

где θ_s — температура на поверхности. Исследуя снова предельные случаи, получаем, что при $\mathrm{Nu} \to 0$, $\tau_з \to 0$, $\theta_s \to \theta_0$, а при $\mathrm{Nu} \to \infty$, $\theta_s \to 0$,

$$\tau_з \to \frac{\theta_0^2}{2\pi(1 - 2\gamma)}.$$

Как и следовало ожидать, для Nu$\gg$1 теория Я. Б. Зельдовича дает хороший результат. Результаты расчета по зависимостям (15), (20)—(22) приведены на рис. 3. Склеивая в точке пересечения результаты, полученные по обеим приближенным теориям, достаточно хорошо приближаемся к расчетным значениям для всего диапазона изменения Nu.

В данной работе не учтено выгорание вещества за время зажигания. Путем небольшого усложнения вычислений этот эффект можно учесть.

Поступила в редакцию
5/VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. J. Seeger.* Proc. Symp. Calc. Mach. Cambr., 1948.
2. *J. H. Frazer, B. L. Hicks.* J. Phys. Colloid. Chem., 1950, **54**, 6.
3. *B. L. Hicks.* J. Chem. Phys., 1954, **22**, 3.
4. *G. B. Cook.* Proc. Roy. Soc., 1958, **A246**, 154.
5. *В. Н. Вилюнов, О. Б. Сидонский.* Докл. АН СССР, 1963, **152**, 1.
6. *А. Г. Мержанов, В. Г. Абрамов, В. Т. Гонтковская.* Докл. АН СССР, 1963, **148**, 1.
7. *В. Н. Вилюнов, О. Б. Сидонский.* ФГВ, 1965, 4.
8. *Я. Б. Зельдович.* ЖЭТФ, 1939, **9**, 12.
9. *Я. Б. Зельдович.* Докл. АН СССР, 1963, **150**, 2.
10. *Г. Карслоу* и *Д. Егер.* Теплопроводность твердых тел. М., изд-во «Наука», 1964.
11. *О. М. Тодес.* ЖФХ, 1939, **13**, 7.
12. *Д. А. Франк-Каменецкий.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1947.