

УДК 539.370

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ФОРМ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Методом стрельбы численно решаются нелинейные краевые задачи о плоском изгибе упругих арок под равномерно распределенной нагрузкой. Задачи сформулированы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, более общих, чем уравнения Эйлера. Рассмотрены четыре варианта нагружения стержня поперечными и продольными силами. Обнаружено разветвление решений краевых задач, а также существование пересекающихся и изолированных ветвей. В случае поступательной продольной силы получены классические эластики Эйлера. При сжатии стержня следящей продольной силой доказано существование единственной (прямолинейной) формы равновесия.

Математическому анализу нелинейных задач плоского изгиба стержней посвящены работы [1, 2]. Анализ выполнен на основе точного решения одномерных квазилинейных уравнений Эйлера в эллиптических интегралах Лежандра. Для прямого стержня, деформированного торцевыми нагрузками, классифицированы возможные формы нелинейного изгиба, определены области их существования. В [2] предложен также алгоритм численного решения соответствующих дифференциальных задач с применением разностной аппроксимации и итерационной процедуры Ньютона.

В данной работе краевые задачи плоского изгиба прямого стержня сформулированы на основе более общих уравнений, учитывающих нелинейную зависимость между деформациями изгиба, растяжения и сдвига [3]. Решение этих обобщенных уравнений не выражается через эллиптические интегралы. Предложен эффективный алгоритм численного анализа нелинейных краевых задач методом стрельбы.

Введем декартову систему координат x_j с ортонормированным базисом e_j . Базовую линию прямого стержня зададим параметрическими уравнениями

$$x_1 \equiv x_2 \equiv 0, \quad x_3 = t \quad \forall t \in [0, l], \quad (1)$$

где t — внутренний параметр линии; l — начальная длина стержня. Согласно (1) базовая линия в начальном состоянии представляет собой отрезок оси x_3 . Считаем, что площадь сечения (профиля) A стержня постоянна, базовая линия проходит через геометрический центр сечения, а координатные плоскости совпадают с плоскостями геометрической и материальной симметрии стержня.

Изучается деформация стержня, вызванная силой, приложенной на торце $t = l$ и заданной вектором

$$\mathbf{P} = P_2 \mathbf{e}_2 + P_3 \mathbf{e}_3. \quad (2)$$

Торец $t = 0$ жестко зашпелен, т. е. его перемещения и повороты исключены. При указанных условиях возможна такая деформация стержня, при которой базовая линия остается плоской:

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 = y(t), \quad x_3 = z(t) \quad \forall t \in [0, l].$$

Здесь y и z — мгновенные координаты точки t в плоскости (x_2, x_3) . Деформацию такого рода принято называть плоским изгибом.

Для анализа плоского изгиба стержня под действием квазистатической нагрузки вида (2) используются нелинейные уравнения одномерной модели деформации стержня [3]. Целью анализа является изучение нелинейных кинематических эффектов. Поэтому материал стержня считается линейно-упругим и неограниченно прочным.

Упругое сопротивление стержня в рамках принятых ограничений определяется матрицей жесткости

$$D = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix},$$

где G_1 и G_2 — модули поперечного сдвига; E_3 — модуль продольного растяжения-сжатия. В частности, для изотропного материала $G_2 = G_1 = E_3/(2 + 2\nu)$, где ν — коэффициент Пуассона. По формулам вида (2.7) в [3] вычисляются ненулевые обобщенные матрицы жесткости стержня

$$E = AD, \quad E_{ii} = I_i D, \quad I_i = \int_A (x_i)^2 dA \quad (i = 1, 2).$$

Система уравнений нелинейного плоского изгиба стержня включает обобщенные определяющие соотношения

$$X_{32} = AG_2 U_{32}, \quad X_{33} = AE_3 U_{33}, \quad Y = H\theta', \quad H = I_2 E_3, \quad (3)$$

статические уравнения (следующие из (1.7) в [3])

$$X_{32} = P_2 \cos \theta + P_3 \sin \theta, \quad X_{33} = -P_2 \sin \theta + P_3 \cos \theta, \quad Y' + U_{32} X_{33} - (1 + U_{33}) X_{32} = 0 \quad (4)$$

и кинематические зависимости (следующие из (1.6) в [3])

$$y' = U_{32} \cos \theta - (1 + U_{33}) \sin \theta, \quad z' = U_{32} \sin \theta + (1 + U_{33}) \cos \theta. \quad (5)$$

В системе (3)–(5) $\theta(t)$ — независимый угол поворота поперечного сечения; $U_{32}(t)$ — деформация поперечного сдвига; $U_{33}(t)$ — деформация продольного растяжения-сжатия; $X_{3j}(t)$ — компоненты вектора усилия в повернутой системе координат; $Y(t)$ — изгибающий момент относительно оси x_1 ; штрих обозначает производную по t . Заметим, что последнее уравнение в (4) выражает нелинейную зависимость между изгибными и метрическими деформациями стержня.

Граничные условия для системы (3)–(5) записываются в виде

$$y(0) = z(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad Y(l) = 0. \quad (6)$$

В точке $t = l$ ставится одно условие вследствие того, что при формулировке статических уравнений использовано известное в этой точке значение вектора силы (2).

Без ограничения общности краевая задача (3)–(6) рассматривается в дальнейшем на единичном интервале $0 \leq t \leq 1$. При этом она преобразуется в систему уравнений

$$y'_0 = y_1, \quad y'_1 = f_2 - (\gamma - 1)\varepsilon^2 f_2 f_3, \quad y'_2 = \varepsilon^2(\gamma f_2 \cos y_0 - f_3 \sin y_0) - \sin y_0, \quad (7)$$

$$y'_3 = \varepsilon^2(\gamma f_2 \sin y_0 + f_3 \cos y_0) + \cos y_0, \quad f_2 = p_2 \cos y_0 + p_3 \sin y_0, \quad f_3 = -p_2 \sin y_0 + p_3 \cos y_0$$

с условиями

$$y_3(0) = y_2(0) = y_0(0) = y_1(1) = 0. \quad (8)$$

В (7) и (8) введены функции $y_0 = \theta$, $y_1 = lY/H$, $y_2 = y/l$, $y_3 = z/l$ и параметры $\gamma = E_3/G_2$, $\varepsilon^2 = I_2/(Al^2)$, $p_j = l^2 P_j/H$. Система (7) описывает нелинейный упругий изгиб в плоскости (x_2, x_3) изначально прямого стержня при заданных значениях параметров нагрузки p_2 и p_3 , параметров жесткости γ и ε и заданных условиях закрепления стержня. Параметр ε —

малая величина порядка отношения толщины стержня к его длине. При $\varepsilon = 0$ уравнения (7) вырождаются в классические уравнения Эйлера [1, 2], которые описывают нелинейный изгиб стержня без растяжения и сдвига.

Являясь автономной, система (7) допускает одну квадратуру. Первые два уравнения приводятся к одному уравнению второго порядка относительно функции $y_0 = \theta(t)$: $y_0'' = f_2 - (\gamma - 1)\varepsilon^2 f_2 f_3$, из которого следует квадратура

$$(y_0')^2 = (y_1)^2 = 2 \int_{y_0(1)}^{y_0} [f_2 - (\gamma - 1)\varepsilon^2 f_2 f_3] dy_0, \quad (9)$$

учитывающая последнее условие в (8). Уравнение (9) может использоваться для предварительного анализа решений задачи (7), (8). Из него, в частности, следует, что в областях, где интеграл (9) принимает отрицательные значения, решения отсутствуют. В областях же с положительными значениями интеграла каждое решение должно иметь две ветви, антисимметричные по переменной $y_1 = \theta'(t)$. Из геометрических соображений следует, что этим ветвям соответствуют изгибы по часовой стрелке и против нее.

Нелинейная краевая задача (7), (8) решалась методом стрельбы: к условиям (8) добавлялось условие $y_1(0) = k$ и при заданном значении параметра k численно строилось однопараметрическое семейство решений $\mathbf{y}(p, t)$ системы (7) с условиями

$$y_3(0) = y_2(0) = y_0(0) = 0, \quad y_1(0) = k. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{y} — вектор искомых функций; p — изменяемый параметр внешней силы (p_2 или p_3). Значение параметра p , соответствующее решению краевой задачи (7), (8), итерациями находилось из условия $y_1(p, 1) = 0$. Задача Коши (7), (10) решалась методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

Изложенная схема была применена для численного анализа четырех задач плоского изгиба прямого стержня, моделирующих различные варианты его нагружения при $\gamma = 2,5$, $\varepsilon = 0,02$.

Нагружение поступательной поперечной силой. В процессе деформации вектор силы (2) остается коллинеарным базисному вектору \mathbf{e}_2 и координатной оси x_2 , так что $P_2 = P$, $P_3 = 0$, P — величина приложенной силы. Функции f_2 и f_3 в системе (7) имеют вид $f_2 = p \cos y_0$, $f_3 = -p \sin y_0$, где $p = l^2 P / H$ — нормированный параметр внешней силы.

Уравнение (9) допускает существование решений при положительных и отрицательных значениях параметра p . Симметрия задачи позволяет ограничиться лишь положительными значениями.

На рис. 1 представлены результаты расчета трех нижних ветвей зависимости кинематического параметра q от силового параметра p . По определению $q = -\theta(1)$ для ветви 1,

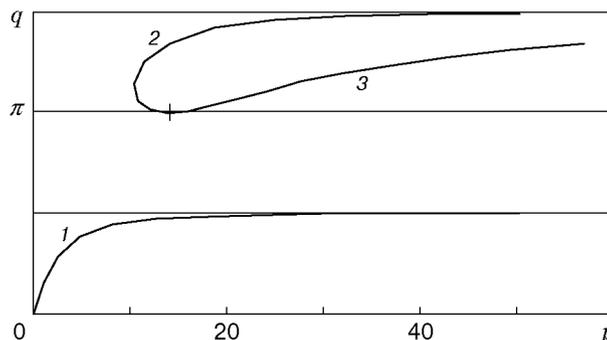


Рис. 1

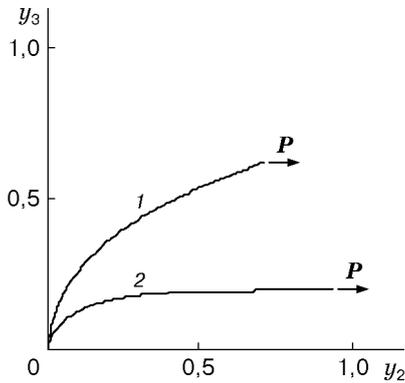


Рис. 2

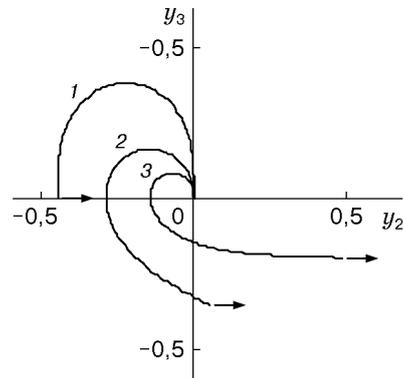


Рис. 3

$q = \theta(1)$ для ветвей 2 и 3, так что параметр q равен углу поворота нагруженного торца стержня.

Ветвь 1, при $p \rightarrow 0$ асимптотически приближающаяся к линейной зависимости, — ветвь наиболее низких форм изгиба. Они устойчивы, и только они реализуются при квазистатическом нагружении стержня. Прямая $q = \pi/2$ является асимптотой ветви при $p \rightarrow +\infty$ (при $p \rightarrow -\infty$ асимптотой будет прямая $q = -\pi/2$). Равновесные формы стержня для двух точек (p, q) ветви 1 приведены на рис. 2 (кривая 1 — $p = 4,83$, $q = 1,202$; кривая 2 — $p = 50$, $q = 1,569$). Значение параметра q второй формы близко к предельному значению $\pi/2$.

Ветви 2, 3 на рис. 1 исходят из общей точки ($p \approx 13,75$, $q = \pi$) и расположены в полосе $\pi \leq q < 3\pi/2$. Формы изгиба, соответствующие точкам ветви 2, показаны на рис. 3, причем кривая 1 соответствует общей точке, 2 — $p \approx 14,13$, $q = 4,227$; 3 — $p = 50$, $q = 4,692$.

Нагружение следящей поперечной силой. При деформации вектор силы (2) направлен по нормали к базовой линии в граничной точке $t = 1$, так что $P_2 = P \cos q$, $P_3 = -P \sin q$, $q = -\theta(1)$. Функции f_2 и f_3 в системе (7) имеют вид $f_2 = p \cos(y_0 + q)$, $f_3 = -p \sin(y_0 + q)$, p — параметр внешней силы. Уравнение (9) допускает существование решений при положительных и отрицательных значениях параметра p .

Результаты решения краевой задачи (7), (8) представлены на рис. 4–6. Две нижних ветви зависимости $q(p)$ изображены на рис. 4. Они имеют общую точку ($p \approx 13,75$, $q = \pi$), ту же, что и в случае нагружения поступательной поперечной силой, и расположены в конечной области $0 \leq p < 55$, $0 \leq q \leq \pi$. Изменение равновесных форм стержня показано на рис. 5, 6 для ветвей 1 и 2 соответственно. На рис. 5 кривая 1 соответствует точке $p = 3,25$, $q = 1,5$; 2 — $p = 6,59$, $q = 2,5$; 3 — $p = 13,75$, $q = \pi$. На рис. 6 кривая 1 соответствует точке $p = 23,45$, $q = 2,5$; 2 — $p = 31,36$, $q = 1,5$; 3 — $p = 54,6$, $q = 0$.

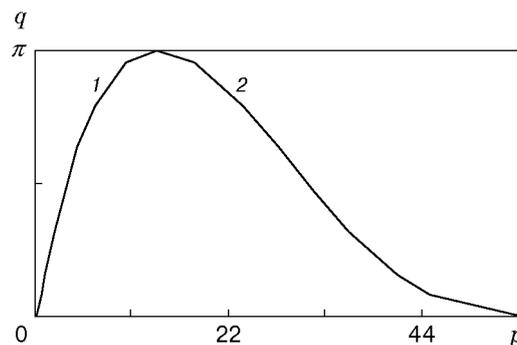


Рис. 4

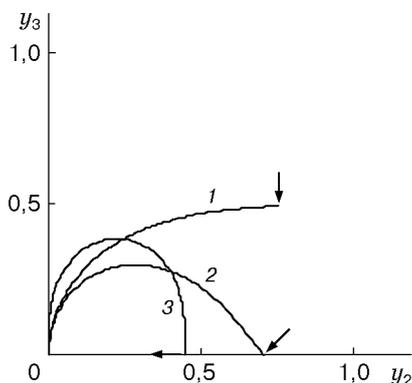


Рис. 5

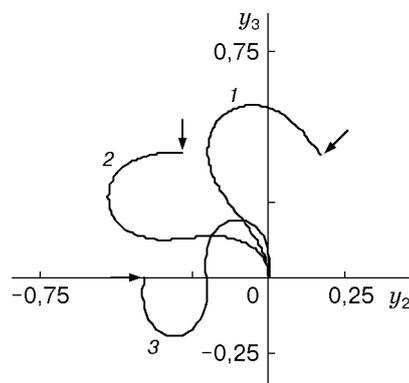


Рис. 6

Нагружение поступательной продольной силой. В процессе деформации вектор силы (2) остается коллинеарным базисному вектору e_3 и координатной оси x_3 , так что $P_2 = 0$, $P_3 = -P$ (знак выбран таким образом, чтобы при $P > 0$ нагрузка на прямой стержень была сжимающей, при $P < 0$ — растягивающей). Функции f_2 и f_3 в системе (7) имеют вид $f_2 = -p \sin y_0$, $f_3 = -p \cos y_0$. В этом случае существует тривиальное решение задачи (7), (8)

$$y_0(t) \equiv 0, \quad y_1(t) \equiv 0, \quad y_2(t) \equiv 0, \quad y_3(t) = (1 - \varepsilon^2 p)t, \quad (11)$$

определяющее прямолинейные формы равновесия стержня: сжатые при $p > 0$ и растянутые при $p < 0$. Л. Эйлером показано, что вырожденная нелинейная задача ($\varepsilon \rightarrow 0$) имеет счетное множество нетривиальных решений. Позднее эти решения были выражены через эллиптические интегралы Лежандра, а результаты Л. Эйлера подтверждены и дополнены [1, 2].

Для нахождения отличных от (11), т. е. нетривиальных, ветвей решения обобщенной краевой задачи (7), (8) проведен численный анализ.

Вычисление интеграла (9) приводит к уравнению

$$(y_0')^2 = 2p(\cos y_0 - \cos q) + \frac{\gamma - 1}{2} \varepsilon^2 p^2 (\cos 2y_0 - \cos 2q).$$

Наряду с прямолинейной формой $y_0 \equiv q \equiv 0$ оно допускает изогнутые формы $|y_0| \leq |q|$ при положительных значениях параметра p .

На рис. 7 представлены результаты расчета трех нетривиальных ветвей с наименьшими значениями параметра p в точках ветвления, т. е. в точках пересечения ветвей с осью абсцисс (тривиальной ветвью). Все ветви расположены в полосе $0 \leq q < \pi$, если

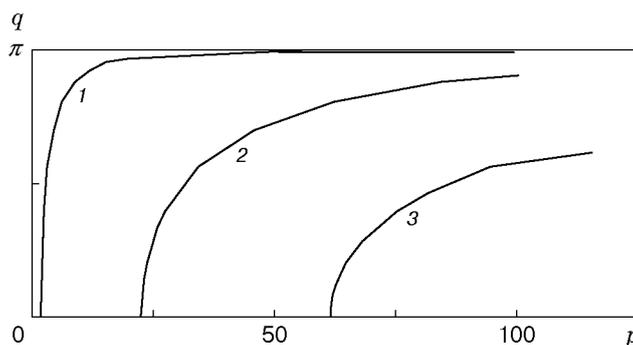


Рис. 7

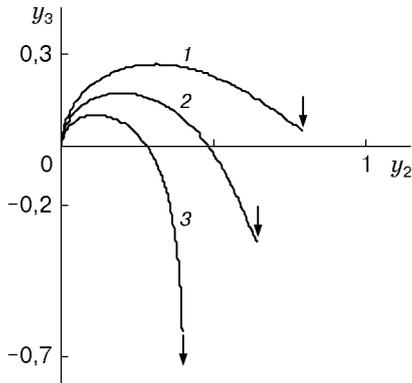


Рис. 8

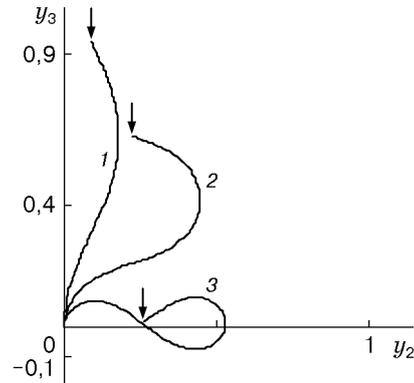


Рис. 9

кинематический параметр q определен равенством $q = |\theta(1)|$. Изогнутые формы равновесия консольного стержня, соответствующие первым двум ветвям, показаны на рис. 8, 9 для ряда значений p, q . На рис. 8 кривая 1 соответствует точке $p = 5,03, q = 2,202$; 2 — $p = 9,34, q = 2,758$; 3 — $p = 25,01, q = 3,1$. На рис. 9 кривая 1 соответствует точке $p = 22,71, q = 0,423$; 2 — $p = 27,05, q = 1,23$; 3 — $p = 45,33, q = 2,2$. Если кривые на рис. 8, 9 симметрично отобразить относительно горизонтальной оси, то они примут вид эластик Эйлера для шарнирно опертого по обоим торцам стержня длиной $2l$ [4]. Следует отметить, что у шарнирного стержня кроме симметричных имеются чередующиеся с ними антисимметричные формы изгиба [1].

При квазистатическом нагружении реализуются только формы, соответствующие первой ветви зависимости $q(p)$ (см. рис. 8). Однако более высокие формы изгиба не являются только следствием статических уравнений. Они обнаружены, например, при импульсном нагружении стержня [5].

Нагружение следящей продольной силой. При деформации вектор силы (2) направлен по касательной к базовой линии в граничной точке $t = 1$, так что $P_2 = P \sin q, P_3 = P \cos q, q = -\theta(1)$. В отличие от предыдущей задачи сила $P > 0$ является растягивающей, $P < 0$ — сжимающей. Функции f_2 и f_3 в системе (7) принимают вид $f_2 = p \sin(y_0 + q), f_3 = p \cos(y_0 + q)$.

Вычисление интеграла (9) приводит к уравнению

$$(y_0')^2 = 2p[1 - \cos(y_0 + q)] - \frac{\gamma - 1}{2} \varepsilon^2 p^2 [1 - \cos(2y_0 + 2q)], \quad (12)$$

которое, очевидно, не имеет решений при $p < 0$ ($\gamma > 1$ для всех реальных материалов). Это означает, что прямой стержень не имеет изогнутых форм равновесия при сжимающей следящей силе. Поэтому бифуркационный критерий неприменим для исследования неустойчивости прямолинейных форм равновесия стержня, сжимаемого следящей силой [6, 7].

При $p > 0$ (растягивающая следящая сила) уравнение (12) допускает существование изогнутых форм наряду с устойчивой прямолинейной формой $y_0 \equiv q \equiv 0$. Такие формы возможны при больших значениях параметров нагрузки и не представляют интереса для практики.

Заключение. Тестирование изложенного алгоритма численного анализа на вырожденных задачах, имеющих решение в эллиптических интегралах [1, 2], показало его высокую точность и эффективность. Вместе с тем численный анализ подтвердил корректность системы уравнений Эйлера в интервале $0 \leq p \ll O(\varepsilon^{-2})$, определяемом асимптотическим анализом возмущенной системы (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Попов Е. П.** Нелинейные задачи тонких стержней. Л.; М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
2. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
3. **Шкутин Л. И.** Инкрементальная модель деформации стержня // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 229–235.
4. **Богульский И. О., Шкутин Л. И.** Численный анализ нелинейной краевой задачи плоской деформации стержня // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1999. Вып. 114. С. 140, 141.
5. **Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
6. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
7. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987.

*Поступила в редакцию 26/VI 2000 г.,
в окончательном варианте — 28/IX 2000 г.*
