

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ОДНОРОДНЫХ ПО СЕЧЕНИЮ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЯХ

Е. В. Баянов, А. И. Гулидов*

Новосибирский государственный технический университет, 630092 Новосибирск

* Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск

E-mails: bayanovev@rambler.ru, gai@itam.nsc.ru

Проведено численное исследование распространения упругих волн в круглых стержнях и стержнях с цилиндрической полостью. Проанализировано влияние размеров стержня на скорость распространения волны. Описано явление повторного отскока в коротких однородных стержнях.

Ключевые слова: однородные стержни, распространение упругих волн, круговое поперечное сечение.

Введение. Исследования распространения волн в стержнях различных сечений проводятся в течение более 100 лет. В настоящее время результаты этих исследований используются при создании методов контроля и определении характеристик материала в области ультразвуковых волн [1]. Точное решение этих задач получено только для бесконечных цилиндрических стержней и пластин простой геометрии. В работе [2] получены точные дисперсионные уравнения для полубесконечных упругих цилиндрических стержней, но эти уравнения являются приближенными для стержней конечной длины. Поэтому в основном изучение распространения возмущений ограничивается одномерным случаем, когда дисперсия, т. е. зависимость скорости распространения волн от частоты, не учитывается. Такие подходы позволяют объяснить некоторые закономерности процесса соударения стержней, но более детальное исследование можно выполнить только с помощью численных методов в двумерном и трехмерном приближениях.

Целью настоящей работы является численное исследование скорости распространения упругой волны в однородных стержнях и трубах, а также выявление зависимости этой скорости от геометрических и физических параметров стержня.

Постановка задачи и метод исследования. Рассмотрим задачу о соосном соударении двух одинаковых круглых стержней. При симметричном соударении таких стержней, в случае если плоскость контакта рассматривается как жесткая преграда, задача соударения становится эквивалентной задаче об ударе о жесткую преграду стержня длиной L и радиусом R со скоростью V_0 . Координата z отсчитывается от преграды вдоль оси стержня в направлении, противоположном направлению его движения. Материал стержня считается абсолютно упругим. При рассмотрении стержня, состоящего из нескольких слоев из разных материалов, на границах контактов этих материалов ставится условие идеального механического контакта, т. е. материальные частицы двух тел на границе контакта движутся как единое целое.

Данная задача решается в осесимметричной постановке с помощью программного комплекса KRUG, предназначенного для численного решения динамических задач механики

Характеристики материалов

Материал	$\rho \cdot 10^3$, кг/м ³	K , ГПа	μ , ГПа	λ , ГПа	ν	$c_e \cdot 10^3$, м/с	$c_p \cdot 10^3$, м/с	$c_s \cdot 10^3$, м/с	$c_\lambda \cdot 10^3$, м/с
Алюминий	2,70	69	27	51	0,33	5,14	6,23	3,16	5,44
Железо	7,88	170	80	117	0,29	5,13	5,92	3,19	5,37
Медь	8,90	137	48	105	0,34	3,80	4,75	2,32	4,05
Свинец	11,30	14	7	9	0,28	1,26	1,44	0,79	1,32
Титан	4,50	139	41	112	0,36	4,99	6,56	3,02	5,36
Вольфрам	19,35	233	140	139	0,25	4,25	4,66	2,69	4,39

сплошной среды. Математическая модель данной задачи и метод ее решения подробно изложены в работе [3].

При использовании модели упругопластического течения с постоянным пределом текучести величина упругих напряжений зависит от величины предела текучести. Для обеспечения выполнения условия идеальной упругости в расчетах выбирается завышенный предел текучести, скорость удара во всех задачах равна 50 м/с. При выборе скоростей удара в диапазоне 1 ÷ 100 м/с погрешность результатов расчетов времени контакта стержня с преградой составляет не более 1 %.

В таблице приведены характеристики материалов, использованные в данной работе (ρ — плотность, K — объемный модуль упругости, μ — модуль сдвига, λ — постоянная Ламе, ν — коэффициент Пуассона, c_e — скорость распространения упругой волны в одномерном стержне, c_p — скорость продольных волн, c_s — скорость поперечных волн, c_λ — скорость волн в тонком слое).

При ударе стержня о жесткую преграду в начальный момент времени торец стержня во всех точках соприкасается с преградой и остается в контакте с ней в течение некоторого времени, после чего он сразу или постепенно отделяется от преграды. В качестве времени контакта выбирается время с момента начала контакта до момента, когда все точки торца стержня отойдут от преграды [4].

Из решения упругой задачи о контакте одномерного стержня с преградой при ударе известно, что время контакта равно

$$t_k = 2L/c_e. \quad (1)$$

Для данного стержня приняты следующие предположения:

- 1) стержень является тонким, т. е. его поперечный размер много меньше продольного;
- 2) поперечные напряжения отсутствуют.

В общем случае в стержне как твердом теле распространяются волны нескольких типов с разными скоростями. На основании формулы (1) предположим, что в стержне распространяется волна с неизвестной средней скоростью c , такой что после прохождения волной расстояния, равного двум длинам стержня, за время t_k происходит отскок стержня. Таким образом, среднюю скорость волны найдем по формуле

$$c = 2L/t_k, \quad (2)$$

а время контакта определим численно из решения осесимметричной задачи.

Однородные стержни. Рассмотрим удар однородного стержня диаметром $D = 10^{-2}$ м и калибром $L/D = 0,1 \div 10,0$ об абсолютно жесткую преграду.

На рис. 1 приведена зависимость относительной средней скорости волны c' от калибра для однородных стержней из алюминия и вольфрама (c' — отношение скорости волны c , найденной по формуле (2), к скорости c_e).

Анализ данных, представленных на рис. 1, позволяет сделать следующие выводы:

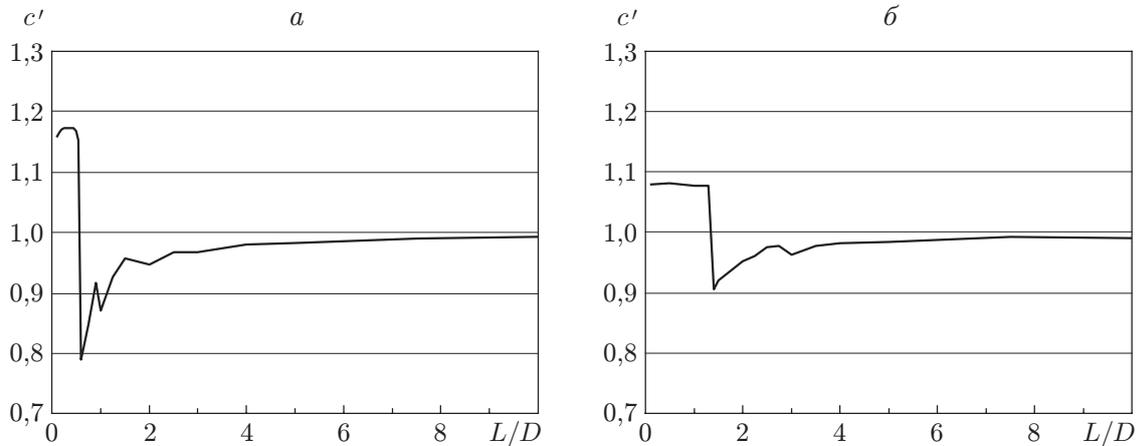


Рис. 1. Зависимость относительной средней скорости волны от калибра для однородных алюминиевого (а) и вольфрамового (б) стержней

— при малых значениях калибра стержня ($L/D < 1$) скорость распространения волны близка к скорости продольных волн c_p (это объясняется тем, что более медленные поперечные волны, зарождающиеся на свободной цилиндрической границе, не успевают оказать влияние на продольную волну, длина пути распространения которой незначительна по сравнению с радиусом стержня);

— при увеличении калибра средняя скорость волны стремится к скорости c_e (начиная с размера стержня, равного трем калибрам, различие между скоростью волны и скоростью c_e составляет менее 3 %);

— существует такое значение калибра ($L/D = 0,5 \div 1,5$), при котором средняя скорость продольной волны минимальна, что обусловлено существенным влиянием на нее поперечных колебаний.

При построении графиков (см. рис. 1) в качестве времени контакта выбиралось время первого отскока стержня от преграды. Для некоторых размеров стержня наблюдались повторные касания стержнем преграды, т. е. после отскока стержня часть его точек входила в контакт с преградой. Наличие повторных отскоков приводит к неточности определения скорости волны по времени контакта.

На рис. 2 представлена зависимость относительной средней скорости волны c' от калибра алюминиевого стержня. Видно, что повторные отскоки происходят в стержнях с размером, близким к калибру, при котором наблюдается минимум средней скорости волны.

Исследуем влияние повторного отскока стержня от преграды на изменение контактной силы.

На рис. 3 представлена полученная в численном эксперименте зависимость контактной силы от времени для алюминиевого стержня. После удара о преграду длинных стержней (см. рис. 3,а) значение контактной силы начинает колебаться. Период этих колебаний приблизительно равен времени прохождения поперечной волны со скоростью c_s от свободной цилиндрической поверхности стержня до его центра. Наличие поперечных колебаний обусловлено наличием свободной боковой поверхности. В тот момент, когда сила становится равной нулю, стержень отскакивает от преграды.

В случае коротких стержней (см. рис. 3,б) уменьшение контактной силы до нуля также приводит к выходу всех точек торца стержня из контакта с преградой, но затем часть этих точек вновь входит в соприкосновение с преградой в течение определенного промежутка времени, вследствие чего контактная сила становится отличной от нуля до момента

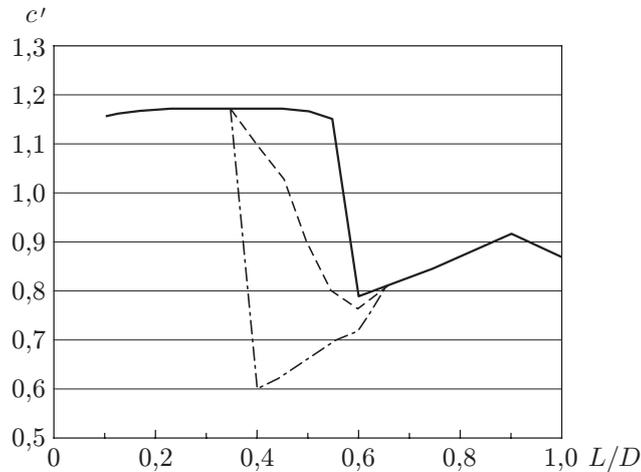


Рис. 2. Зависимость относительной средней скорости волны от калибра алюминиевого стержня:

сплошная линия — скорость, вычисленная по времени первого отскока; штрихпунктирная — по времени последнего отскока; штриховая — по времени нахождения стержня в контакте с преградой, за исключением времени нахождения точек вне контакта

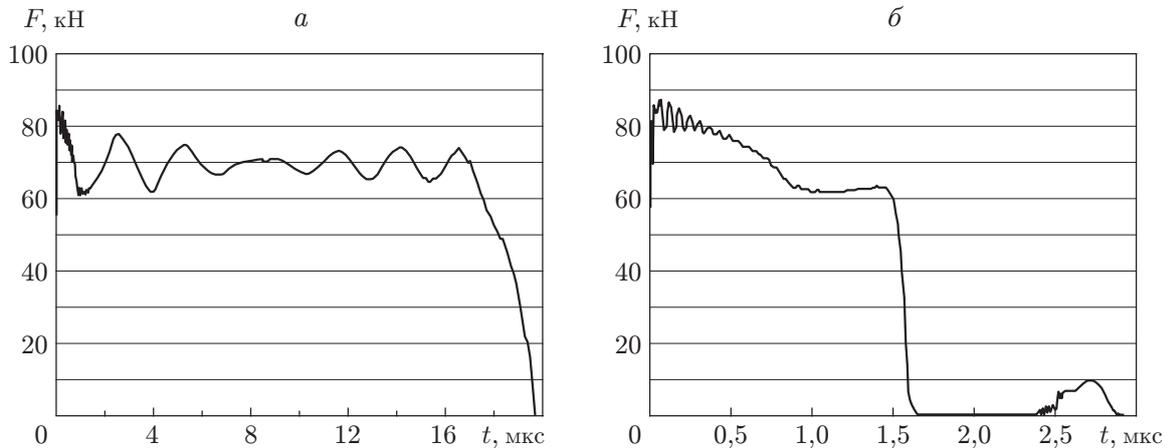


Рис. 3. Зависимость контактной силы от времени:

a — $L/D = 5$, *б* — $L/D = 0,5$

окончательного отскока. Явление повторного отскока ранее наблюдалось лишь в стержнях, состоящих из нескольких материалов [3].

Для анализа причин повторного касания стержня преграды рассмотрим баланс энергии в процессе распространения волны на примере алюминиевого стержня.

На рис. 4 приведена зависимость относительных значений энергии от времени. Значения энергий отнесены к значению полной энергии ξ_0 , равной начальной кинетической энергии стержня.

На рис. 4, *a* представлена зависимость $\xi/\xi_0(t)$ при $L/D = 0,5$. Левая вертикальная линия соответствует времени первого отскока стержня, правая — времени последнего отскока. В таком стержне с момента его соприкосновения с преградой начинает возрастать внутренняя энергия и уменьшаться кинетическая. Внутренняя и кинетическая энергии достигают максимального и минимального значений соответственно в момент прихода волны к верхнему торцу стержня. Первый отскок стержня происходит после возвращения волны к его нижнему торцу. В этот момент кинетическая энергия еще мала по сравне-

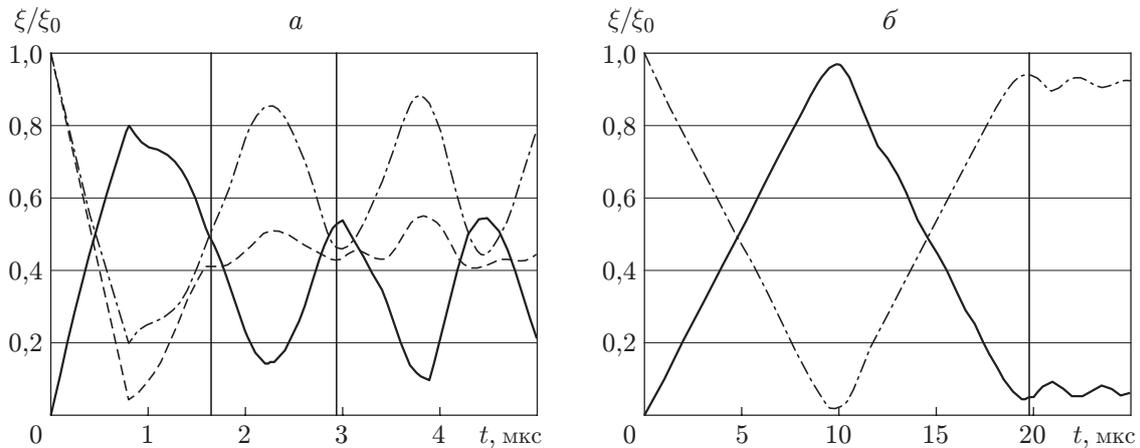


Рис. 4. Зависимость относительной энергии от времени:
a — $L/D = 0,5$, *б* — $L/D = 5$; сплошная линия — внутренняя энергия, штрихпунктирная — полная кинетическая энергия, штриховая — продольная составляющая кинетической энергии, вертикальные линии — время выхода из контакта всех точек стержня

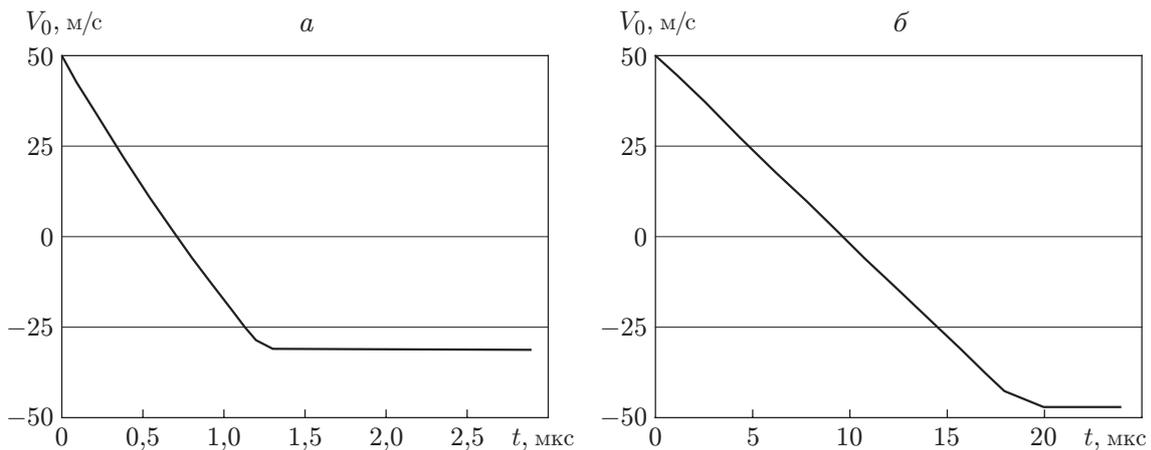


Рис. 5. Зависимость скорости центра масс стержня от времени:
a — $L/D = 5$, *б* — $L/D = 0,5$

нию с начальным значением, скорость движения центра масс стержня после его отскока меньше скорости удара. Колебание значения кинетической энергии после отскока стержня при малом изменении ее продольной составляющей свидетельствует о значительных поперечных колебаниях. Внутренняя энергия волны напряжения сжатия в момент отскока стержня еще остается в нем. Скорость отскока стержня меньше скорости удара, а скорость возврата размера стержня к начальному значению после сжатия значительна. Это приводит к повторному касанию стержнем преграды вследствие продолжающегося растяжения стержня.

На рис. 4, *б* приведена зависимость $\xi/\xi_0(t)$ при $L/D = 5$. До отскока стержня энергия изменяется так же, как и в коротких стержнях. Однако к моменту прихода волны к нижнему торцу внутренняя энергия волны растяжения практически полностью переходит в кинетическую энергию отскока, и наличие незначительной доли оставшейся внутренней энергии не приводит к повторному контакту стержня с преградой. При этом после отскока стержня поперечная составляющая кинетической энергии практически отсутствует.

На рис. 5 представлены зависимости скоростей центра масс короткого ($L/D = 0,5$) и

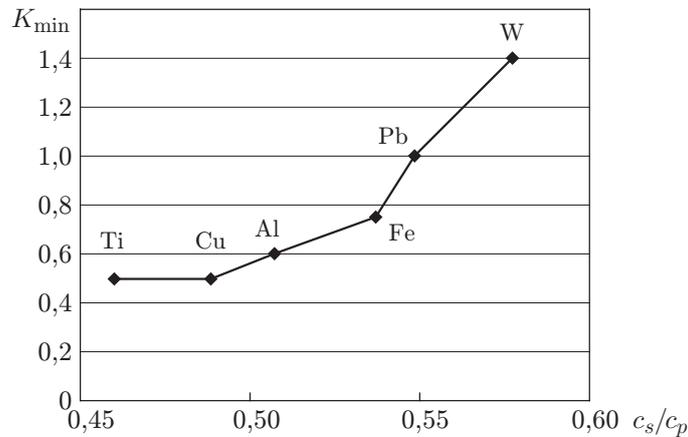


Рис. 6. Значение калибра, при котором имеет место минимум относительной средней скорости волны

длинного ($L/D = 5$) стержней от времени. При отскоке скорость короткого стержня снижается почти на 40 % вследствие того, что значение кинетической энергии мало. Скорость отскока длинного стержня практически равна скорости удара.

В дальнейших расчетах в качестве времени контакта будем принимать время первого отскока стержня от преграды.

Для каждого материала минимальное значение средней скорости (вычисленной по первому отскоку) наблюдается при разных калибрах стержня. Для оценки калибра, при котором имеет место минимум относительной средней скорости, используем отношение поперечной и продольной скоростей c_s/c_p , значение которого является постоянной величиной для материала стержня.

На рис. 6 показана зависимость значения калибра K_{\min} , при котором скорость волны достигает минимума, от отношения c_s/c_p для стержней из различных материалов. Из рис. 6 следует, что калибр стержня, при котором наблюдается минимальное значение скорости волны, увеличивается с ростом значения c_s/c_p .

Однородные стержни с цилиндрической полостью. Рассмотрим удар однородного алюминиевого стержня с цилиндрической полостью (трубы) с внешним диаметром $D_{\text{вн}} = 10^{-2}$ м и калибром $L/D_{\text{вн}} = 0,1 \div 10,0$ об абсолютно жесткую преграду.

На рис. 7 показана зависимость относительной скорости распространения волны c' от калибра трубы при значениях относительной толщины трубы (отношение толщины трубы к ее внешнему радиусу) $S = 0,2; 0,8$.

В случае уменьшения относительной толщины трубы S минимум скорости волны достигается при больших значениях калибра, а само значение скорости в точке минимума увеличивается. При этом в трубах, имеющих размеры, при которых скорость волны минимальна, наблюдается повторный отскок от преграды.

В тонких трубах ($S = 0,2$) зависимость скорости от длины трубы более слабая, и изменение значения скорости составляет не более 4 % значения скорости c_e .

Рассмотрим изменение среднего значения скорости волны в длинной трубе ($L/D \geq 10$) при уменьшении ее толщины.

На рис. 8 представлена зависимость скорости распространения волн в длинной алюминиевой трубе от ее относительной толщины. Видно, что в диапазоне значений $S = 0,2 \div 1,0$ скорость незначительно меняется и при значениях $S < 0,2$ становится больше скорости c_e .

В результате распространения в тонком слое продольных и поперечных волн возникают нормальные волны, в которых частицы перемещаются в параллельном и перпендику-

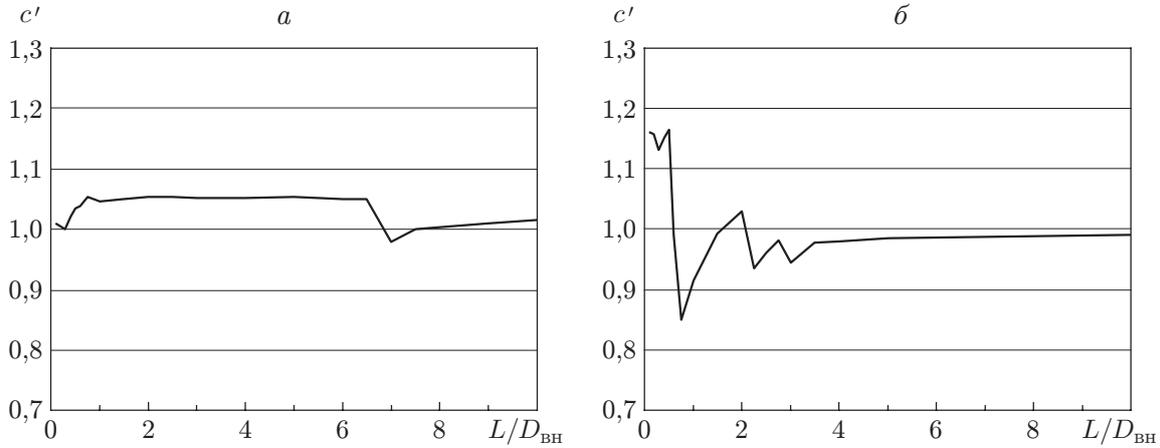


Рис. 7. Зависимость относительной средней скорости волны от калибра трубы:
a — $S = 0,2$, *б* — $S = 0,8$

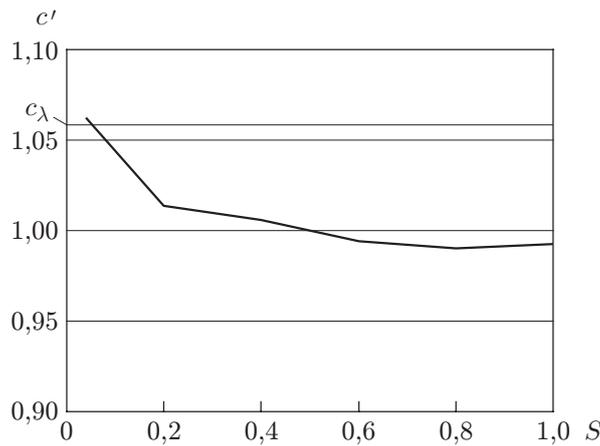


Рис. 8. Зависимость скорости распространения волны в длинной трубе от ее относительной толщины

лярном плоскости слоя направлениях [5]. Такие нормальные волны называются волнами Лэмба. Фазовая скорость волн Лэмба в слое малой толщины определяется с помощью формулы

$$c_\lambda = c_p \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{(1 - \nu)^2}}.$$

Из рис. 8 следует, что в тонких трубах ($S < 0,1$) значение скорости волны стремится к значению скорости волн Лэмба c_λ в тонком слое.

Заключение. Проведенный анализ распространения упругих волн в круглых стержнях показывает, что значение средней скорости распространения волны в коротких стержнях отличается от скорости волны, определяемой в одномерной теории. На основании численного исследования распространения волн в трубе можно сделать вывод, что в тонких трубах упругое возмущение распространяется со скоростью, равной скорости распространения волны в тонком слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дейвис Р. М. Волны напряжений в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Chree С. The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1889. V. 14. P. 205–369.
3. Фомин В. М. Высокоскоростное взаимодействие тел / В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников и др. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
4. Гулидов А. И., Фомин В. М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ. 1980. № 3. С. 126–132.
5. Ерофеев В. И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В. И. Ерофеев, В. В. Кажаяев, Н. П. Семерикова. М.: Физматлит, 2002.

Поступила в редакцию 14/IX 2010 г.
