

УДК 539.387

## УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

А. Каси, К. Драйхе, М. Зиди, М. С. А. Хуари, А. Тунси

Университет г. Сиди-Бель-Аббес, Сиди-Бель-Аббес, Алжир

E-mail: tou\_abdel@yahoo.com

Предложена уточненная теория нелинейного изгиба трехслойной пластины из функционально-градиентного материала, допускающая вариационную формулировку и не требующая введения корректирующего коэффициента для учета деформаций сдвига. Согласно этой теории деформации сдвига распределены по толщине пластины по параболическому закону и удовлетворяют условию отсутствия на лицевых поверхностях пластины касательных усилий. Для определения больших смещений трехслойной пластины из функционально-градиентного материала и распределения напряжений по ее толщине совместно используются энергетический принцип, предложенная теория, а также теории первого и третьего порядков, учитывающие деформации сдвига.

**Ключевые слова:** уточненная теория пластин, нелинейный анализ, энергетический метод, трехслойная пластина, функционально-градиентный материал.

**Введение.** Трехслойные пластины применяются в аэрокосмической, авиационной промышленности, судостроении (строительство подводных лодок) и гражданском строительстве. Такие пластины используются в конструкциях, имеющих небольшую массу и высокую прочность, а также для шумоизоляции, термоизоляции, поглощения вибрации и создания слоистых конструкций из функционально-градиентных материалов. Как правило, трехслойные пластины — это конструкции, представляющие собой две или более жесткие лицевые пластины и ядро, состоящее из одного или нескольких слабо сопротивляющихся изгибу слоев.

Поскольку в трехслойных пластинах изменение по толщине жесткостных и механических свойств слоев более значительное, чем в традиционных композитных пластинах, влияние поперечного сдвига и нормальных напряжений в них на напряженно-деформированное состояние также является более существенным, чем в композитных пластинах. Потребность в эффективных инженерных конструкциях обуславливает необходимость создания новых, функционально-градиентных материалов (ФГМ) [1–3].

ФГМ представляют собой гетерогенные материалы, механические свойства которых непрерывно изменяются от точки к точке. Это достигается варьированием по толщине пластины объемной доли фракций (например, керамики и металла) по заданному закону. Непрерывное изменение по объему материала составляющих его фракций позволяет решить проблему взаимодействия слоев на межслойных поверхностях, поскольку напряжения непрерывны. ФГМ широко используются в качестве элементов различных конструкций.

В [4] с использованием теории третьего порядка, учитывающей деформации сдвига (ТТПДС), получено решение задачи для прямоугольной пластины из ФГМ. В [5] проведено сравнение прогибов свободно опертой многоугольной пластины из ФГМ, полученных с использованием теории первого порядка, учитывающей деформации сдвига (ТТПДС), и ТТПДС, с прогибами для эквивалентной однородной пластины Кирхгофа.

В [6] представлены результаты решения задач устойчивости и задач об установившихся колебаниях свободно опертой многоугольной пластины из ФГМ, полученные с помощью теории пластин Редди. Аналитические решения трехмерных задач представляют интерес в качестве тестовых для проверки точности решений задач на основе двумерных теорий пластин и решений, полученных методом конечных элементов. В [7] методами асимптотических разложений изучалась трехмерная термоупругая задача о деформировании эллиптической пластины из ФГМ. В [8] получено точное решение трехмерной термоупругой задачи о деформировании свободно опертых пластин конечных размеров из ФГМ. В [9] приведено решение задачи об изгибе поперечной нагрузкой толстой прямоугольной пластины из ФГМ, в которой фракции (керамики и металла) распределены по толщине по экспоненциальному закону. При этом использовались двумерная модель, основанная на аппроксимации решения тригонометрическими функциями, и решение трехмерной задачи. В [10, 11] получено решение задач об изгибе и установившихся колебаниях свободно опертой пластины из ФГМ. В качестве фракций использовались керамика и металл.

В работах [4–11] приведены решения линейных задач для пластин из ФГМ, найденные с использованием различных теорий. Однако известно небольшое количество работ, в которых исследуются нелинейные задачи для таких пластин.

В [12] методом Пуанкаре изучена задача о больших прогибах свободно опертой тонкой пластины из ФГМ. Предполагалось, что изменение модуля Юнга по толщине пластины симметрично относительно срединной плоскости. В [13] представлено решение задачи об упругой потере устойчивости пластины из ФГМ, полученное с использованием подходов микромеханики и структурной механики. В [14] приведены результаты детального исследования нелинейных статических задач и задач устойчивости керамико-металлических пластин из ФГМ, подвергнутых воздействию тепловой и поперечной силовой нагрузок, найденные с помощью ТТПДС и метода конечных элементов.

В [15] с использованием теории пластин Кармана, учитывающей большие прогибы, представлено аналитическое решение задач деформирования пластин и оболочек под действием температурного поля и поперечной нагрузки. В [16] полуаналитическим методом изучены деформирование прямоугольных пластин из ФГМ и их устойчивость с учетом больших перемещений под действием поперечной и продольной нагрузок. В [17] приведены результаты исследования закритического поведения пластин с пьезоэлектрическими приводами под действием термоэлектромеханических нагрузок.

В [18] изучено закритическое поведение находящихся в температурном поле составных цилиндрических оболочек из ФГМ с пьезоэлектрическими приводами, нагруженных одновременно сжимающей осевой силой и электрическим воздействием. В [19] проведено сравнение результатов исследования осесимметричного деформирования и закритического поведения круговых пластин из ФГМ с использованием ТТПДС и классической теории пластин (КТП). В [20] с использованием нового балочного элемента изучено влияние нелинейной геометрии на статическое и динамическое деформирование изотропных, композитных пластин и пластин из ФГМ. Энергетический подход к исследованию поведения пластин из ФГМ под действием поперечной нагрузки с учетом больших перемещений использован в работе [21]. Предполагалось, что распределение фракций по толщине пластины происходит в соответствии со степенным законом. Края прямоугольной пластины предполагались

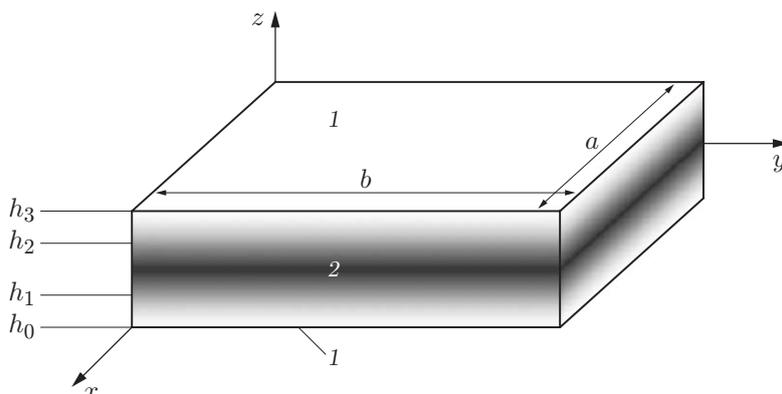


Рис. 1. Геометрия трехслойной пластины из ФГМ:  
1 — металл, 2 — керамическое ядро

свободно опертыми, определяющие уравнения задачи получены на основе теории пластин Кармана. Решение найдено путем минимизации полной потенциальной энергии.

В работе [22] предложена уточненная теория пластин из ФГМ, содержащая только четыре неизвестные функции, в то время как различные теории высшего порядка, учитывающие деформации сдвига, содержат пять неизвестных функций. Существуют следующие теории высшего порядка с пятью неизвестными функциями, учитывающие деформации сдвига: 1) теория третьего порядка [4]; 2) теория с синусоидальным распределением деформаций сдвига [10, 11]; 3) теория с экспоненциальным распределением деформаций сдвига [23].

В настоящей работе с использованием методологии работы [22] разработана эффективная уточненная теория, содержащая четыре неизвестные функции, для решения нелинейных задач изгиба пластин из ФГМ. Предполагается, что модуль Юнга материала изменяется по толщине пластины в соответствии со степенным законом распределения фракций по ее толщине, а коэффициент Пуассона является постоянным.

**1. Основные положения теории.** Ниже изложены некоторые модели деформирования пластин из ФГМ.

1.1. *Моделирование функционально-градиентного материала.* Рассмотрим пластину, состоящую из трех слоев: металлокерамического, керамического и керамико-металлического (рис. 1). Для описания бесконечно малых деформаций пластины, занимающей в ненапряженном состоянии область  $[0, a] \times [0, b] \times [-h/2, h/2]$ , используется декартова система координат  $(x, y, z)$ . Срединной поверхности пластины соответствует координата  $z = 0$ , лицевым поверхностям — координаты  $z = \pm h/2$ . Лицевые слои трехслойной пластины изготовлены из изотропного материала. Механические свойства этих слоев непрерывно изменяются по координате  $z$ . Основным слоем изготовлен из изотропного однородного материала. Нижняя поверхность, межслойные поверхности и верхняя поверхность пластины обозначены через  $h_0 = -h/2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3 = h/2$  соответственно. Толщина пластины равна  $h = t_c + t_{\text{FGM}}$  ( $t_c = h_2 - h_1$  и  $t_{\text{FGM}}$  — толщина основного слоя и слоев из ФГМ соответственно).

Выражения для эффективных параметров материала, таких как модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения, можно записать в виде

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)}, \quad (1)$$

где  $P^{(n)}$  — эффективный параметр материала слоя  $n$  из ФГМ;  $P_m$ ,  $P_c$  — параметры нижнего слоя ( $n = 1$ )  $h_0 \leq z \leq h_1$  и верхнего слоя ( $n = 3$ )  $h_2 \leq z \leq h_3$  соответственно, зависящие от объемной доли фракции  $V^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

Заметим, что параметры  $P_m$  и  $P_c$  соответствуют металлу и керамике — фракциям трехслойной пластины. Объемная доля фракции  $V^{(n)}$  материала из ФГМ распределена по толщине пластины в соответствии со степенным законом [22]:

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad z \in [h_0, h_1]; \quad (2)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2];$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3]. \quad (3)$$

Здесь  $k \geq 0$  (значение  $k = 0$  соответствует керамической пластине).

Законы распределения (2), (3) используются для получения эффективных параметров металлокерамического и керамики-металлического слоев трехслойной пластины (см. рис. 1). Заметим что доля металлической фракции больше вблизи нижней и верхней поверхностей, а доля керамической фракции — вблизи межслойных поверхностей.

1.2. *Теории высшего порядка с пятью неизвестными функциями.* Выражения для смещений точки с координатами  $(x, y, z)$  записываются в виде

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z)\theta_x, \quad v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z)\theta_y, \quad w = w_0(x, y),$$

где  $u, v, w$  — смещения в направлениях  $x, y, z$ ;  $u_0, v_0, w_0$  — смещения точек срединной поверхности;  $\theta_x, \theta_y$  — углы поворота плоскостей  $yz$  и  $xz$  при изгибе соответственно;  $\Psi(z)$  — функция, определяющая распределение поперечных деформаций и напряжений по толщине пластины. Полагая  $\Psi(z) = 0$ , получаем КТП, полагая  $\Psi(z) = z$ , имеем ТППДС. Распределение смещений в теории третьего порядка Редди [4] получается, если положить

$$\Psi(z) = z(1 - 4z^2/(3h^2)).$$

1.3. *Уточненная теория пластин.* Предлагаемая теория включает следующие основные положения:

- в распределении смещений учитывается поперечный сдвиг;
- число неизвестных функций равно четырем (в теориях ТППДС Рейсснера и Миндлина пять неизвестных функций);
- допустима вариационная формулировка теории;
- распределение напряжений сдвига точно удовлетворяет условию отсутствия касательных напряжений на верхней и нижней поверхностях пластины;
- отсутствует необходимость введения корректирующего коэффициента для учета деформаций и напряжений сдвига.

В предлагаемой теории принимаются следующие допущения:

- 1) смещения малы по сравнению с толщиной пластины, поэтому используются линейные соотношения между деформациями и смещениями;
- 2) выражение для поперечного смещения  $w$  содержит два слагаемых  $w_b$  и  $w_s$ , соответствующие изгибу и сдвигу:

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y); \quad (4)$$

- 3) нормальное напряжение  $\sigma_z$  пренебрежимо мало по сравнению с напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , действующими в плоскости пластины;

- 4) выражения для смещения  $u$  в направлении  $x$  и смещения  $v$  в направлении  $y$  содержат три слагаемых, соответствующие растяжению, изгибу и сдвигу:

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s. \quad (5)$$

Слагаемые  $u_b$  и  $v_b$ , соответствующие изгибу, принимаются в том же виде, что и в КТП:

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y}. \quad (6)$$

Слагаемые  $u_s$  и  $v_s$ , соответствующие сдвигу, выбираются с учетом выражения для  $w_s$ , так чтобы деформации сдвига  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ , а следовательно, и касательные напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  были распределены по толщине пластины по параболическому закону и удовлетворяли условию отсутствия касательных усилий на нижней и верхней поверхностях пластины:

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}. \quad (7)$$

С учетом принятых допущений (соотношения (4)–(7)) выражения для смещений записываются следующим образом:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad (8)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y).$$

Функция  $f(z)$  выбирается в виде

$$f(z) = z[1 + (3\pi/2) \sec h^2(1/2)] - (3\pi/2)h \operatorname{th}(z/h). \quad (9)$$

Нелинейные соотношения Кармана между смещениями и деформациями имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w_b}{\partial z} + \frac{\partial w_s}{\partial z} = 0,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right), \quad (10)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right), \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right).$$

С учетом уравнений (8)–(10) получаем

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z k_y^b + f(z) k_y^s, \quad \varepsilon_z = 0, \quad (11)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy}^b + f(z) k_{xy}^s, \quad \gamma_{yz} = g(z) \gamma_{yz}^s, \quad \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s,$$

где

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right)^2, \quad k_x^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}, \quad k_x^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right)^2, \quad k_y^b = -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2}, \quad k_y^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2},$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \left( \frac{\partial w_b}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w_b}{\partial y} + \frac{\partial w_s}{\partial y} \right), \quad k_{xy}^b = -2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y}, \quad k_{xy}^s = -2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y},$$

$$\gamma_{yz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}^s = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z), \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz}.$$

Для упругого изотропного ФГМ определяющие соотношения записываются в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(n)} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{(n)}, \\ \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}^{(n)} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}^{(n)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  и  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  — компоненты тензоров напряжения и деформации соответственно. С учетом (1) элементы матрицы жесткости  $Q_{ij}$  можно представить следующим образом:

$$Q_{11}^{(n)} = Q_{22}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{1 - \nu^2}, \quad Q_{12}^{(n)} = \frac{\nu E^{(n)}(z)}{1 - \nu^2}, \quad Q_{44}^{(n)} = Q_{55}^{(n)} = Q_{66}^{(n)} = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1 + \nu)}.$$

Уравнения равновесия могут быть получены с использованием принципа возможных перемещений. В предлагаемой теории, учитывающей деформации сдвига, эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \delta u_0: \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \delta v_0: \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \\ \delta w_b: \quad \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + \bar{N} + q(x) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\delta w_s: \quad \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + \bar{N} + q(x) = 0;$$

$$\bar{N} = \frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial x} + N_y \frac{\partial (w_b + w_s)}{\partial y} \right),$$

где  $q(x)$  — поперечная нагрузка на верхней поверхности пластины.

В уравнениях (13) обобщенные усилия определяются по формулам

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{bmatrix} &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{bmatrix} dz, \\ (S_{xz}^s, S_{yz}^s) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $h_n, h_{n-1}$  —  $z$ -координаты верхней и нижней поверхностей  $n$ -го слоя.

С учетом (12), (14) соотношения между обобщенными напряжениями и деформациями в пластине, состоящей из трех слоев, можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{bmatrix}, \quad S = A^s \gamma, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} N &= [N_x, N_y, N_{xy}]^T, \quad M^b = [M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b]^T, \quad M^s = [M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s]^T, \\ N^T &= [N_x^T, N_y^T, 0]^T, \quad M^{bT} = [M_x^{bT}, M_y^{bT}, 0]^T, \quad M^{sT} = [M_x^{sT}, M_y^{sT}, 0]^T, \end{aligned}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0]^T, \quad k^b = [k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b]^T, \quad k^s = [k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix},$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix},$$

$$S = [S_{yz}^s, S_{xz}^s]^T, \quad \gamma = [\gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^T, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix},$$

$A_{ij}, B_{ij}, \dots$  — жесткости пластины:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} Q_{11}^{(n)} [1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)] \begin{bmatrix} 1 \\ \nu^{(n)} \\ (1 - \nu^{(n)})/2 \end{bmatrix} dz,$$

$$[A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s] = [A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s], \quad Q_{11}^{(n)} = E(z)/(1 - \nu^2),$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} [g(z)]^2 dz.$$

Уравнения равновесия (13) с учетом (15) можно записать через перемещения  $u_0, v_0, w_b, w_s$ :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} -$$

$$- B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} = 0,$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} -$$

$$- B_{22}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} - (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} -$$

$$- D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} -$$

$$- D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \bar{N} + q(x) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}^s \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - \\
& - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - \\
& - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - H_{22}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + \\
& + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + A_{44}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \bar{N} + q(x) = 0.
\end{aligned}$$

1.4. *Метод решения.* Полная потенциальная энергия  $\Pi$  квадратной трехслойной пластины из ФГМ равна сумме энергии деформации  $U$  и потенциальной энергии равномерного внешнего давления  $V$ :

$$\Pi = U + V.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^a \int_0^a q(w_b + w_s) dx dy, \\
U &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \left( \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dz \right) dx dy,
\end{aligned}$$

$a$  — длина стороны квадратной трехслойной пластины в плоскости  $xy$ .

Для нахождения приближенного решения задачи используется принцип минимума потенциальной энергии. Краевые условия для свободно опертой трехслойной пластины из ФГМ имеют вид

$$\begin{aligned}
v_0(0, y) &= w_b(0, y) = w_s(0, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(0, y) = 0, \\
v_0(a, y) &= w_b(a, y) = w_s(a, y) = \frac{\partial w_s}{\partial y}(a, y) = 0, \\
M_x^b(0, y) &= M_x^s(0, y) = M_x^b(a, y) = M_x^s(a, y) = 0, \\
u_0(x, 0) &= w_b(x, 0) = w_s(x, 0) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, 0) = 0, \\
u_0(x, a) &= w_b(x, a) = w_s(x, a) = \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, a) = 0, \\
M_y^b(x, 0) &= M_y^s(x, 0) = M_y^b(x, a) = M_y^s(x, a) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Поле перемещений и поворотов удовлетворяет краевым условиям для свободно опертой пластины [23]:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \sin(2\pi x/a) \sin(\pi y/a) \\ C \sin(\pi x/a) \sin(2\pi y/a) \\ W_0^b \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a) \\ W_0^s \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где  $C$ ,  $W_0^b$ ,  $W_0^s$  — произвольные параметры, которые определяются из условия минимума потенциальной энергии

$$\frac{\partial \Pi}{\partial (C, W_0^b, W_0^s)} = 0.$$

Из условий (16) получаем три нелинейных уравнения равновесия, записанные через  $C$ ,  $W_0^b$ ,  $W_0^s$ . Определив с помощью этих уравнений параметры  $C$ ,  $W_0^b$ ,  $W_0^s$ , перемещения можно вычислить по формулам (17), деформации и напряжения — по формулам (11), (12) соответственно.

**2. Результаты исследования и их обсуждение.** Предлагаемая теория применима при решении задачи о деформировании трехслойной пластины из ФГМ, фракциями которого являлись керамика и металл (алюмина и алюминий). Для алюминия модуль Юнга и коэффициент Пуассона были выбраны равными 70 ГПа и 0,3, для алюмины — 380 ГПа и 0,3.

Рассмотрены пластины с различными толщинами основного слоя  $t_c/h$ . Результаты решения представлены в следующих безразмерных переменных:  $W = w/h$  — смещение центральной точки пластины,  $Q = qa^4/(E_m h^4)$  — параметр нагрузки ( $q$  — равномерная поперечная нагрузка),  $\sigma = \sigma_x a^2/(E_m h^2)$  — осевое напряжение,  $Z = z/h$  — координата, изменяющаяся по толщине пластины. Задача решалась для свободно опертой квадратной пластины с длиной стороны  $a = 200$  мм и толщиной  $h = 10$  мм.

На рис. 2,а представлена зависимость безразмерного смещения в центре пластины  $W$  от показателя  $k$  для пластины с  $a/h = 20$  и толщиной основного слоя  $t_c = 0,8h$ . Видно, что при всех значениях показателя  $k$  для тонкой пластины из ФГМ результаты, полученные с использованием теории, предложенной в данной работе, ТППДС, ТТПДС и КТП, совпадают. Это объясняется тем, что в тонких пластинах влияние сдвиговых напряжений пренебрежимо мало.

На рис. 2,б представлены аналогичные зависимости для пластины с  $a/h = 2$ . Малые значения показателя  $k$  соответствуют пластинам, в которых преобладает керамика (алюмина) с большим значением модуля Юнга. Из рис. 2,б следует, что прогибы, полученные с использованием КТП, меньше прогибов, полученных по другим теориям. Зависимости,

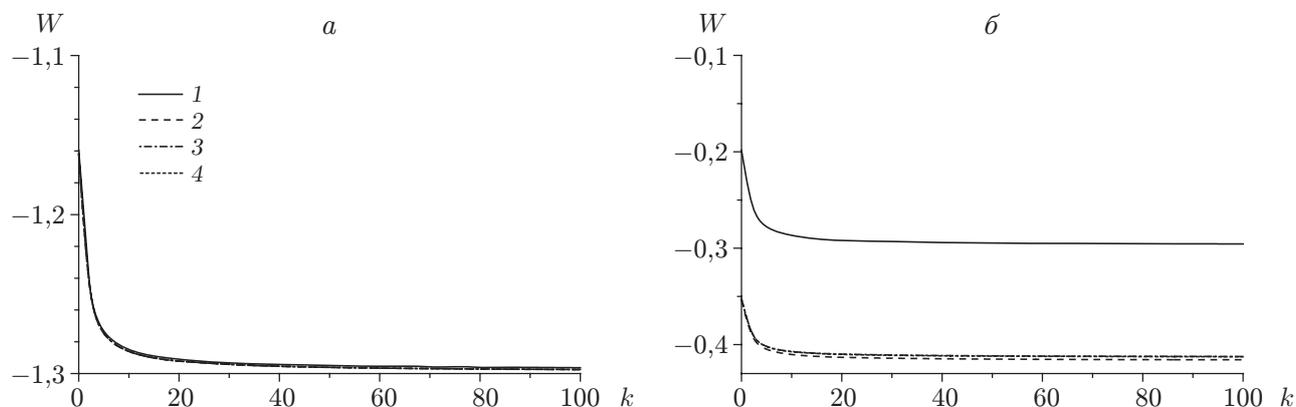


Рис. 2. Зависимости смещения  $W$  в центре пластины от показателя  $k$  в степенном законе распределения фракций, полученные с использованием различных теорий ( $t_c/h = 0,8$ ):

$a$  —  $Q = -400$ ,  $a/h = 20$ ,  $b$  —  $Q = -25$ ,  $a/h = 2$ ; 1 — КТП, 2 — ТППДС, 3 — ТТПДС, 4 — предлагаемая уточненная теория

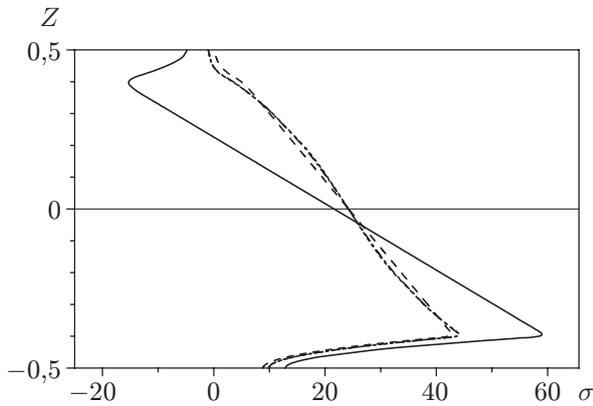


Рис. 3

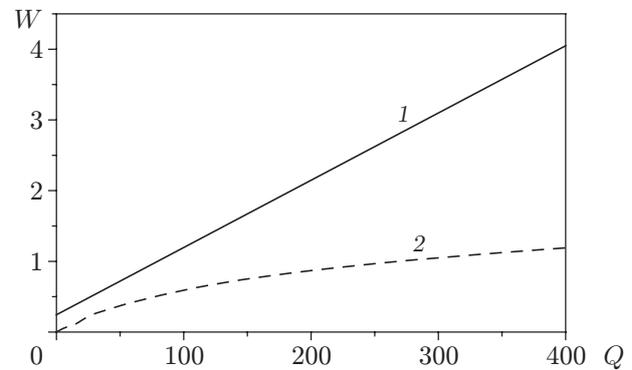


Рис. 4

Рис. 3. Распределение аксиальных напряжений по толщине трехслойной пластины при  $Q = -25$ ,  $a/h = 2$ ,  $k = 2$ ,  $t_c/h = 0,8$  (обозначения те же, что на рис. 2)

Рис. 4. Зависимость смещения в центре пластины от параметра нагрузки  $Q$  при  $a/h = 10$ ,  $k = 0,2$ ,  $t_c/h = 0,8$ :

1 — расчет по линейной теории; 2 — расчет по нелинейной теории

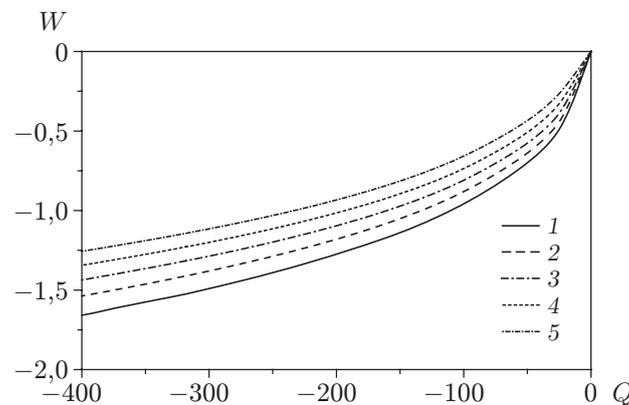


Рис. 5. Зависимость смещения в центре пластины от параметра нагрузки  $Q$  при  $a/h = 10$ ,  $k = 2$  и различных значениях толщины основного слоя:

1 —  $t_c/h = 0$ ; 2 —  $t_c/h = 0,2$ ; 3 —  $t_c/h = 0,4$ ; 4 —  $t_c/h = 0,6$ ; 5 —  $t_c/h = 0,8$

построенные по представленной в данной работе теории, ТППДС, ТТПДС, практически совпадают. Однако прогибы пластины, полученные с помощью ТТПДС, несколько больше.

Из приведенных на рис. 2 результатов следует, что с уменьшением показателя  $k$  прогиб в центре пластины уменьшается. В этом случае уменьшение прогибов обусловлено свойствами керамики. Малые значения  $k$  соответствуют пластине из ФГМ, в котором преобладает керамика.

На рис. 3 показано распределение аксиальных напряжений по толщине квадратной трехслойной пластины при  $a/h = 2$ ,  $k = 2$ . Результаты, полученные с использованием теории, предложенной в данной работе, хорошо согласуются с результатами, полученными с использованием ТТПДС.

На рис. 4 представлена зависимость прогиба в центре квадратной пластины от параметра нагрузки  $Q$  при  $t_c = 0,8h$ ,  $k = 0,2$ ,  $a/h = 10$ . Расчет по линейной теории дает

завышенные значения прогиба. В случае прогибов, превышающих  $0,5h$ , необходимо использовать нелинейную теорию.

На рис. 5 представлена зависимость смещения в центре квадратной пластины из ФГМ от параметра нагрузки  $Q$  при  $k = 2$ ,  $a/h = 10$  и различных значениях толщины основного слоя. Видно, что смещение увеличивается с увеличением параметра нагрузки  $Q$  и уменьшается с увеличением отношения  $t_c/h$ . С увеличением объемной доли металлической фракции смещение в центре пластины из ФГМ увеличивается.

**Заключение.** В работе представлена эффективная и простая уточненная теория нелинейного деформирования трехслойных пластин. Для учета больших перемещений используются геометрически нелинейные соотношения Кармана. При решении задачи применяется энергетический метод. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что использование при анализе нелинейного деформирования пластин из ФГМ предложенной теории является более эффективным, чем использование ТППДС и ТТПДС.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Koizumi M.** The concept of FGM ceramic transactions // *Functional. Gradient Materials*. 1993. V. 34. P. 3–10.
2. **Koizumi M.** FGM activities in Japan // *Composites. Pt B. Engng.* 1997. V. 28, N 1/2. P. 1–4.
3. **Suresh S.** Fundamentals of functionally graded materials / S. Suresh, A. Mortensen. L.: IOM Commun., 1998.
4. **Reddy J. N.** Analysis of functionally graded plates // *Intern. J. Numer. Methods Engng.* 2000. V. 47. P. 663–684.
5. **Cheng Z. Q., Batra R. C.** Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories // *Arch. Mech.* 2000. V. 52, N 1. P. 143–158.
6. **Cheng Z. Q., Batra R. C.** Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates // *J. Sound Vibration*. 2000. V. 229. P. 879–895.
7. **Cheng Z. Q., Batra R. C.** Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate // *Composites. Pt B. Engng.* 2000. V. 31, N 2. P. 97–106.
8. **Vel S. S., Batra R. C.** Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates // *AIAA J.* 2002. V. 40, N 7. P. 1421–1433.
9. **Zenkour A. M.** Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate // *Arch. Appl. Mech.* 2007. V. 77, N 4. P. 197–214.
10. **Zenkour A. M.** A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates. Pt 1. Deflection and stresses // *Intern. J. Solids Structures*. 2005. V. 42, N 18/19. P. 5224–5242.
11. **Zenkour A. M.** A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates. Pt 2. Buckling and free vibration // *Intern. J. Solids Structures*. 2005. V. 42, N 18/19. P. 5243–5258.
12. **Mizuguchi F., Ohnabe H.** Large deflections of heated functionally graded simply supported rectangular plates with varying rigidity in thickness direction // *Proc. of the 11th Tech. conf. of the Amer. Soc. for composites*, Oct. 7–9, 1996. S. l.: Technomic Publ. Co. Inc., 1996. P. 957–966.
13. **Feldman E., Aboudi J.** Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading // *Composite Structures*. 1997. V. 38. P. 29–36.
14. **Praveen G. N., Reddy J. N.** Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates // *Intern. J. Solids Structures*. 1998. V. 35, N 33. P. 4457–4476.
15. **Woo J., Meguid S. A.** Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells // *Intern. J. Solids Structures*. 2001. V. 38, N 42. P. 7409–7421.

16. **Yang J., Shen H. S.** Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads // Intern. J. Non-Linear Mech. 2003. V. 38. P. 467–482.
17. **Shen H. S.** Postbuckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermo-electro-mechanical loadings // Intern. J. Solids Structures. 2005. V. 42, N 23. P. 6101–6121.
18. **Shen H. S.** Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments // Composites Sci. Technol. 2005. V. 65. P. 1675–1690.
19. **Ma L. S., Wang T. J.** Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory // Intern. J. Solids Structures. 2004. V. 41. P. 85–101.
20. **Agarwal S., Chakraborty A., Gopalakrishnan S.** Large deformation analysis for anisotropic and inhomogeneous beams using exact linear static solutions // Composite Structures. 2006. V. 72, N 1. P. 91–104.
21. **Ghannadpour S. A. M., Alinia M. M.** Large deflection behavior of functionally graded plates under pressure loads // Composite Structures. 2006. V. 75. P. 67–71.
22. **El Meiche N., Tounsi A., Ziane N., et al.** A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate // Intern. J. Mech. Sci. 2011. V. 53. P. 237–247.
23. **Reddy J. N.** Mechanics of laminated composite plates. Boca Raton: CRC Press, 1997.

*Поступила в редакцию 8/XII 2011 г.,  
в окончательном варианте — 27/III 2012 г.*

---