$\mathcal{AMS}$ subject classification: 6505, 65H99

Полулокальная сходимость метода продолжения в банаховых пространствах*

М. Прасхант, С. Мотса

Department of Mathematics, Statistics and Computer science, University of Kawazulu-Natal, Private Bag X01, Scottsville 3209, Pietermaritzburg, South Africa

E-mails: maroju.prashanth@gmail.com (Прасхант М.), sandilemotsa@gmail.com (Мотса С.)

Прасхант М., Мотса С. Полулокальная сходимость метода продолжения в банаховых пространствах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 59–75.

В данной статье рассматривается полулокальная сходимость метода продолжения между двух итерационных методов третьего порядка, а именно метода Галлея и выпуклого ускорения метода Ньютона, также известного как суперметод Галлея. Анализ сходимости обсуждается с использованием рекуррентных соотношений. Этот подход упрощает анализ и приводит к лучшим результатам. Анализ сходимости проводится при предположении, что вторая производная Фреше удовлетворяет условию непрерывности Липшица. Приводится теорема существования и единственности. Кроме того, получена замкнутая форма границ ошибки для вещественного параметра $\alpha \in [0, 1]$. Два численных примера решены для демонстрации эффективности нашего подхода. При сравнении области существования и единственности и границ ошибки для решения, полученного путем нашего анализа, с областями, полученными с использованием мажорирующих последовательностей [15], оказалось, что наш анализ дает лучшие результаты. Кроме того, для конкретных значений α наш анализ сводится к анализу метода Галлея ($\alpha = 0$) и выпуклого ускорения метода Ньютона ($\alpha = 1$) с получением лучших результатов.

DOI: 10.15372/SJNM20170106

Ключевые слова: *метод Галлея, выпуклое ускорение метода Ньютона, метод продолжения, банахово пространство, условие Липшица, производная Фреше.*

Prashanth M., Motsa S. Semilocal convergence of a continuation method in Banach spaces // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 1. — P. 59–75.

This paper is concerned with the semilocal convergence of a continuation method between two third-order iterative methods, namely, Halley's method and the convex acceleration of Newton's method, also known as super-Halley's method. This convergence analysis is discussed using a recurrence relations approach. This approach simplifies the analysis and leads to improved results. The convergence is established under the assumption that the second Fréchet derivative satisfies the Lipschitz continuity condition. An existence-uniqueness theorem is given. Also, a closed form of error bounds is derived in terms of a real parameter $\alpha \in [0, 1]$. Two numerical examples are worked out to demonstrate the efficiency of our approach. On comparing the existence and uniqueness region and error bounds for the solution obtained by our analysis with those obtained by using majorizing sequences [15], we observed that our analysis gives better results. Further, we observed that for particular values of α our analysis reduces to Halley's method ($\alpha = 0$) and convex acceleration of Newton's method ($\alpha = 1$), respectively, with improved results.

Keywords: *Halley's method, convex acceleration of Newton's method, continuation method, Banach space, Lipschitz condition, Fréchet derivative.*

*Работа выполнена при поддержке университета Квазулу-Натал, Питермарицбург, Южная Африка.

1. Введение

В данной статье рассматривается задача аппроксимации решения x^* уравнения

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где F — дважды дифференцируемый по Фреше оператор, определенный на выпуклом подмножестве Ω банахова пространства X со значениями в банаховом пространстве Y. Многие задачи кинетической теории газов, упругости, прикладной математики и техники решаются путем нахождения решений некоторых нелинейных уравнений типа (1). Например, математическое моделирование динамических систем выполняется с помощью разностных или дифференциальных уравнений, и их решения обычно представляют собой состояния этих систем. Для простоты предполагается, что стационарная система управляется уравнением $x' = Q(x)$ для некоторого подходящего оператора Q, где x — состояние системы. Состояния равновесия определяются путем решения (1). Подобные решения используются в случае дискретных систем. Неизвестные в технических уравнениях могут быть функциями (в разностных, дифференциальных и интегральных уравнениях), векторами (в системах линейных и нелинейных алгебраических уравнений), действительными или комплексными числами (в одиночных алгебраических уравнениях с одним неизвестным). Эти задачи широко изучались многими учеными [1–4], разработаны многие методы различных порядков, выполнен анализ их локальной, полулокальной и общей сходимости.

Разработкой итерационных методов занимались многие исследователи, которые использовали анализ полулокальной сходимости для решения уравнения (1). Метод Ньютона и его варианты — наиболее известные и широко используемые квадратически сходящиеся итерационные методы для решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Основные результаты по сходимости метода Ньютона, оценкам ошибок и существованию и единственности решения получены в теореме Канторовича. Канторович [6] создал два различных метода для доказательства своей теоремы. Один из них использует мажорирующие последовательности, полученные таким же итерационным методом, который применяется к скалярной функции для мажорирования итераций. Другой метод использует рекуррентные соотношения, которые имеют некоторые преимущества по сравнению с мажорирующими последовательностями, поскольку исходная задача в банаховом пространстве может быть сведена к более простой задаче с вещественными последовательностями и векторами. Кроме того, имеется симметрия между некоторыми особыми свойствами итерационного метода и соответствующими свойствами системы рекуррентных соотношений. Некоторые из наиболее часто используемых итерационных методов высокого порядка — это методы Чебышева, Галлея и выпуклое ускорение метода Ньютона. Выпуклое ускорение метода Ньютона также известно как суперметод Галлея. Это методы третьего порядка, и они могут успешно использоваться для решения уравнения (1). Сходимость метода Галлея и выпуклого ускорения метода Ньютона с использованием мажорирующей последовательности при предположении, что F'' удовлетворяет условию непрерывности Липшица, обсуждается в [14, 17]. Полулокальная сходимость метода Галлея, суперметода Галлея и метода Чебышева с использованием рекуррентных соотношений при предположении, что производная Фреше второго порядка удовлетворяет условию непрерывности Липшица, рассматривается в работах [8, 9, 13]. Полулокальная сходимость итерационных методов третьего порядка устанавливается в [12, 15].

Метод продолжения — это параметрический метод, дающий непрерывную связь между двумя функциями f и g. Математически метод продолжения между двумя функциями $f, g : X \to Y$, где X и Y — банаховы пространства, определяется как непрерывное отображение $h : [0,1] \times X \to Y$, такое что $h(\alpha, x) = \alpha f(x) + (1-\alpha) g(x)$, $\alpha \in [0,1]$, и $h(0,x) = g(x)$, $h(1,x) = f(x)$. Метод продолжения известен с 30-х годов прошлого века. Он использовался специалистами по кинематике в 60-х годах для решения задач, связанных с механизмом синтеза. Он дает некоторые ответы и простой итерационный процесс для получения более точных решений. Обзор литературы по данной теме можно найти в работах [5, 7, 10]. Сходимость метода продолжения между методом Галлея и выпуклым ускорением метода Ньютона с использованием мажорирующих последовательностей обсуждается в [15]. Полулокальная сходимость метода продолжения между методом Чебышева и выпуклым ускоренным методом Ньютона с использованием мажорирующих последовательностей рассматривается в [11]. С использованием рекуррентного соотношения полулокальная сходимость метода продолжения при предположении, что вторая производная Фреше удовлетворяет условию непрерывности Липшица, устанавливается в [16].

В данной статье рассматривается полулокальная сходимость метода продолжения, объединяющего метод Галлея и выпуклое ускорение метода Ньютона для решения уравнения (1). Приводится теорема существования и единственности. Кроме того, получена замкнутая форма границ ошибки для $\alpha \in [0,1]$. Два численных примера решены для демонстрации эффективности нашего анализа сходимости. При сравнении области существования и единственности и границ ошибки для решения, полученного путем нашего анализа, с областями, полученными с использованием мажорирующих последовательностей [11], оказалось, что наш анализ дает лучшие результаты. Кроме того, для конкретных значений α наш анализ сводится к анализу метода Галлея ($\alpha = 0$) и выпуклого ускорения метода Ньютона ($\alpha = 1$).

Закончим данный пункт кратким описанием организации статьи. Пункт 1 — введение. В п. 2 представлен метод продолжения, объединяющий метод Галлея и выпуклое ускорение метода Ньютона для решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах, и получены рекуррентные соотношения. Теорема сходимости, дающая область существования и единственности и оценки ошибки для решения, приведена в п. 3. В п. 4 решены два численных примера для демонстрации эффективности нашего подхода, и полученные результаты сравниваются с результатами, полученными в статье [11]. Выводы даны в п. 5.

2. Рекуррентные соотношения

В этом пункте мы получим метод продолжения, объединяющий два итерационных метода третьего порядка, а именно: метод Галлея и выпуклое ускорение метода Ньютона для решения уравнения (1). Затем установим рекуррентные соотношения. Предположим, что $F'(x_0)^{-1} \in L(Y,X)$ существует в некоторой точке $x_0 \in \Omega$, где $L(Y,X)$ — множество ограниченных линейных операторов из Y в X. Хорошо известный метод Галлея и выпуклое ускорение метода Ньютона можно определить следующим образом. Для подходящего начального приближения $x_0 \in \Omega$ определим для $n = 0, 1, 2, \ldots$ итерации:

$$x_{n+1} = \psi_0(x_n) = x_n - \left[I + \frac{1}{2} L_F(x_n) \Big(I - \frac{1}{2} L_F(x_n) \Big)^{-1} \right] F'(x_n)^{-1} F(x_n) \qquad (2)$$

и

$$x_{n+1} = \psi_1(x_n) = x_n - \left[I + \frac{1}{2} L_F(x_n) \Big(I - L_F(x_n) \Big)^{-1} \right] F'(x_n)^{-1} F(x_n), \qquad (3)$$

где I — тождественный оператор, а $L_F(x)$ — линейный оператор, задаваемый путем

$$L_F(x) = F'(x)^{-1}F''(x)F'(x)^{-1}F(x), \quad x \in X. \tag{4}$$

Теперь метод продолжения между (2) и (3) можно определить для соответствующего начального приближения $x_{\alpha,0} \in \Omega$, $\alpha \in [0,1]$, и для $n = 0, 1, 2, \ldots$ посредством итерации

$$x_{\alpha,n+1} = \alpha\psi_1(x_{\alpha,n}) + (1-\alpha)\psi_0(x_{\alpha,n}), \quad n \geq 0. \tag{5}$$

Подставив $\psi_0(x_n)$ из (2) и $\psi_1(x_n)$ из (3) в (5), мы получим

$$x_{\alpha,n+1} = x_{\alpha,n} - \left[I + \frac{1}{2}L_F(x_{\alpha,n})G_\alpha(x_{\alpha,n})T_\alpha(x_{\alpha,n})\right]F'(x_{\alpha,n})^{-1}F(x_{\alpha,n}), \tag{6}$$

где $G_\alpha(x_{\alpha,n}) = \Big(I - \frac{1}{2}L_F(x_{\alpha,n})\Big)^{-1}$, $T_\alpha(x_{\alpha,n}) = I + \frac{\alpha}{2}L_F(x_{\alpha,n})H_\alpha(x_{\alpha,n})$ для $H_\alpha(x_{\alpha,n}) = \big(I - L_F(x_{\alpha,n})\big)^{-1}$ и $L_F(x_{\alpha,n}) = F'(x_{\alpha,n})^{-1}F''(x_{\alpha,n})F'(x_{\alpha,n})^{-1}F(x_{\alpha,n})$.

Теперь получим некоторые вещественные последовательности для приведенного выше метода (6). Пусть $\Gamma_{\alpha,0} = F'(x_{\alpha,0})^{-1} \in L(Y, X)$ существует в некоторой $x_{\alpha,0}$ и пусть верны следующие предположения:

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ \ \|\Gamma_{\alpha,0}\| = \|F'(x_{\alpha,0})^{-1}\| \leq \beta,\\
2.\ \ \|F'(x_{\alpha,0})^{-1}F(x_{\alpha,0})\| \leq \eta,\\
3.\ \ \|F''(x)\| \leq M \quad \forall\, x \in \Omega,\\
4.\ \ \|F''(x) - F''(y)\| \leq N(\|x-y\|) \quad \forall\, x, y \in \Omega
\end{array}\right\}. \tag{7}$$

Возьмем

$$a = M\beta\eta, \qquad b = N\beta\eta^2. \tag{8}$$

Теперь для $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = a$, $d_0 = \dfrac{\alpha a^2 - 4a + 4}{2(1-a)(2-a)}$ определим следующие вещественные последовательности для $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - a a_n d_n},$$

$$b_{n+1} = a_{n+1}d_n^3\left[\frac{4a^2a_n(1-\alpha)(2-c_n)^2(1-c_n)^3}{(\alpha c_n^2 - 4c_n + 4)^3} + \frac{a^2c_n(2+(\alpha-2)c_n)^2(2-c_n)(1-c_n)a_n}{(\alpha c_n^2 - 4c_n + 4)^3} + \frac{b}{6}\right],$$

$$c_{n+1} = a a_{n+1}b_{n+1},$$

$$d_{n+1} = \frac{\alpha c_{n+1}^2 - 4c_{n+1} + 4}{2(1-c_{n+1})(2-c_{n+1})}\, b_{n+1}.$$

Используя эти последовательности, докажем следующие неравенства:

(I) $\|\Gamma_{\alpha,n}\| = \|F'(x_{\alpha,n})^{-1}\| \leq a_n\beta$,

(II) $\|\Gamma_{\alpha,n}F(x_{\alpha,n})\| \leq b_n\eta$,

(III) $\|L_F(x_{\alpha,n})\| \leq c_n$,

(IV) $\|x_{\alpha,n+1} - x_{\alpha,n}\| \leq d_n\eta$.

Для доказательства приведенных выше неравенств необходима следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $F : \Omega \subseteq X \to Y$ — нелинейный оператор, дважды дифференцируемый по Фреше в открытой выпуклой области Ω банахова пространства X со значениями в банаховом пространстве Y. Тогда $\forall\, n \in N$ и $\alpha \in [0,1]$ имеем*

$$\begin{aligned} F(x_{\alpha,n+1}) = {} & \frac{(1-\alpha)}{4} F''(x_{\alpha,n}) \Big[\Gamma_{\alpha,n} F(x_{\alpha,n})\Big]^2 L_F(x_{\alpha,n}) G_\alpha(x_{\alpha,n}) + \\ & \frac{1}{8} F''(x_{\alpha,n}) L_F(x_{\alpha,n})^2 G_\alpha(x_{\alpha,n})^2 T_\alpha(x_{\alpha,n}) \Big[\Gamma_{\alpha,n} F(x_{\alpha,n})\Big]^2 + \\ & \frac{1}{2} \int\limits_0^1 F'''\big(x_{\alpha,n} + t(x_{\alpha,n+1} - x_{\alpha,n})\big)(x_{\alpha,n+1} - x_{\alpha,n})^3 (1-t)^2\, dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Используя формулу Тэйлора, мы получим

$$\begin{aligned} F(x_{\alpha,n+1}) = {} & F(x_{\alpha,n}) + F'(x_{\alpha,n})(x_{\alpha,n+1} - x_{\alpha,n}) + F''(x_{\alpha,n}) \frac{(x_{\alpha,n+1} - x_{\alpha,n})^2}{2} + \\ & \int\limits_{x_{\alpha,n}}^{x_{\alpha,n+1}} \Big[F''(x) - F''(x_{\alpha,n})\Big](x_{\alpha,n+1} - x)\, dx \\ = {} & F(x_{\alpha,n}) - F'(x_{\alpha,n}) \Big[I + \frac{1}{2} L_F(x_{\alpha,n}) J(x_{\alpha,n}) T_\alpha(x_{\alpha,n})\Big] F'(x_{\alpha,n})^{-1} F(x_{\alpha,n}) + \\ & \frac{F''(x_{\alpha,n})}{2} \Big[I + \frac{1}{2} L_F(x_{\alpha,n}) J(x_{\alpha,n}) T_\alpha(x_{\alpha,n})\Big]^2 \Big[F'(x_{\alpha,n})^{-1} F(x_{\alpha,n})\Big]^2 + \\ & \int\limits_{x_{\alpha,n}}^{x_{\alpha,n+1}} \Big[F''(x) - F''(x_{\alpha,n})\Big](x_{\alpha,n+1} - x)\, dx \\ = {} & \frac{1}{2} F''(x_{\alpha,n}) \Big(\Gamma_{\alpha,n} F(x_{\alpha,n})\Big)^2 \Big[I - \Big(J(x_{\alpha,n}) T_\alpha(x_{\alpha,n}) + L_F(x_{\alpha,n}) J(x_{\alpha,n}) T_\alpha(x_{\alpha,n})\Big)\Big] + \\ & \frac{1}{8} F''(x_{\alpha,n}) \Big(\Gamma_{\alpha,n} F(x_{\alpha,n})\Big)^2 \Big(L_F(x_{\alpha,n})\Big)^2 \Big(J(x_{\alpha,n})\Big)^2 T_\alpha(x_{\alpha,n}) + \\ & \frac{1}{2} \int\limits_{x_{\alpha,n+1}}^{x_{\alpha,n}} F'''(x)(x_{\alpha,n+1} - x)^2 dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x_{\alpha,n+1}) = {} & \frac{(1-\alpha)}{4} F''(x_{\alpha,n}) \Big[\Gamma_{\alpha,n} F(x_{\alpha,n})\Big]^2 L_F(x_{\alpha,n}) J(x_{\alpha,n}) + \\ & \frac{1}{8} F''(x_{\alpha,n}) \Big[L_F(x_{\alpha,n}) J(x_{\alpha,n}) T_\alpha(x_{\alpha,n}) \Gamma_{\alpha,n} F(x_{\alpha,n})\Big]^2 + \\ & \frac{1}{2} \int\limits_0^1 F'''\big(x_{\alpha,n} + t(x_{\alpha,n+1} - x_{\alpha,n})\big)(x_{\alpha,n+1} - x_{\alpha,n})^3 (1-t)^2\, dt. \qquad \square \end{aligned}$$

Теперь можно доказать условия (I)–(IV) по индукции. Условия (I) и (II) для $n = 0$ следуют из предположений (1) и (2). Поскольку

$$\begin{aligned} \big\|L_F(x_{\alpha,0})\big\| &= \big\|F'(x_{\alpha,0})^{-1} F(x_{\alpha,0}) F'(x_{\alpha,0})^{-1} F''(x_{\alpha,0})\big\| \\ &= \big\|\Gamma_{\alpha,0} F(x_{\alpha,0})\big\| \, \big\|\Gamma_{\alpha,0}\big\| \, \big\|F''(x_{\alpha,0})\big\| \\ &\le b_0 \eta a_0 \beta k_1 \le M\beta\eta = a = c_0 < 1, \end{aligned}$$

условие (III) также удовлетворяется для $n = 0$. С использованием леммы Банаха получим

$$\left\|\left(I - \frac{1}{2}L_F(x_{\alpha,0})\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left\|L_F(x_{\alpha,0})\right\|} = \frac{1}{1 - \frac{c_0}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{2}} = \frac{2}{2 - a}$$

и

$$\left\|H_\alpha(x_{\alpha,0})\right\| = \left\|\left(I - L_F(x_{\alpha,0})\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - a}.$$

Из

$$T_\alpha(x_{\alpha,0}) = I + \frac{\alpha}{2}L_F(x_{\alpha,0})H_\alpha(x_{\alpha,0})$$

мы имеем

$$\left\|T_\alpha(x_{\alpha,0})\right\| \le 1 + \frac{\alpha}{2}\left\|L_F(x_{\alpha,0})\right\|\,\left\|H_\alpha(x_{\alpha,0})\right\| = 1 + \frac{\alpha a}{2(1 - a)} \le \frac{2 + (\alpha - 2)a}{2(1 - a)}.$$

Используя (6) и условие (II), получим

$$\left\|x_{\alpha,1} - x_{\alpha,0}\right\| \le \left[\frac{4 - 4a + \alpha a^2}{2(1 - a)(2 - a)}\right]\eta \le d_0\eta.$$

Следовательно, условия (III) и (IV) также выполняются для $n = 0$. Предположим, что условия (I)–(IV) выполняются для $n = k$. Чтобы доказать, что они также выполняются для $n = k+1$, используем $x_{\alpha,k} \in \Omega,\ c_k < 1$ и $aa_kd_k < 1$ для получения $\left\|I - \Gamma_{\alpha,k}F'(x_{\alpha,k})\right\| \le aa_kd_k < 1$. Теперь, используя теорему Банаха, мы находим, что $\Gamma_{\alpha,k+1} = F'(x_{\alpha,k+1})^{-1}$ существует и

$$\left\|\Gamma_{\alpha,k+1}\right\| \le \frac{\left\|\Gamma_{\alpha,k}\right\|}{1 - \left\|I - \Gamma_{\alpha,k}F'(x_{\alpha,k})\right\|} \le \frac{a_k\beta}{1 - aa_kd_k} = a_{k+1}\beta. \tag{10}$$

Из (9) получим

$$\left\|F(x_{\alpha,k+1})\right\| \le \frac{1 - \alpha}{2}\,\frac{M\eta^2 b_k^2 c_k}{2 - c_k} + \frac{Mb_k^2\eta^2c_k^2\left(2 + (\alpha - 1)c_k\right)^2}{8(1 - c_k)^2(2 - c_k)^2} + \frac{d_k^3\eta^3N}{6} \tag{11}$$

и

$$\begin{aligned}\left\|\Gamma_{\alpha,k+1}F(x_{\alpha,k+1})\right\| &\le \left\|\Gamma_{\alpha,k+1}\right\|\left\|F(x_{\alpha,k+1})\right\| \\ &\le a_{k+1}\beta\left[\frac{(1 - \alpha)M\eta^2b_k^2c_k}{2(2 - c_k)} + \frac{Mb_k^2\eta^2c_k^2(2 + (\alpha - 2)c_k)^2}{8(1 - c_k)^2(2 - c_k)^2} + \frac{d_k^3\eta^3N}{6}\right] \\ &= a_{k+1}\left[\frac{(1 - \alpha)M\beta\eta b_k^2c_k\eta}{2(2 - c_k)} + \frac{M\beta\eta b_k^2\eta c_k^2(2 + (\alpha - 2)c_k)^2}{8(1 - c_k)^2(2 - c_k)^2} + \frac{N\beta\eta^2d_k^3\eta}{6}\right] \\ &= a_{k+1}\left[\frac{(1 - \alpha)ab_k^2c_k}{2(2 - c_k)} + \frac{ab_k^2c_k^2(2 + (\alpha - 2)c_k)^2}{8(1 - c_k)^2(2 - c_k)^2} + \frac{bd_k^3}{6}\right]\eta.\end{aligned}$$

Это дает

$$\left\|\Gamma_{\alpha,k+1}F(x_{\alpha,k+1})\right\| \le b_{k+1}\eta. \tag{12}$$

Из

$$\|L_F(x_{\alpha,k+1})\| \le \|F'(x_{\alpha,k+1})^{-1}\| \, \|F'(x_{\alpha,k+1})^{-1}F(x_{\alpha,k+1})\| \, \|F''(x_{\alpha,k+1})\|$$
$$\le a_{k+1}\beta b_{k+1}\eta k_1 = k_1\beta\eta a_{k+1}b_{k+1} = a a_{k+1}b_{k+1}$$

получим

$$\|L_F(x_{\alpha,k+1})\| \le c_{k+1}. \tag{13}$$

Снова с использованием

$$\|x_{\alpha,k+2} - x_{\alpha,k+1}\| \le \left[1 + \frac{1}{2}\|L_F(x_{\alpha,k+1})\| \, \|G_\alpha(x_{\alpha,k+1})\| \, \|T_\alpha(x_{\alpha,k+1})\|\right] \|\Gamma_{\alpha,k+1}F(x_{\alpha,k+1})\|$$
$$= \left[1 + \frac{c_{k+1}(2+(\alpha-2)c_{k+1})}{2(1-c_{k+1})(2-c_{k+1})}\right] b_{k+1}\eta = \left[\frac{4 - 4c_{k+1} + \alpha c_{k+1}^2}{2(1-c_{k+1})(2-c_{k+1})}\right] b_{k+1}\eta$$

мы имеем

$$\|x_{\alpha,k+2} - x_{\alpha,k+1}\| \le d_{k+1}\eta. \tag{14}$$

Из (10), (12)–(14) можно сделать вывод, что условия (I)–(IV) выполняются для $n = k+1$.

3. Анализ сходимости

В данном пункте мы докажем теорему сходимости с использованием рекуррентных соотношений, полученных в пункте 2 для области существования и единственности. Мы также оценим границы ошибки решения нелинейных уравнений (1), полученного методом продолжения (6). Для этого нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2. *Верно следующее рекуррентное соотношение для последовательности* $\{c_n\}$*:*

$$c_{n+1} = \frac{c_n^4\big(2+(\alpha-2)c_n\big)^2}{\big(4-10c_n+6c_n^2-\alpha c_n^3\big)^2\big(\alpha c_n^2-4c_n+4\big)^2}\left[1 + \frac{b\big(4-4c_n+\alpha c_n^2\big)^3}{6a^2a_n(2-c_n)a_n(1-c_n)\big(2+(\alpha-2)c_n\big)^2}\right].$$

Доказательство. Поскольку

$$c_n = a a_n b_n \Rightarrow b_n = \frac{c_n}{a a_n},$$

мы получим

$$d_n = \left[\frac{4-4c_n+\alpha c_n^2}{2(1-c_n)(2-c_n)}\right] b_n = \left[\frac{4-4c_n+\alpha c_n^2}{2(1-c_n(2-c_n))}\right] \frac{c_n}{a a_n}.$$

Это дает

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - a a_n d_n} = \frac{2a_n(1-c_n)(2-c_n)}{4 - 10c_n + 6c_n^2 - \alpha c_n^3}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= aa_{n+1}b_{n+1} \\
&= \frac{2aa_n^2(1-c_n)^2\big(2-c_n+(\alpha-1)c_n^2\big)^3c_n^3}{\big(2-4c_n+c_n^2-(\alpha-1)c_n^3\big)^2 8(1-c_n)^3a^3a_n^3} \times \\
&\quad \left[\frac{b}{6}+\frac{4a^2a_n(1-\alpha)(1-c_n)^3+a^2a_nc_n(1-c_n)\big(1+(\alpha-1)c_n\big)^2}{\big(2-c_n+c_n^2(\alpha-1)\big)^3}\right] \\
&= \frac{(4-4c_n+\alpha c_n^2)c_n^3}{2(4-10c_n+6c_n^2-\alpha c_n^3)^2(1-c_n)(2-c_n)a^2a_n} \times \\
&\quad \left[\frac{b}{6}+\frac{4a^2a_n(1-\alpha)(2-c_n)^2(1-c_n)^3}{(4-4c_n+\alpha c_n^2)^3}+\frac{a^2a_nc_n(1-c_n)\big(2+(\alpha-2)c_n\big)^2(2-c_n)}{(4-4c_n+\alpha c_n^2)^3}\right] \\
&= \frac{c_n^4\big(2+(\alpha-2)c_n\big)^2}{(4-10c_n+6c_n^2-\alpha c_n^3)^2(\alpha c_n^2-4c_n+4)^2} \times \\
&\quad \left[1+\frac{b(4-4c_n+\alpha c_n^2)^3}{6a^2a_n(2-c_n)a_n(1-c_n)\big(2+(\alpha-2)c_n\big)^2}\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Лемма 3. *Пусть* $r_0 = 0.52521138$ *— наименьший положительный корень многочлена*

$$\begin{aligned}
p(x) = {}& 6\big(2+(\alpha-2)x\big)^2(2-x)(1-x) \times \\
&\big[\alpha^4x^{10}-20\alpha^3x^9+(28\alpha^3+148\alpha^2)x^8+(-8\alpha^3-408\alpha^2-480\alpha)x^7+ \\
&(388\alpha^2+1952\alpha+576)x^6+(-145\alpha^2+3100\alpha-3076)x^5+ \\
&(16\alpha^2+2396\alpha+6792)x^4+(-896\alpha-7940)x^3+(128\alpha+5184)x^2-1792x+256\big]
\end{aligned}$$

для $0 \le \alpha \le 1$. *Определим функции:*

$$\begin{aligned}
Q(x) = 6(x-1)(x-2)\Bigg[& \frac{\alpha^4x^{10}-20\alpha^3x^9+(28\alpha^3+148\alpha^2)x^8}{(4-4x+\alpha x^2)^2}+ \\
& \frac{(-8\alpha^3-408\alpha^2-480\alpha)x^7+(388\alpha^2+1952\alpha+576)x^6}{(4-4x+\alpha x^2)^2}+ \\
& \frac{(-145\alpha^2+3100\alpha-3076)x^5+(16\alpha^2+2396\alpha+6792)x^4}{(4-4x+\alpha x^2)^2}+ \\
& \frac{(-896\alpha-7940)x^3+(128\alpha+5184)x^2-1792x+256}{(4-4x+\alpha x^2)^2}\Bigg],
\end{aligned}$$

$$h(x,y) = \frac{x^4(2+(\alpha-2)x)^2}{(4-10x+6x^2-\alpha x^3)^2(4-4x+\alpha x^2)^2}\left[1+\frac{b(4-4x+\alpha x^2)^2}{6a^2xy\big(2+(\alpha-2)x\big)^2(2-x)(1-x)}\right],$$

$$g(x,y) = \frac{(2+(\alpha-2)x)^2}{(4-10x+6x^2-\alpha x^3)^2(4-4x+\alpha x^2)^2}\left[1+\frac{b(4-4x+\alpha x^2)^2}{6a^2xy\big(2+(\alpha-2)x\big)^2(2-x)(1-x)}\right],$$

$$g_\alpha(x)=\frac{(4-4x+\alpha x^2)}{4-10x+6x^2-\alpha x^3},\qquad f_\alpha(x)=\frac{4-4x+\alpha x^2}{2(1-x)(2-x)}.$$

Тогда

(*i*) $Q(x)$ — *убывающая функция в* $[0,r_0]$, $0\le\alpha\le 1$;

(*ii*) $g(x,y)$ *и* $h(x,y)$ *возрастают как функции от* x *в* $[0,r_0]$ *и убывают как функции от* y, $0\le\alpha\le 1$;

(*iii*) $h_0(x)$ *и* $h_0'(x)$ *возрастают в* $[0,r_0)$, $0\le\alpha\le 1$;

(*iv*) $f_\alpha(x)$ *возрастает в* $[0,r_0)$, $0\le\alpha\le 1$;

(*v*) $g_\alpha(x)$ *возрастает в* $[0,r_0,)$ $0\le\alpha\le 1$.

Доказательство простое и предоставляется читателю.

Лемма 4. *Для* $0<a<r_0$ *и* $0\le b\le Q(a)$ *последовательность* $\{c_n\}$ *является убывающей, а* $\{a_n\}$ — *возрастающей. Кроме того,* $c_n<1$, $a_n>1$ *и* $aa_nd_n<1$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Эта лемма может быть доказана по индукции. Из леммы 2 $c_{n+1}\le c_n$, если

$$\frac{c_n^3\big(2+(\alpha-2)c_n\big)^2}{(4-10c_n+6c_n^2-\alpha c_n^3)^2(\alpha c_n^2-4c_n+4)^2}\left[1+\frac{b(4-4c_n+\alpha c_n^2)^3}{6a^2a_n(2-c_n)a_n(1-c_n)(2+(\alpha-2)c_n)^2}\right]\le 1.$$

После упрощения это выражение сводится к

$$\frac{b}{a^2a_n}\le\frac{Q(c_n)}{c_n^2},$$

для $n=0$ это дает

$$\frac{b}{a^2a_0}=\frac{b}{a^2}\le\frac{Q(a)}{a^2}=\frac{Q(c_0)}{c_0^2}\,.$$

Следовательно, $c_1\le c_0$. Для $0\le c_1\le c_0=a<0.525211$ мы получим $\frac{1}{1-a}<2$ и

$$aa_nd_n=aa_n\left[\frac{2-c_n+(\alpha-1)c_n^2}{2(1-c_n)}\right]\frac{c_n}{aa_n}=\frac{c_n\big(2-c_n+(\alpha-1)c_n^2\big)}{2(1-c_n)}\,.$$

Следовательно, мы имеем

$$aa_0d_0=\frac{c_0\big(2-c_0+(\alpha-1)c_0^2\big)}{2(1-c_0)}=\frac{a\big(2-a+(\alpha-1)a^2\big)}{2(1-a)}<1.$$

Поэтому $a_1=\frac{a_0}{1-aa_0d_0}>a_0$, $c_1<\frac{1}{2}$ и $aa_1d_1<1$. Таким образом, $a_2=\frac{a_1}{1-aa_1d_1}>a_1$. Предположим, что эта лемма верна для $n=k$. Это дает

$$c_k\le c_{k-1}\le c_{k-2}\le\cdots\le c_1\le c_0=a<0.5\,.$$

Следовательно, $c_k<1$. Кроме того,

$$aa_kd_k<1\Rightarrow a_{k+1}=\frac{a_k}{1-aa_kd_k}>a_k.$$

Значит,
$$a_{k+1} > a_k > a_{k-1} > \cdots > a_0 = 1.$$
Это означает, что $\{a_n\}$ является возрастающей последовательностью. Поскольку $a_k > 1$ и $Q(x)$ — убывающая функция, мы имеем
$$\frac{b}{a^2 a_k} \le \frac{b}{a^2} \le \frac{Q(a)}{a^2} \le \frac{Q(c_0)}{c_0^2}\,\frac{b}{a^2 a_k} \le \frac{Q(c_k)}{c_k^2}.$$
Это дает $c_{k+1} \le c_k < a < 1$. Следовательно, $\{c_n\}$ — убывающая последовательность. □

Лемма 5. *Пусть предположения леммы 4 верны. Определим* $\gamma = \frac{c_2}{c_1} < 1$. *Тогда* $c_{n+1} \le \gamma^{4^{n+1}} c_0$. *Кроме того, последовательность* $\{c_n\}$ *сходится к* 0 *и* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$.

Доказательство. Из лемм 2, 3 и 4 мы получим
$$c_2 = h(c_1, a_1) < h(c_1, a_0) = h(c_1, 1) < h(c_0, a_0) = c_1.$$
Таким образом, $c_2 < c_1$. Кроме того, на основании нашего предположения $c_2 = \gamma c_1$, поэтому $\gamma < 1$. Предположим, что $c_k \le \gamma c_{k-1}$. Поскольку $g(x, y)$ возрастает как функция от x и убывает как функция от y, мы имеем
$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{c_k^4 (2 + (\alpha-2)c_k)^2}{(4-10c_k+6c_k^2-\alpha c_k^3)^2(\alpha c_k^2-4c_k+4)^2}\left[1 + \frac{b(4-4c_k+\alpha c_k^2)^3}{6a^2 a_k (2-c_k) a_k (1-c_k)\big(2+(\alpha-2)c_k\big)^2}\right] \\ &= c_k^4 g(c_k, a_k) \le \gamma^4 c_{k-1}^4 g(c_{k-1}, a_{k-1}). \end{aligned}$$
Продолжив этот процесс, мы получим
$$c_{n+1} \le \gamma^{4^{n+1}} c_0.$$
Следовательно, $c_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\gamma < 1$. Теперь мы имеем $h_0(x) = h(x, 1)$, а из леммы 3 находим, что $h_0(x)$ возрастает в $[0, r_0)$, $h_0'(x) \ge 0$ в $[0, r_0)$ и $h_0'(0) = 0$. Поскольку $h_0'(x)$ непрерывно в $[0, r_0)$ и $c_n \to 0$, существуют $n_0 \in \mathbb{N}$ и $p \in [0, 1)$ такие, что $h_0'(c_n) \le p < 1$ $\forall\, n \ge n_0$. Используя теорему о среднем и лемму 3, мы получим
$$\begin{aligned} c_{n_0+k+1} &= h(c_{n_0+k}, a_{n_0+k}) \le h(c_{n_0+k}, a_0) = h_0(c_{n_0+k}) = h_0(c_{n_0+k}) - h_0(0) \\ &\le h_0'(c_{n_0+k}) c_{n_0+k} \le p c_{n_0+k}. \end{aligned}$$
С использованием рекурсии это дает $c_{n_0+k} \le p^k c_{n_0}$. Таким образом,
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} c_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n \le \sum_{n=0}^{n_0-1} c_n + c_{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} p^{n-n_0} < \infty. \qquad \square$$

Лемма 6. *Последовательность* $\{a_n\}$ *ограничена сверху. Значит, существует постоянная* $M > 0$ *такая, что* $a_n \le M$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 - a a_n d_n}$ и $g_\alpha(c_n) = \dfrac{(4 - 4c_n + \alpha c_n^2)}{4 - 10c_n + 6c_n^2 - \alpha c_n^3}$ получим
$$a_{n+1} = a_n\big[1 + c_n g_\alpha(c_n)\big],$$

что дает

$$a_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} \big[1 + c_k g_\alpha(c_k)\big].$$

Взяв логарифм от обеих сторон, мы получим

$$\log a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \log\big(1 + c_k g_\alpha(c_k)\big) \le \sum_{k=0}^{n} c_k g_\alpha(c_k) < \infty.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность. □

Лемма 7. *Последовательность $\{d_n\}$ является последовательностью Коши и удовлетворяет условию $d_n \le \gamma^{4^{n+1}} d_0$ для $0 < a < r_0$.*

Доказательство. Из $d_n = f_\alpha(c_n)\dfrac{c_n}{a a_n}$, где $f_\alpha(c_n) = \dfrac{4 - 4c_n + \alpha c_n^2}{2(1-c_n)(2-c_n)}$, поскольку $a_n > 1$, имеем

$$d_n \le \frac{c_n f_\alpha(c_n)}{a} \le \gamma^{4^{n+1}} d_0$$

для $\gamma < 1$. Таким образом, последовательность $\{d_n\}$ сходится к 0 и, следовательно, она является последовательностью Коши. □

Теорема. *Пусть $F : \Omega \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ — нелинейный оператор, дважды дифференцируемый по Фреше на непустом открытом выпуклом подмножестве Ω банахова пространства $\mathbb{X}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{Y}$. Пусть условия (7) выполняются для $0 < a < r_0$, $0 \le b \le Q(a)$ и $0 \le \alpha \le 1$. Если $\overline{\mathcal{B}}(x_{\alpha,0}, r\eta) = \big\{x \in X : \|x - x_{\alpha,0}\| \le r\eta\big\} \subseteq \Omega$, где $r = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$, то, начиная с $x_{\alpha,0}$, последовательность $\{x_{\alpha,n}\}$, полученная путем итерации (6), сходится к решению $x^* \in \overline{\mathcal{B}}(x_{\alpha,0}, r\eta)$, которое является единственным в $\mathcal{B}\big(x_{\alpha,0}, (2/k_1\beta) - r\eta\big) \bigcap \Omega$ с четвертым порядком R. Оценка ошибки метода для вещественной последовательности $\{d_n\}$ дается следующим образом:*

$$\|x^* - x_{\alpha,n+1}\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \eta\,.$$

Доказательство. Пусть $0 < a < r_0$. Теперь, используя лемму 7, легко показать, что $\{d_n\}$ является последовательностью Коши. Покажем, что $b = Q(a) = Q(r_0) = 0$ для $a = r_0$. Это означает, что $c_n = c_0 = a$ для $n \ge 0$. Из

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - a a_n d_n} \qquad \text{и} \qquad d_n = \left[\frac{4 - 4c_n + \alpha c_n^2}{2(1-c_n)(2-c_n)}\right]\frac{c_n}{a a_n}$$

получим

$$a_{n+1} = \frac{2a_n(1-c_n)(2-c_n)}{2(1-c_n)(2-c_n) - c_n(4 - 4c_n + \alpha c_n^2)} = a_n\left[1 + \frac{c_n(4 - 4c_n + \alpha c_n^2)}{4 - 10c_n + 6c_n^2 - \alpha c_n^3}\right].$$

Поскольку $c_n = c_0$, это дает

$$a_{n+1} = a_n\left[1 + \frac{c_0(4 - 4c_0 + \alpha c_0^2)}{4 - 10c_0 + 6c_0^2 - \alpha c_0^3}\right].$$

Возьмем

$$w = 1 + \frac{c_0(4 - 4c_0 + \alpha c_0^2)}{4 - 10c_0 + 6c_0^2 - \alpha c_0^3}.$$

Это можно записать в следующем виде: $a_{n+1} = wa_n = w^{n+1}a_0$. Поскольку $a_0 = 1$, это дает $a_{n+1} = w^{n+1}$ и

$$d_n = \left[\frac{4 - 4c_n + \alpha c_n^2}{2(1 - c_n)(2 - c_n)}\right]\frac{c_n}{aa_n} = \left[\frac{4 - 4c_0 + \alpha c_0^2}{2(1 - c_0)(2 - c_0)}\right]\frac{c_0}{aa_0} = \frac{1}{w^n}\left[\frac{4 - 4c_0 + \alpha c_0^2}{2(1 - c_0)(2 - c_0)}\right].$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$. Таким образом, $\{d_n\}$ является последовательностью Коши. Из условия (IV) следует, что $\{x_{\alpha,n}\}$ также является последовательностью Коши. Значит, существует x^* такое, что $\lim_{n\to\infty} x_{\alpha,n} = x^*$. Теперь из уравнения (11) мы имеем

$$\begin{aligned}
\|F(x_{\alpha,k+1})\| &\le \frac{1-\alpha}{2}\frac{M\eta^2 b_k^2 c_k}{2 - c_k} + \frac{Mb_k^2\eta^2 c_k^2\bigl(2 + (\alpha - 2)c_k\bigr)^2}{8(1 - c_k)^2(2 - c_k)^2} + \frac{d_k^3\eta^3 N}{6} \\
&= \frac{\eta}{\beta}\left[\frac{1-\alpha}{2}\frac{ab_k^2 c_k}{2 - c_k} + \frac{ab_k^2 c_k^2\bigl(2 + (\alpha - 1)c_k\bigr)^2}{8(1 - c_k)^2(2 - c_k)^2} + \frac{d_k^3 b}{6}\right] \\
&= \frac{\eta}{\beta}\left[\frac{(1-\alpha)}{2}\frac{ac_k\bigl(2d_k(2 - c_k)(1 - c_k)\bigr)^2}{(2 - c_k)(\alpha c_k^2 - 4c_k + 4)^2} + \right. \\
&\qquad \left. \frac{\bigl(2d_k(2 - c_k)(1 - c_k)\bigr)^2}{(\alpha c_k^2 - 4c_k + 4)^2}\,\frac{c_k^2\bigl(2 + (\alpha - 1)c_k\bigr)^2}{8(1 - c_k)^2(2 - c_k)^2} + \frac{d_k^2 b}{6}\right].
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и непрерывном F, получим

$$\begin{aligned}
\bigl\|F(x^*)\bigr\| = \lim_{n\to\infty}\frac{\eta d_k^2}{\beta}&\left[\frac{(1-\alpha)}{2}\,\frac{ac_k\bigl(2d_k(2 - c_k)(1 - c_k)\bigr)^2}{(2 - c_k)(\alpha c_k^2 - 4c_k + 4)^2} + \right. \\
&\left. \frac{\bigl(2d_k(2 - c_k)(1 - c_k)\bigr)^2}{(\alpha c_k^2 - 4c_k + 4)^2}\,\frac{ac_k^2\bigl(2 + (\alpha - 1)c_k\bigr)^2}{8(1 - c_k)^2(2 - c_k)^2} + \frac{d_k^2 b}{6}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, x^* — решение уравнения (1). Кроме того,

$$\begin{aligned}
\bigl\|x_{\alpha,n+1} - x_0\bigr\| &\le \bigl\|x_{\alpha,n+1} - x_{\alpha,n}\bigr\| + \bigl\|x_{\alpha,n} - x_{\alpha,n-1}\bigr\| + \dots + \bigl\|x_{\alpha,1} - x_{\alpha,0}\bigr\| \\
&\le \sum_{k=0}^{n} d_k\eta \le r\eta.
\end{aligned}$$

Это дает $x_{\alpha,n} \in \overline{\mathcal{B}}(x_{\alpha,0}, r\eta)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы получим $\bigl\|x^* - x_{\alpha,0}\bigr\| \le r\eta$ и, следовательно, $x^* \in \overline{\mathcal{B}}(x_{\alpha,0}, r\eta)$. Кроме того, для каждого $m \ge n + 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\bigl\|x_{\alpha,m} - x_{\alpha,n+1}\bigr\| &\le \bigl\|x_{\alpha,m} - x_{\alpha,m-1}\bigr\| + \bigl\|x_{\alpha,m-1} - x_{\alpha,m-2}\bigr\| + \dots + \bigl\|x_{\alpha,n+2} - x_{\alpha,n+1}\bigr\| \\
&\le \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k\eta < r\eta.
\end{aligned}$$

При $m \to \infty$ мы получим $\bigl\|x^* - x_{\alpha,n+1}\bigr\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k\eta < r\eta$.

Докажем единственность решения. Если y^* — другое решение уравнения (1), мы имеем

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \int_0^1 F'\big(x^* + t(y^* - x^*)\big)\, dt(y^* - x^*).$$

Ясно, что $y^* = x^*$, если $\int_0^1 F'\big(x^* + t(y^* - x^*)\big)\, dt$ обратимо. Это следует из

$$\begin{aligned}\big\|\Gamma_{\alpha,0}\big\|\bigg\|\int_0^1 \Big[F'\big(x^* + t(y^* - x^*)\big) - F'(x_{\alpha,0})\Big]dt\bigg\| &\le k_1\beta \int_0^1 \big\|x^* + t(y^* - x^*) - x_{\alpha,0}\big\|\, dt \\ &\le k_1\beta \int_0^1 (1-t)\big\|x^* - x_{\alpha,0}\big\| + t\big\|y^* - x_{\alpha,0}\big\|\, dt \\ &\le \frac{k_1\beta}{2}\left(r\eta + \frac{2}{k_1\beta} - r\eta\right) = 1\end{aligned}$$

и теоремы Банаха. Таким образом, $y^* = x^*$. □

4. Численные примеры

Пример 1. Рассмотрим оператор

$$F(x) = x^3 - 2x - 5 = 0, \text{ определенный на } x \in [1, 3]. \tag{15}$$

Для начального значения $x_{\alpha,0} = 2$ мы получим $\beta = 0.1$, $\eta = 0.1$, $M = 18$ и $N = 6$. Это дает $a = M\beta\eta = 0.18 < r_0 = 0.52521138$ и $b = N\beta\eta^2 = 0.006 < Q(a)$ для $0 \le \alpha \le 1$. Следовательно, гипотеза нашей теоремы верна. Рекуррентные соотношения для нашего метода для значений $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ даны в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Вещественные последовательности для $\alpha = 0$

n	a_n	b_n	c_n	d_n	$\sum d_n$
0	1.	1.	0.0156971	1.0989	1.0989
1	1.24658	0.0149483	0.00269069	0.0597127	1.15861
2	1.2635	2.981674e−6	5.367014e−7	0.0000119267	1.15862
3	1.26351	2.408172e−17	4.334711e−18	9.632691e−17	1.15862
4	1.26351	1.268736e−50	2.28372e−51	5.07494e−50	1.15862
5	1.26351	1.855335e−150	3.339604e−151	7.421342e−150	1.15862
6	1.26351	0.	0.	0.	1.15862

Таблица 2. Вещественные последовательности для $\alpha = 1$

n	a_n	b_n	c_n	d_n	$\sum d_n$
0	1.	1.	0.0156971	1.10976	1.10976
1	1.24962	0.00181732	0.000327117	0.00726809	1.11702
2	1.25167	4.81357e−10	8.664426e−11	1.925428e−9	1.11702
3	1.25167	8.93449e−30	1.608209e−30	3.573798e−29	1.11702
4	1.25167	5.713186e−89	1.028373e−89	2.285274e−88	1.11702
5	1.25167	1.49383e−266	2.688907e−267	5.975351e−266	1.11702
6	1.25167	0.	0.	0.	1.11702

Из табл. 1 для $\alpha = 0$ мы имеем $r = \sum d_n = 1.1586249$. Таким образом, решение (15) существует в $\overline{\mathcal{B}}(x_{0,0}, 0.115862) \subseteq \Omega$. Из табл. 2 для $\alpha = 1$ мы имеем $r = \sum d_n = 1.1170240$. Таким образом, решение (15) существует в $\overline{\mathcal{B}}(x_{1,0}, 0.111702) \subseteq \Omega$. Однако при решении уравнения (15) с использованием мажорирующей последовательности [15] для $\alpha \in [0, 1]$ решение существует в шаре $\overline{\mathcal{B}}(x_{\alpha,0}, 0.106991) \subseteq \Omega$. На основании этого результата можно заключить, что наша область существования и единственности решения больше, чем соответствующая область, полученная мажорирующими последовательностями. Кроме того, мы вычислили границы ошибки с использованием нашего подхода и подхода мажорирующих последовательностей [15] (табл. 3).

Таблица 3. Границы ошибки для $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$ из [15]	$\alpha = 1$ из [15]
0	0.0059719	0.000725	0.106991	0.106991
1	0.0001e−3	0.000000	0.00060689	0.000108285
2	0.000000	0.000000	1.92722e−30	1.46211e−13

Пример 2. Пусть $\mathbb{X} = C[0, 1]$ — пространство всех непрерывных функций на интервале $[0, 1]$. Рассмотрим интегральное уравнение $F(x) = 0$, где

$$F(x)(s) = x(s) - s + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 s\cos\big(x(t)\big)\,dt. \tag{16}$$

Взяв $x_0 = x_0(s) = s$ и норму $\|x\| = \max_{s\in[0,1]}|x(s)|$, мы получим

$$F(x_0)(s) \le \frac{1}{2}\sin 1s,$$

$$F'(x)u(s) = u(s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 s\sin\big(x(t)\big)u(t)\,dt,$$

$$F''(x)uv(s) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 s\cos\big(x(t)\big)u(t)v(t)\,dt.$$

Взяв $u(s) = [F'(x)]^{-1}v(s)$, получим

$$v(s) = u(s) - \frac{s}{2}\int\limits_0^1 u(t)\sin\big(x(t)\big)\,dt. \tag{17}$$

Умножив (25) на $\int_0^1 \sin\big(x(s)\big)\,ds$, имеем

$$\int\limits_0^1 v(s)\sin\big(x(s)\big)\,ds = \int\limits_0^1 u(s)\sin\big(x(s)\big)\,ds - \int\limits_0^1 \frac{s}{2}\sin\big(x(s)\big)\left[\int\limits_0^1 u(t)\sin(x(t))\,dt\right]ds.$$

Это дает

$$\int\limits_0^1 u(s)\sin\big(x(s)\big)\,ds = \frac{\int\limits_0^1 v(s)\sin\big(x(s)\big)\,ds}{1 - \int\limits_0^1 \frac{s}{2}\sin\big(x(s)\big)\,ds}. \tag{18}$$

Следовательно,

$$u(s) = \big[F'(x)\big]^{-1} v(s) = v(s) + \frac{\int\limits_0^1 v(s)\sin\big(x(s)\big)\,ds}{1 - \int\limits_0^1 \frac{s}{2}\sin\big(x(s)\big)\,ds}.$$

Из этого мы получим

$$\Gamma_0 v(s) = \big[F'(x_0)\big]^{-1} v(s) = v(s) + \frac{\int\limits_0^1 v(s)\sin\big(x(s)\big)\,ds}{1 - \int\limits_0^1 \dfrac{s}{2}\sin\big(x(s)\big)\,ds}.$$

Это дает

$$\big\|[F'(x_0)]^{-1}\big\| \le \frac{3-\sin 1}{2-\sin 1 + cos 1},$$

$$\big\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\big\| \le \frac{\sin 1}{2-\sin 1+\cos 1} = \eta,$$

$$\big\|F''(x)\big\| \le \frac{1}{2} = M,$$

$$\big\|F''(x) - F''(y)\big\|\, uv(s) \le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \big|\cos x(t) - \cos y(t)\big|\, uv(t)\,dt \le \frac{1}{2}\|x-y\|.$$

Это означает, что $M = N = \frac{1}{2}$, $\beta = 1.2705964$ и $\eta = 0.4953234$. Следовательно, мы имеем $a = M\beta\eta = 0.314678 < r_0 = 0.52521138$ и $b = N\beta\eta^2 = 0.155867 < Q(a)$. Условия теоремы удовлетворены. Рекуррентные соотношения для $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ приведены в табл. 4 и табл. 5. Для $\alpha = 0$, исходя из табл. 4, решение уравнения (16) существует в шаре $\overline{\mathcal{B}}(x_0, 0.852618)$ и является единственным в шаре $\mathcal{B}(x_{\alpha,0}, 4.22977)$. Для $\alpha = 1$ на основании табл. 5 решение (16) существует в шаре $\overline{\mathcal{B}}(x_0, 0.805381)$ и является единственным в шаре $\mathcal{B}(x_0, 4.277)$. Однако путем решения уравнения (16) с использованием мажорирующей последовательности [15] для $\alpha \in [0,1]$ мы находим, что решение существует в шаре $\overline{\mathcal{B}}(x_{\alpha,0}, 0.60957) \subseteq \Omega$ и является единственным в шаре $\mathcal{B}(x_0, 1.70991)$. На основании этого результата можно заключить, что наша область существования и единственности решения больше, чем соответствующая область, полученная мажорирующими последовательностями. Кроме того, мы вычислили границы ошибки с использованием нашего подхода и подхода мажорирующих последовательностей [15] (табл. 6).

Таблица 4. Вещественные последовательности для $\alpha = 0$

n	a_n	b_n	c_n	d_n	$\sum d_n$
0	1.00000	1.00000	0.42441	1.18672	1.18672
1	1.59600	0.12131	0.03817	0.47603	1.66275
2	2.09745	0.01464	0.004608	0.0584513	1.7212
3	2.18162	0.00003	0.0000106	0.000135549	1.72134
4	2.18182	4.346246e−13	1.367668e−13	1.738498e−12	1.72134
5	2.18182	9.170179e−37	2.885653e−37	3.668071e−36	1.72134
6	2.18182	8.613272e−108	2.710407e−108	3.445309e−107	1.72134
7	2.18182	7.14000e−321	2.25000e−321	2.853700e−320	1.72134
8	2.18182	0.00000	0.00000	0.00000	1.72134

Таблица 5. Вещественные последовательности для $\alpha = 1$

n	a_n	b_n	c_n	d_n	$\sum d_n$
0	1.00000	1.000000	0.424415	1.22958	1.22958
1	1.63112	0.097523	0.030688	0.384136	1.61372
2	2.0317	0.003064	0.000964	0.012250	1.62597
3	2.04774	9.78969e−8	3.080602e−8	3.91587e−7	1.62597
4	2.04774	3.19422e−21	1.005153e−21	1.277691e−20	1.62597
5	2.04774	1.109574e−61	3.49158e−62	4.438297e−61	1.62597
6	2.04774	4.650800e−183	1.463504e−183	1.86032e−182	1.62597
7	2.04774	0.	0.	0.	1.62597

Таблица 6. Границы ошибки для $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0$ из [15]	$\alpha = 1$ из [15]
0	0.264810	0.196341	0.60957	0.60957
1	0.029021	0.006067	0.0434749	0.0101513
2	0.000069	0.000000	0.0000506905	1.6959e−7
3	0.000000	0.000000	9.02399e−14	8.12827e−22

5. Выводы

В данной статье обсуждалась полулокальная сходимость некоторого метода продолжения. Этот метод объединяет два итерационных метода третьего порядка, а именно: метод Галлея и выпуклое ускорение метода Ньютона для решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Сходимость устанавливается с использованием рекуррентных соотношений при предположении, что вторая производная Фреше удовлетворяет условию непрерывности Липшица. Кроме того, находятся решение и область существования и единственности. Также получена замкнутая форма границ ошибки в терминах вещественного параметра $\alpha \in [0, 1]$. Два численных примера решены для демонстрации эффективности нашего подхода. При сравнении области существования и единственности и границ ошибки для решения, полученного путем нашего анализа, с областями, полученными в [15], оказалось, что наш анализ дает лучшие результаты. Кроме того, для конкретных значений α наш анализ сводится к анализу метода Галлея ($\alpha = 0$) и выпуклого ускорения метода Ньютона ($\alpha = 1$). Это показывает важность нашей работы.

Литература

1. **Traub J.F.** Iterative Methods for the Solution of Equations. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.
2. **Ostrowski A.M.** Solution of Equations and Systems of Equations. — Academic Press, 1966.
3. **Rall L.B.** Computational Solution of Nonlinear Operator Equations. — New York: Robert E. Krieger, 1969.
4. **Ortega J.M., Rheinboldt W.C.** Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — Academic Press, 1970.
5. **Garcia C.B., Zangwill W.I.** Pathways to Solutions, Fixed Points, and Equilibria. — Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1981.
6. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Functional Analysis. — Oxford: Pergamon Press, 1982.

7. **Allgower E.L., Georg K.** Numerical Continuation Methods: an Introduction. — New York: Springer-Verlag, 1990.
8. **Candela V., Marquina A.** Recurrence relations for rational cubic methods I: the Halley method // Computing. — 1990. — Vol. 44. — P. 169–184.
9. **Candela V., Marquina A.** Recurrence relations for rational cubic methods II: the Chebyshev method // Computing. — 1990. — Vol. 45. — P. 355–367.
10. **Kincaid D., Cheney W.** Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing. — Brooks: Cole Publishing Company, 1991.
11. **Ezquerro J.A., Gutiérrez J.M., and Hernández M.A.** A construction procedure of iterative methods with cubical convergence // Applied Mathematics and Computation. — 1997. — Vol. 85. — P. 181–199.
12. **Hernández M.A., Gutiérrez J. M.** Third-order iterative methods for operators with bounded second derivative // J. of Computational and Applied Mathematics. — 1997. — Vol. 82. — P. 171–183.
13. **Gutiérrez J.M., Hernández M.A.** Recurrence relations for the Super-Halley method // Computers & Mathematics with Applications. — 1998. — Vol. 36. — P. 1–8.
14. **Gutiérrez J.M., Hernández M.A.** An acceleration of Newton's method: Super-Halley method // Applied Mathematics and Computation. — 2001. — Vol. 85. — P. 223–239.
15. **Ezquerro J.A., Hernández M.A.** A new class of third order methods in Banach spaces // Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica. — 2003. — Vol. 31. — P. 181–199.
16. **Prashanth M., Gupta D.K.** A continuation method and its convergence for solving nonlinear equations in Banach spaces // Int. J. of Computational Methods. — 2013. — Vol. 10. — P. 1–23.
17. **Yonghui Ling, Xiubin Xu** On the semilocal convergence behavior for Halley's method // Comput. Optim. App. — 2014. — Vol. 58. — P. 597–618.

Поступила в редакцию 10 марта 2016 г.