

УДК 532.5.013.4:539.4

ВОЛНОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В МЯГКИХ БИОСОСУДАХ

Б. Н. Клочков

Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mail: klochkov@appl.sci-nnov.ru

Представлены дисперсионные характеристики волновых процессов в мягких упругих биососудах с протекающей по ним биожидкостью. Показана возможность существования фиксированных структур течения в сосудах. Рассмотрена возможность применения полученных результатов при исследовании биосистем.

Ключевые слова: упругий сосуд, течение несжимаемой жидкости, характерная скорость, неустойчивость, дисперсионные характеристики, математическое моделирование.

Введение. В работах [1–3] изложены важные результаты исследований различных биомеханических процессов, происходящих в биососудах, в частности волновых и колебательных процессов, статических изменений формы сосудов. Использование параметров этих процессов позволяет диагностировать состояние сосудистой системы [4–9]. При этом существенным является построение адекватной математической модели распределенных движений биожидкости (крови, лимфы и др.) в отдельном сосуде с учетом имеющихся экспериментальных данных [10–17]. В настоящей работе проведен линейный анализ распределенных колебаний несжимаемой мягкой упругой трубки (сосуда) с текущей в ней несжимаемой жидкостью, рассмотрены условия существования волновых эффектов в биососудах.

В экспериментах кровеносные сосуды часто моделируются мягкими упругими трубками, через которые прокачивается жидкость. При превышении некоторого критического значения скорости потока наблюдаются осцилляции трубки, распределенные колебания, а также квазистатический режим [8, 18–22]. Для математического описания самовозбуждающихся вибраций в упругих трубках используется упрощенный интегральный подход с переменными, зависящими только от времени, который, по сути, представляет собой модель с сосредоточенными параметрами [19]. С помощью известных распределенных гидродинамических моделей течения крови в артериях для мягкой трубки, имеющей конечную длину и с обоих концов соединенной с жесткими трубками, получено громоздкое выражение для критической скорости и выполнены некоторые нестрогие оценки неустойчивости [13]. Разработаны также соответствующие математические модели для воздушных сосудов, описывающих процессы дыхания [9].

Для оболочки, взаимодействующей с потоком жидкости, проведен анализ колебательных процессов (см. работу [23] и библиографию к ней). В [23] приведено достаточно сложное алгебраическое дисперсионное уравнение шестого порядка, которое решалось только численно, получены семейства кривых монотонных зависимостей частоты от волнового числа. При этом явная аналитическая формула не была получена. Для описания процес-

сов, происходящих в области неустойчивости, наоборот, была использована упрощенная “балочная” модель [23].

Таким образом, многие особенности биомеханических процессов, происходящих в сосудах, исследованы недостаточно. В частности, представляет интерес вопрос о возможности достижения в реальных кровеносных сосудах (венах, артериях, аорте) критических скоростей колебательных и неколебательных движений, а также характерных частот. При этом модель должна быть достаточно сложной (в частности, учитывать продольное и окружное напряжения) и одновременно достаточно простой для получения аналитических формул, позволяющих определить характер зависимости скоростей от параметров системы. Кроме того, необходимо получить адекватную формулу для скорости распространения пульсовой волны (обобщение формулы Юнга — Моенса — Кортвега).

В данной работе для биососуда с текущей внутри него биожидкостью используется условие несжимаемости материала стенки и самой биожидкости. Это позволяет получить явные аналитические формулы для частот, инкрементов, декрементов, различных критических скоростей и скоростей распространения. Данные формулы могут быть использованы при диагностике состояния сосудистой системы.

Модель и методы исследования. С помощью математической модели сосуда, в которой учитываются упругость сосудистого русла, наличие продольного и окружного натяжений, скорость потока жидкости, а также осесимметричные и неосесимметричные деформации, исследуем волновые и колебательные процессы, происходящие в системе сосуд — жидкость, и определим волновые параметры. Движение стенки сосуда будем описывать уравнениями тонкостенной оболочки [23. С. 14–15; 24. С. 62–63]. Материал стенки считаем несжимаемым. Продольные u и угловые v смещения элемента оболочки полагаем пренебрежимо малыми по сравнению с радиальными: $w = R - R_0$. Это обусловлено особенностями функционирования биососудов в живом организме. С целью экономии энергетических ресурсов биососуд достаточно жестко закреплен в ткани в осевом и азимутальном (по дуге) направлениях. Перемещения стенки сосуда осуществляются практически лишь в радиальном направлении под действием давления, что позволяет, изменяя внутренний просвет биососуда, регулировать кровоснабжение тканей и органов. Уравнение движения элемента стенки, записанное в цилиндрической системе координат, имеет вид

$$\frac{Eh^3}{9} \left(\frac{\partial^4 R}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 R}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 R}{\partial \theta^4} \right) + \frac{4Eh(R - R_0)}{3R^2} - S \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{T}{R^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} = p - p_0 - \rho h \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где t — время; x, θ — продольная и азимутальная координаты; E — модуль упругости материала стенки; S, T — продольное и окружное постоянные натяжения; h — толщина стенки; R — текущий радиус сосуда; R_0 — радиус недеформированного сосуда; p — текущее давление; p_0 — постоянное внутреннее давление; ρ — плотность материала стенки. Поскольку в стенке сосуда могут быть гладкомышечные волокна, параметры E, S, T могут как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от степени возбуждения волокон.

Уравнение для разности давлений $p - p_0$ в (1) следует из гидродинамических уравнений [23. С. 14]. Жидкость считается несжимаемой. Скорость жидкости равна $\mathbf{V} = \nabla\varphi + \mathbf{U}$, где φ — потенциал скоростей; \mathbf{U} — постоянная составляющая скорости. Запишем уравнение Лапласа для потенциала скоростей, граничное условие непроницаемости на внутренней поверхности стенка — жидкость, интеграл Коши — Лагранжа:

$$\Delta\varphi = 0, \quad V_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial t} + U \frac{\partial R}{\partial x}, \quad p - p_0 = -\rho_f \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) \quad (2)$$

(ρ_f — плотность жидкости; r — радиальная координата).

Решая уравнение Лапласа из (2) в виде $\varphi = f(r) \exp [i(\Omega t - kx - n\theta)]$, где Ω — частота; k — волновое число; n — номер азимутальной моды, получаем модифицированное уравнение Бесселя для $f(r)$, ограниченное решение которого представляется в виде модифицированной функции Бесселя первого рода I_n с точностью до постоянного множителя C : $f(r) = CI_n(kr)$. Из условия непроницаемости на стенке следует выражение для давления

$$p - p_0 = -\rho_f R_0 \Phi(\alpha, n) \left(\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right), \quad \Phi(\alpha, n) = \frac{I_n(\alpha)}{\alpha I_n'(\alpha)}, \quad (3)$$

где $\alpha = kR_0$; $I_n'(\alpha)$ — производная от функции Бесселя.

Рассматривается случай достаточно малых отклонений \tilde{R} , \tilde{p} от стационарного состояния $R = R_0$, $p = p_0$ ($\tilde{R} = R - R_0$, $\tilde{p} = p - p_0$, причем R_0 , p_0 не зависят от координат и времени), когда после исключения \tilde{p} нелинейными слагаемыми в уравнении (1) можно пренебречь. Таким образом, решается линейная задача. В результате получаем линейное уравнение относительно переменных \tilde{R} и \tilde{p}

$$\frac{Eh^3}{9} \left(\frac{\partial^4 \tilde{R}}{\partial x^4} + \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial^4 \tilde{R}}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R_0^4} \frac{\partial^4 \tilde{R}}{\partial \theta^4} \right) + \frac{4Eh\tilde{R}}{3R_0^2} - S \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial x^2} - \frac{T}{R_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \theta^2} = \tilde{p} - \rho h \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Линейное уравнение (3) преобразуется в уравнение относительно переменных \tilde{R} и \tilde{p}

$$\tilde{p} = -\rho_f R_0 \Phi \left(\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial x^2} \right). \quad (5)$$

Исключая \tilde{p} из (4) с помощью (5), получаем линейное уравнение относительно \tilde{R}

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3}{9} \left(\frac{\partial^4 \tilde{R}}{\partial x^4} + \frac{2}{R_0^2} \frac{\partial^4 \tilde{R}}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R_0^4} \frac{\partial^4 \tilde{R}}{\partial \theta^4} \right) + \frac{4Eh\tilde{R}}{3R_0^2} - S \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial x^2} - \frac{T}{R_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial \theta^2} = \\ = -\rho_f R_0 \Phi \left(\frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial x^2} \right) - \rho h \frac{\partial^2 \tilde{R}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая $\tilde{R} = R_1 \exp [i(\Omega t - kx - n\theta)]$, где R_1 — амплитуда, и подставляя это выражение в уравнение (6), получаем дисперсионное уравнение для малых несесимметричных отклонений от стационарного состояния $R = R_0$, $p = p_0$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3}{9} \left(k^4 + \frac{2}{R_0^2} k^2 n^2 + \frac{1}{R_0^4} n^4 \right) + \frac{4Eh}{3R_0^2} + Sk^2 + \frac{T}{R_0^2} n^2 = \\ = \rho_f R_0 \Phi (\Omega^2 - 2Uk\Omega + U^2 k^2) + \rho h \Omega^2. \end{aligned}$$

Выполняя дальнейшие преобразования, находим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\rho_f R_0 \Phi}{\rho h} \right) \Omega^2 - 2 \frac{\rho_f R_0 \Phi U k}{\rho h} \Omega + \frac{\rho_f R_0 \Phi U^2 k^2}{\rho h} - \\ - \frac{Eh^2}{9\rho R_0^4} (R_0^4 k^4 + 2R_0^2 k^2 n^2 + n^4) - \frac{4E}{3\rho R_0^2} - \frac{Sk^2}{\rho h} - \frac{T}{\rho h R_0^2} n^2 = 0. \end{aligned}$$

Переходя к безразмерным переменным (безразмерной частоте $\zeta = \Omega R_0 / c$ и безразмерному волновому числу $\alpha = kR_0$), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\rho_f R_0 \Phi}{\rho h} \right) \zeta^2 - 2 \frac{\rho_f R_0 \Phi}{\rho h} \alpha \frac{U}{c} \zeta + \frac{\rho_f R_0 \Phi}{\rho h} \alpha^2 \frac{U^2}{c^2} - \\ - \frac{E}{9\rho c^2} \frac{h^2}{R_0^2} (\alpha^4 + 2\alpha^2 n^2 + n^4) - \frac{4E}{3\rho c^2} - \frac{S\alpha^2}{\rho c^2 h} - \frac{T}{\rho c^2 h} n^2 = 0, \end{aligned}$$

из которого следует дисперсионное уравнение, связывающее безразмерную частоту ζ и безразмерное волновое число α :

$$[1 + \varepsilon(\alpha, n)]\zeta^2 - 2\varepsilon(\alpha, n)\alpha W\zeta + \varepsilon(\alpha, n)\alpha^2 W^2 - \delta(\alpha^2 + n^2)^2 - 1 - \beta\alpha^2 - \gamma n^2 = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$\varepsilon(\alpha, n) = \frac{\sigma}{q} \Phi(\alpha, n), \quad \sigma = \frac{\rho f}{\rho}, \quad \rho \approx \rho f, \quad q = \frac{h}{R_0},$$

$$\delta = \frac{q^2}{12}, \quad W = \frac{U}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{4E}{3\rho}}, \quad \beta = \frac{3S}{4Eh}, \quad \gamma = \frac{3T}{4Eh}.$$

Результаты расчетов. Квадратное уравнение (7) имеет два корня:

$$\zeta(\alpha, n) = \frac{\varepsilon(\alpha, n)\alpha W}{1 + \varepsilon(\alpha, n)} \pm \sqrt{N(\alpha, n)}; \quad (8)$$

$$N(\alpha, n) = -\frac{\varepsilon(\alpha, n)(\alpha W)^2}{[1 + \varepsilon(\alpha, n)]^2} + \frac{\delta(\alpha^2 + n^2)^2 + 1 + \beta\alpha^2 + \gamma n^2}{1 + \varepsilon(\alpha, n)}. \quad (9)$$

Решения (8), (9) описывают колебательные изменения просвета сосуда, моделируемого упругой трубкой с жидкостью (знак “+” соответствует устойчивой ветви решения, а знак “-” — неустойчивой). В соответствии с (8) при возникновении неустойчивости ($N < 0$) частота нарастающих колебаний $\zeta_k = \text{Re} \zeta$ линейно растет с увеличением скорости потока W , что соответствует экспериментальным данным [9]. При определенных условиях возможно существование стационарных структур. В качестве основного параметра выберем скорость потока жидкости U (или W). Существует по крайней мере две характерные скорости U , оказывающие существенное влияние на колебания сосудов.

Получим выражения для критической скорости потока жидкости U_{cr} и частоты колебаний Ω_{cr} в случае возникновения неустойчивости в трубке с жидкостью при $N \leq 0$, $U \geq U_{cr}$ (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца в системе упругая стенка — жидкость). При этом в случае $N = 0$ размерная критическая скорость потока U_{cr} равна

$$U_{cr}(\alpha, n) = c \sqrt{\frac{1 + \delta(n^2 + \alpha^2)^2 + \gamma n^2 + \beta\alpha^2}{\alpha^2 \varepsilon(\alpha, n)}} [1 + \varepsilon(\alpha, n)]. \quad (10)$$

Величина U_{cr} в (10) монотонно растет с увеличением продольного натяжения S и окружного натяжения T , а в случае $S = T = 0$ — с увеличением модуля упругости Юнга E и толщины стенки сосуда h . В пренебрежении продольным и окружным постоянными натяжениями ($\beta \approx 0$, $\gamma \approx 0$) и с учетом того, что значения плотностей протекающей жидкости и материала стенки сосуда приближенно равны ($\sigma \approx 1$), выражение для безразмерной критической скорости $W_{cr}(\alpha, n)$ имеет вид

$$W_{cr}(\alpha, n) = \sqrt{\frac{12 + q^2(n^2 + \alpha^2)^2}{12\alpha^2 \Phi(\alpha, n)}} [q + \Phi(\alpha, n)]. \quad (11)$$

Особенностью этой зависимости является то, что безразмерная критическая скорость $W_{cr}(\alpha, n)$ определяется в основном одним параметром q (относительная толщина стенки сосуда), а размерная скорость $U_{cr}(\alpha, n)$ зависит также от упругости материала стенки E . В частном случае $n = 0$, $\alpha \ll 1$ получаем $W_{cr}(\alpha, 0) \approx 1/\alpha$.

При $U = U_{cr}$ имеем соответственно выражения для размерной и безразмерной частоты колебаний (осцилляций) в виде (рис. 1)

$$\Omega_{cr}(\alpha, n) = \frac{\alpha \varepsilon(\alpha, n) U_{cr}(\alpha, n)}{R_0 [1 + \varepsilon(\alpha, n)]}, \quad \zeta_{cr}(\alpha, n) = \sqrt{\frac{12 + q^2(n^2 + \alpha^2)^2}{12} \frac{\Phi(\alpha, n)}{q + \Phi(\alpha, n)}}.$$

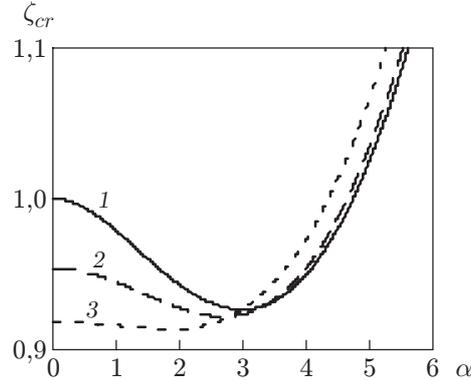


Рис. 1. Зависимость безразмерной критической частоты от волнового числа α при $q = 0, 1$:
 1 — $n = 0$, 2 — $n = 1$, 3 — $n = 2$

Минимальные частоты соответствуют длинам волн $\lambda_{\min}^{cr} \approx (2 \div 3)R_0$. При $n = 0$, $\alpha \ll 1$ получаем $\zeta_{cr}(\alpha, 0) \approx 1$.

Дисперсионные зависимости (8) можно представить в комплексном виде $\zeta(\alpha, n) = \zeta'(\alpha, n) + i\zeta''(\alpha, n)$ (рис. 2). Неустойчивость имеет место в некотором диапазоне волновых чисел $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, причем $N(\alpha_{1,2}, n) = 0$. Длина волны в этой области меняется в диапазоне $\lambda_{1,2} \approx (1,0 \div 1,4)R_0$. При увеличении номера моды n (при фиксированных остальных параметрах) характер зависимостей сохраняется, но область неустойчивости сужается, значения инкремента и декремента уменьшаются.

При $W > W_{cr}$ выражение для инкремента колебаний имеет вид

$$\text{Incr}(\alpha, n) = \text{Im}[\zeta_m(\alpha, n)] = \sqrt{\frac{\varepsilon(\alpha, n)(\alpha W)^2}{[1 + \varepsilon(\alpha, n)]^2} - \frac{\delta(\alpha^2 + n^2)^2 + 1 + \beta\alpha^2 + \gamma n^2}{1 + \varepsilon(\alpha, n)}},$$

следовательно, инкремент $\text{Incr}(\alpha, n)$ монотонно увеличивается с увеличением скорости потока жидкости W .

Существует зависимость безразмерной фазовой скорости распространения малых возмущений $C(\alpha, n) = \text{Re} \zeta(\alpha, n)/\alpha$ от безразмерного волнового числа α и номера моды n :

$$C_{1,2}(\alpha, n) = \frac{1}{\alpha} \text{Re} \left(\frac{\varepsilon(\alpha, n)\alpha W}{1 + \varepsilon(\alpha, n)} \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon(\alpha, n)(\alpha W)^2}{[1 + \varepsilon(\alpha, n)]^2} + \frac{\delta(\alpha^2 + n^2)^2 + 1 + \beta\alpha^2 + \gamma n^2}{1 + \varepsilon(\alpha, n)}} \right). \quad (12)$$

Формула (12) является обобщением частного случая формулы Юнга — Моенса — Кортвега для скорости пульсовой волны. При этом вследствие достаточно низкой частоты сердечного пульса длина реальной пульсовой волны сравнима с размером тела, в котором находится рассматриваемый биососуд.

В длинноволновом приближении ($\alpha \ll 1$) из формулы (12) следует бездисперсионное выражение для размерной скорости распространения пульса ($W = \gamma = \beta = n = 0$) $C_0 = \sqrt{2hE/(3R_0\rho_f)}$. Следует отметить, что это выражение отличается от полученного в [12] выражения $C_{0K} = \sqrt{hE/(2R_0\rho_f)}$ только бóльшим числовым коэффициентом.

Рассмотрим случай, когда скорость распространения равна нулю, т. е. $\zeta(\alpha, n) = 0$. При $C(\alpha, n) = 0$ (инкремент и декремент также равны нулю) реализуется статическая форма поверхности сосуда. В данном случае возможны пространственно-низкочастотная гофрированная поверхность (при $n \geq 1$) и пространственно-высокочастотная гофрирован-

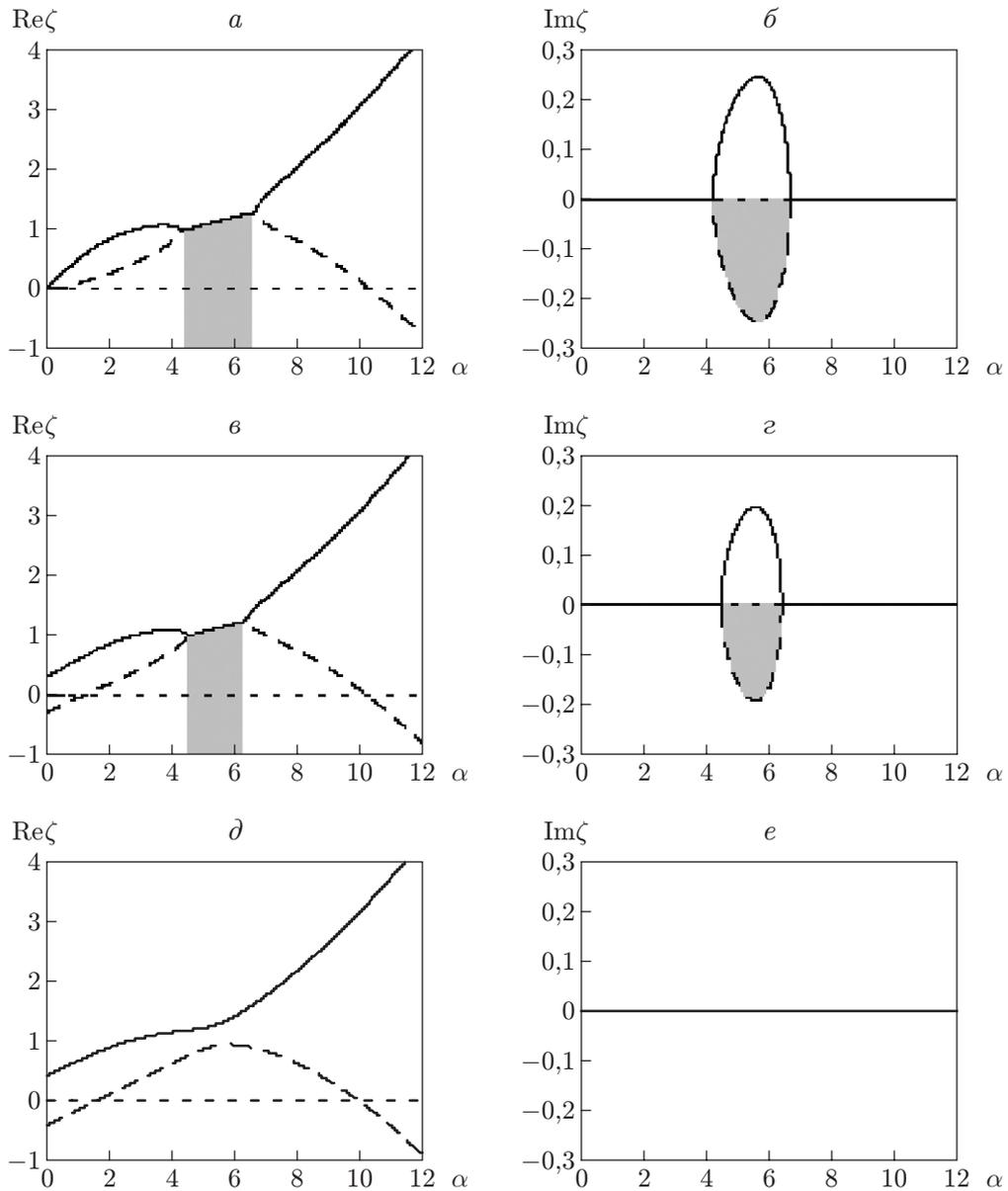


Рис. 2. Зависимости безразмерных действительных (*a*, *в*, *д*) и мнимых (*б*, *г*, *e*) частей комплексных частот малых возмущений от волнового числа при $W = 0,31$, $q = 0,1$, $\beta = \gamma = 0$:

a, *б* — $n = 0$, *в*, *г* — $n = 1$, *д*, *e* — $n = 2$; сплошные линии — устойчивая ветвь решения, штриховые — неустойчивая ветвь решения, пунктирные — нулевая линия; заштрихованные области — области неустойчивости

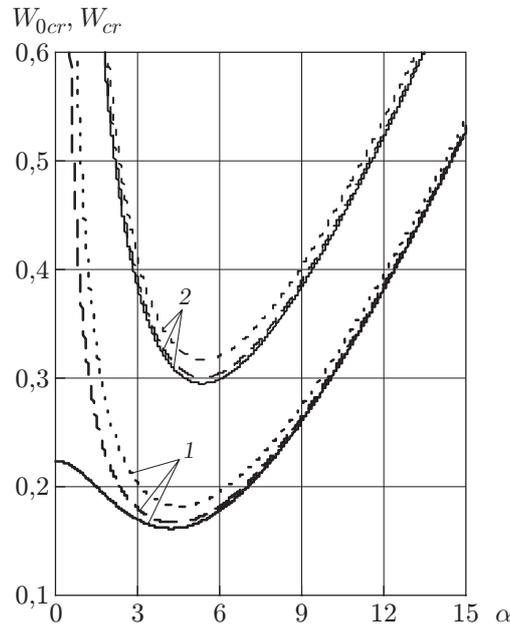


Рис. 3. Зависимости безразмерных критических скоростей кровотока от волнового числа α при $q = 0,1, \gamma = \beta = 0$:
 1 — статические моды W_{0cr} , 2 — неустойчивые моды W_{cr} ; сплошные линии — $n = 0$, штриховые — $n = 1$, пунктирные — $n = 2$

ная поверхность (при $n \geq 0$). При этом имеем соотношение

$$\frac{\varepsilon(\alpha, n)W_{0cr}\alpha}{1 + \varepsilon(\alpha, n)} \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon(\alpha, n)(W_{0cr}\alpha)^2}{[1 + \varepsilon(\alpha, n)]^2} + \frac{1 + \delta(n^2 + \alpha^2)^2 + \gamma n^2 + \beta \alpha^2}{1 + \varepsilon(\alpha, n)}} = 0,$$

из которого можно найти выражение для безразмерной критической скорости структурирования

$$W_{0cr} = \sqrt{q \frac{12 + q^2(n^2 + \alpha^2)^2 + 12\gamma n^2 + 12\beta \alpha^2}{12\alpha^2\Phi(\alpha, n)}}. \tag{13}$$

Скорость W_{0cr} в (13) меньше критической скорости, при которой возникает неустойчивость W_{cr} (см. (11)): $W_{cr} = W_{0cr}\sqrt{1 + \varepsilon(\alpha, n)}$ (рис. 3). Иными словами, в реальности сначала сосуд приобретает извилистую форму, а затем возникают его колебания. В приближении $\alpha \ll 1$ при $\gamma = \beta = n = 0$ получаем выражение $W_{0cr} \approx \sqrt{q/2}$. Стоячая структура сосуда при отсутствии неустойчивости потока показана на рис. 4.

Анализ результатов. В нормальных условиях скорость движения крови в крупных артериях достигает $1,5 \div 2,9$ м/с, а при некоторых патологиях может значительно увеличиваться [12–15]. Кроме того, существуют заболевания, при которых модуль Юнга материала стенки сосуда уменьшается, что приводит к снижению критической скорости U_{cr} . Максимальная скорость крови в крупных венах может составлять 0,5 м/с. Частоты колебаний в области неустойчивости составляют $60 \div 180$ Гц [12, 13]. Измеренная частота колебаний стенок вен приблизительно равна 235 Гц [16]. Достаточно широкий диапазон частот колебаний в системе сосуд — жидкость ($25 \div 500$ Гц) приведен в [12]. Анализ значений модуля упругости E показывает, что их разброс составляет несколько порядков. В работе [17] приведены значения $E \simeq 4,2 \cdot 10^3 \div 2,7 \cdot 10^4$ Н/м², в [12] — $E \simeq 10^3 \div 5 \cdot 10^4$ Н/м². В [25] указаны

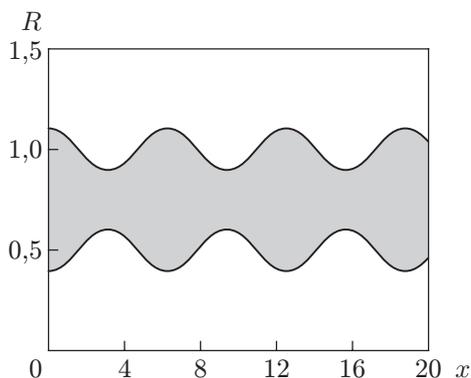


Рис. 4. Неподвижная структура сосуда при $U_{0cr} \leq U < U_{cr}$

значения E , на порядок меньшие: $E \simeq 102,6 \div 400,0 \text{ Н/м}^2$. Вместе с тем получены значения модуля упругости E , существенно превышающие приведенные выше. Характерные значения радиуса рассматриваемых сосудов находятся в диапазоне $0,1 \cdot 10^{-2} \div 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Оценки значений критических скоростей можно выполнить с помощью полученных в настоящей работе формул и выражений при $n = 0$, $\beta = \gamma = 0$, $\rho \approx \rho_f \approx 1000 \text{ кг/м}^3$. Так, согласно формуле (10) при $q = 0,02$, $E = 4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$, $R_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ минимальная критическая скорость неустойчивости (при $\alpha = 13$) равна $U_{cr} = 0,28 \text{ м/с}$, соответствующая частота равна $f_{cr} = \Omega_{cr}/(2\pi) = 153 \text{ Гц}$, минимальная критическая скорость структурирования (при $\alpha = 10$) $U_{0cr} = 0,12 \text{ м/с}$.

Следует отметить, что сжатие сосуда (уменьшение площади его поперечного сечения A) тем или иным способом, например при проведении медицинских диагностических измерений, может привести к увеличению скорости крови U до значений, превышающих критическое, поскольку расход через сосуд равен $g = UA = \text{const}$. Вследствие развития неустойчивости могут возникать различные акустические явления, регистрируемые микрофоном, акселерометром или другими приемниками колебаний. При учете вязкостей протекающей биожидкости и биоткани материала стенки сосуда область неустойчивости существенно увеличивается.

Для крупных артериальных сосудов измеренная скорость распространения пульсовой волны составляет $4 \div 14 \text{ м/с}$, для крупных венозных сосудов — $1 \div 2 \text{ м/с}$ [14, 15]. Скорость пульсаций в области устойчивости, определенная по формуле (12) при $q = 0,04$, $E = 5 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$, $U = 0,1 \text{ м/с}$, $\alpha = 0,1$, составляет $C_1 = 1,25 \text{ м/с}$.

Выполненные оценки свидетельствуют о достоверности полученных в данной работе результатов для венозных и артериальных сосудов в норме и при ряде патологий. Биологические ткани характеризуются механохимическими параметрами, которые могут значительно меняться, вследствие чего реализуются различные динамические и статические режимы.

Заключение. В работе представлен линейный волновой подход к изучению динамической биомеханики сосудов. Рассмотренная распределенная модель крупного упругого сосуда, учитывающая как осесимметричные, так и неосесимметричные деформации, наличие продольного натяжения стенки сосуда, позволяет получить дисперсионные характеристики и выражение для частоты колебаний. Получено выражение для критической скорости потока, при превышении которой угловая мода сосуда становится неустойчивой. Оценки, проведенные для крупных кровеносных сосудов, свидетельствуют о возможности возникновения в них как статического и квазистатического режимов (малые частоты), так и режима колебаний (относительно высокие частоты). Для вен критическая скорость

может быть достигнута в обычных условиях, а для артерий — при функциональных или диагностических сдавливаниях, а также при патологии, характеризующейся, в частности, значительно большей, чем в обычных условиях, скоростью течения крови либо меньшей упругостью сосуда.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фомин В. М., Ветлущий В. Н., Ганимедов В. Л. и др.** Исследование течения воздуха в носовой полости человека // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 2. С. 107–115.
2. **Медведев А. Е., Самсонов В. И., Фомин В. М.** О рациональной структуре кровеносных сосудов // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 3. С. 24–30.
3. **Пилицук В. Н., Проценко И. Г.** Об одной модели растяжимой трубки, допускающей локализованные волны // ПМТФ. 1987. № 3. С. 126–131.
4. **Бороноев В. В., Трубачев Э. А.** Оценка пульсовой волны как физического процесса // Биомед. радиоэлектроника. 2008. № 5. С. 15–18.
5. **Кизилова Н. Н.** Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 129–139.
6. **Парашин В. Б.** Биомеханика кровообращения / В. Б. Парашин, Г. П. Иткин. М.: Моск. гос. техн. ун-т, 2005.
7. **Регирер С. А.** Биомеханика: известные и малоизвестные постановки задач // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 8–19.
8. **Cancelli C., Pedley T. J.** A separated-flow model for collapsible-tube oscillations // J. Fluid Mech. 1985. V. 157. P. 375–404.
9. **Gavriely N., Shee T. R., Cugell D. W., Grotberg J. B.** Flutter in flow-limited collapsible tubes: a mechanism for generation of wheezes // J. Appl. Phys. 1989. V. 66, N 5. P. 2251–2261.
10. **Клочков Б. Н., Кузнецова Е. А.** Нелинейные режимы изменения формы упругой трубки с потоком жидкости в ней // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 4. С. 46–55.
11. **Клочков Б. Н., Елисеева Ю. Ю., Шилягин П. А.** Распространение низкочастотных волн в биологических тканях и сосудах // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 4/5. С. 506–515.
12. **Каро К.** Механика кровообращения / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. М.: Мир, 1981.
13. **Педли Т.** Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983.
14. **Физиология кровообращения: Физиология сосудистой системы (Рук. по физиологии).** Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1984.
15. **Физиология человека: В 4 т. /** Под ред. Р. Шмидта, Г. Тевса. М.: Мир, 1986. Т. 3.
16. **Чичагов П. К.** Экспериментальное исследование механических колебаний в венозном русле // Механика композит. материалов. 1979. № 4. С. 733–735.
17. **Ohhashi T., Azuma T., Sakaguchi M.** Active and passive mechanical characteristics of bovine mesenteric lymphatics // Amer. J. Physiol. 1980. V. 239. P. H88–H95.
18. **Conrad W. A.** Pressure-flow relationships in collapsible tubes // IEEE Trans. Biomed. Engng. 1969. V. 16, N 4. P. 284–295.
19. **Катц А. И., Чен Ю., Морено А. Г.** Течение в мягкой трубке (экспериментальное исследование и математическая модель) // Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. С. 111–130.
20. **Ur A., Gordon M.** Origin of Korotkoff sounds // Amer. J. Physiol. 1970. V. 218, N 2. P. 524–529.
21. **Griffiths D. J.** Oscillations in the outflow from a collapsible tube // Med. Biol. Engng Comput. 1977. V. 15, N 4. P. 357–362.

22. **Brower R. W., Scholten C.** Experimental evidence on the mechanism for the instability of flow in collapsible vessels // Med. Biol. Engng. 1975. V. 13, N 6. P. 839–845.
23. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979.
24. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
25. **Березовский В. А.** Биофизические характеристики тканей человека: Справ. / В. А. Березовский, Н. Н. Колотилов. Киев: Наук. думка, 1990.

*Поступила в редакцию 5/III 2012 г.,
в окончательном варианте — 14/V 2014 г.*
