УДК 519.65

Константа Лебега локальных кубических сплайнов с равноотстоящими узлами*

В.Т. Шевалдин[1,2], О.Я. Шевалдина[2]

[1]Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990

[2]Уральский Федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002
E-mails: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru (Шевалдин В.Т.), o.ja.shevaldina@urfu.ru (Шевалдина О.Я.)

Шевалдин В.Т., Шевалдина О.Я. Константа Лебега локальных кубических сплайнов с равноотстоящими узлами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 4. — С. 445–451.

Доказано, что равномерная константа Лебега (норма линейного оператора из C в C) локальных кубических сплайнов с равноотстоящими узлами, точных на кубических многочленах, равна 11/9.

Ключевые слова: *константа Лебега, локальные кубические сплайны, равноотстоящие узлы.*

DOI: 10.15372/SJNM20150408

Shevaldin V.T., Shevaldina O.Ya. The Lebesgue constant of local cubic splines with equally-spaced knots // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 4. — P. 445–451.

It is proved that the uniform Lebesgue constant (the norm of a linear operator from C to C) of local cubic splines with equally-spaced knots, which preserve cubic polynomials, is equal to 11/9.

Keywords: *Lebesgue constants, local cubic splines, equally-spaced knots.*

Введение

Локальные кубические сплайны с равноотстоящими узлами (см., например, [1, гл. 9]), точные на кубических многочленах, — простой и распространенный аппарат аппроксимации функций одной переменной. Помимо [1] аппроксимативные свойства локальных полиномиальных сплайнов малых степеней изучались в монографии Н.П. Корнейчука [2, гл. 7] (там же имеются ссылки и на других авторов). В настоящей работе вычисляется точно константа Лебега (норма линейного оператора из C в C) классических локальных кубических сплайнов с равноотстоящими узлами, сохраняющих пространство алгебраических многочленов третьей степени. Аналогичные вопросы для параболических и некоторых других сплайнов рассматривались в [3–7].

1. Построение функции Лебега

Введем необходимые обозначения и определения. Для функций $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ рассмотрим конечную разность четвертого порядка с шагом $h>0$:

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы УрО РАН (проект № 15-16-1-4), а также при финансовой поддержке в рамках Постановления Правительства РФ № 211 (контракт № 02.A03.21.0006).

$$\Delta_h^4 f(x) = f(x+4h) - 4f(x+3h) + 6f(x+2h) - 4f(x+h) + f(x).$$

Кубический базисный сплайн (B-сплайн) с равноотстоящими узлами определяется формулой (см., например, [1, гл. 1]):

$$B_4(x) = \frac{1}{6h^3}\Delta_h^4((x-2h)_+^3) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Здесь, как обычно, $t_+ = \max\{0; t\}$. Узлами сплайна являются точки: $-2h,\ -h,\ 0,\ h$ и $2h$, его носитель $\operatorname{supp} B_4 = [-2h; 2h]$ и $B_4 \in C^2(\mathbb{R})$. Ясно, что

$$B_4(x) = \frac{1}{6h^3}\begin{cases} (x+2h)^3, & x \in [-2h; -h], \\ -3x^3 - 6x^2h + 4h^3, & x \in [-h; 0], \\ 3x^3 - 6x^2h + 4h^3, & x \in [0; h], \\ (2h-x)^3, & x \in [h; 2h]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для любой аппроксимируемой функции $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$ и рассмотрим функционал

$$I_j = \gamma_1 y_{j-1} + \gamma_2 y_j + \gamma_3 y_{j+1} \qquad (j \in \mathbb{Z}), \tag{1.2}$$

где γ_1, γ_2 и γ_3 — некоторые действительные числа.

Локальный кубический сплайн определяется формулой

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B_4(x - jh) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Известно (см. [1, гл. 9]), что если положить

$$\gamma_1 = \gamma_3 = -\frac{1}{6}, \qquad \gamma_2 = \frac{4}{3},$$

то такой сплайн сохраняет пространство P_3 кубических многочленов, т. е. для любого многочлена $p_3 \in P_3$ имеет место равенство

$$S(p_3, x) = p_3(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Сплайн вида (1.3) при указанном выборе γ_j $(j = \overline{1,3})$ не является интерполяционным в том смысле, что

$$S(jh) \neq y_j = f(jh) \qquad (j \in \mathbb{Z}),$$

но обладает хорошими аппроксимативными свойствами (см. [1, 2]) на соболевских классах функций W_∞^r $(r = \overline{1,4})$. Интересно отметить, что если вместо трехшаблонного функционала I_j (см. (1.2)) рассмотреть четырехшаблонный функционал

$$\widetilde{I}_j = \frac{1}{48}\left((-7)f\left(\left(j-\frac{3}{2}\right)h\right) + 31f\left(\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right) + 31f\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)h\right) + (-7)f\left(\left(j+\frac{3}{2}\right)h\right)\right)$$

в точках сетки узлов, сдвинутой на полшага по сравнению с основной, то локальные кубические сплайны вида

$$\widetilde{S}(x) = \widetilde{S}(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{I}_j B_4(x - jh) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

также сохраняет пространство P_3 кубических многочленов (см. [3, гл. 1]).

Функция

$$L(x) = \sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R})} \le 1} |S(f, x)| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

называется функцией Лебега метода аппроксимации локальными кубическими сплайнами вида (1.3), а величина $L = \max_{x \in \mathbb{R}} L(x)$ — константой Лебега линейного оператора $S:\ f \to S(f, \cdot)$ как оператора, действующего из пространства $C = C(\mathbb{R})$ функций, непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$, в это же пространство. Чем меньше константа L, тем применяемый метод аппроксимации непрерывных функций более устойчив к изменению аппроксимационных условий: $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$. В данном пункте функция $L(x)$ при $\gamma_1 = \gamma_3 = -1/6,\ \gamma_2 = 4/3$ будет найдена явно в любой точке $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что функция $L(x)$ периодична с периодом h.

Пусть $x \in [lh; (l+1)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$. Из определения (1.1) B-сплайна и (1.3) имеем

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B_4(x - jh) = \sum_{j=l-1}^{l+2} I_j B_4(x - jh) \qquad (x \in [lh; (l+1)h]).$$

Положим $t = x - lh \in [0; h]$ $(l \in \mathbb{Z})$. Отсюда с учетом определения функционала

$$I_j = \left(-\frac{1}{6}\right) y_{j-1} + \frac{4}{3} y_j + \left(-\frac{1}{6}\right) y_{j+1} \qquad (j \in \mathbb{Z})$$

и формулы (1.1) имеем

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j=l-2}^{l+3} y_j g_{j-l+3}(t) \qquad (x = t + lh), \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= -\frac{1}{36h^3}(h-t)^3, \\
g_2(t) &= \frac{1}{6h^3}\left[\frac{4}{3}(h-t)^3 - \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2h + 4h^3)\right], \\
g_3(t) &= \frac{1}{6h^3}\Bigg[\left(-\frac{1}{6}\right)(h-t)^3 + \frac{4}{3}(3t^3 - 6t^2h + 4h^3) + \\
&\qquad\qquad \left(-\frac{1}{6}\right)(-3(t-h)^3 - 6(t-h)^2h + 4h^3)\Bigg], \\
g_4(t) &= \frac{1}{6h^3}\Bigg[\left(-\frac{1}{6}\right)(3t^3 - 6t^2h + 4h^3) + \\
&\qquad\qquad \frac{4}{3}(-3(t-h)^3 - 6(t-h)^2h + 4h^3) + \left(-\frac{1}{6}\right)t^3\Bigg], \\
g_5(t) &= \frac{1}{6h^3}\left[\left(-\frac{1}{6}\right)(-3(t-h)^3 - 6(t-h)^2h + 4h^3) + \frac{4}{3}t^3\right], \\
g_6(t) &= -\frac{1}{36h^3}t^3.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Из симметрии B-сплайна и (1.5) вытекают равенства $g_{7-i}(t) = g_i(h-t)$ $(i = \overline{1,6})$. Поскольку $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$ и мы рассматриваем только функции $f \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию $\|f\|_C \le 1$, то из (1.4) и (1.5) в силу определения функции Лебега получаем следующее представление:

$$L(t) = \sum_{j=1}^{6} |g_j(t)| \qquad (t \in [0;h]). \tag{1.6}$$

Исследуем нули функций $g_j(t)$ $(j = \overline{1,6})$ на отрезке $[0;h]$. Из (1.5) следует, что

$$\begin{aligned} &g_1(t) < 0, \qquad g_6(t) < 0 \qquad (t \in [0;h]),\\ &g_2(t) = \frac{1}{36h^3}(-11t^3 + 30t^2h - 24th^2 + 4h^3),\\ &g_3(t) = \frac{1}{36h^3}(28t^3 - 54t^2h + 30h^3). \end{aligned}$$

Элементарное исследование с помощью первой производной показывает, что функция $g_3(t)$ убывает на отрезке $[0;h]$, при этом $g_3(h) = \dfrac{1}{9} > 0$, и поэтому $g_3(t) > 0$ при $t \in [0;h]$. Далее имеем, что $g_2'(t) = 0$ при $t_1 = \dfrac{10-2\sqrt{3}}{11}h$ и $t_2 = \dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}h$. Поэтому $t = t_1$ — единственная точка минимума функции $g_2(t)$ на $[0;h]$ и при этом $g_2(0) > 0$, $g_2(h) < 0$. Следовательно, функция $g_2(t)$ имеет единственный нуль $t = \bar{t}$ на отрезке $[0;h]$, причем $0 < \bar{t} < t_1$, поскольку она убывает на интервале $(0;t_1)$. Отсюда с учетом предыдущего анализа следует, что функция $g_5(t)$ имеет единственный нуль $t = \bar{\bar{t}} = h - \bar{t}$ на отрезке $[0;h]$, причем справедливо неравенство

$$h - t_1 = \frac{1+2\sqrt{3}}{11}h < \bar{\bar{t}} < h.$$

Неравенство $t_1 = \dfrac{10-2\sqrt{3}}{11}h > \dfrac{h}{2}$ пока не позволяет сравнить нули $\bar{t}$ и $\bar{\bar{t}}$. Для этой цели заметим, что

$$g_2\left(\frac{h}{2}\right) = g_5\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{5}{96} < 0.$$

Поэтому из предыдущего исследования получим неравенство

$$0 < \bar{t} < \frac{h}{2} < \bar{\bar{t}} < h. \tag{1.7}$$

Теорема 1. *Имеет место следующее равенство*:

$$L(t) = \frac{1}{36h^3} \begin{cases} -22t^3 + 12t^2h + 40h^3, & 0 \le t \le \bar{t},\\ -48t^2h + 48th^2 + 32h^3, & \bar{t} \le t \le \bar{\bar{t}},\\ 22t^3 - 54t^2h + 42th^2 + 30h^3, & \bar{\bar{t}} \le t \le h, \end{cases} \tag{1.8}$$

где $\bar{t}$ и $\bar{\bar{t}}$ соответственно единственные нули функций $g_2(t)$ и $g_5(t)$ на отрезке $[0;h]$.

Доказательство. С учетом проведенного исследования нулей функций $g_j(t)$ $(j = \overline{1,6})$ из (1.6) получаем, что

$$L(t)=\begin{cases} -g_1(t)+g_2(t)+g_3(t)+g_4(t)-g_5(t)-g_6(t), & t\in[0;\bar t],\\ -g_1(t)-g_2(t)+g_3(t)+g_4(t)-g_5(t)-g_6(t), & t\in[\bar t;\bar{\bar t}],\\ -g_1(t)-g_2(t)+g_3(t)+g_4(t)+g_5(t)-g_6(t), & t\in[\bar{\bar t};h]. \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований функций $g_j(t)$ $(j=\overline{1,6})$ из последнего равенства получим равенство (1.8). □

2. Константа Лебега

Теорема 2. *Имеет место следующее равенство*:

$$L=\max_{x\in\mathbb{R}}L(x)=\max_{t\in[0;h]}L(t)=\frac{11}{9}.$$

Доказательство. Функция $L(t)$ на отрезке $[0;h]$ представляет собой непрерывный кубический сплайн с внутренними узлами $\bar t$ и $\bar{\bar t}$. Для доказательства теоремы 2 вначале рассмотрим функцию (см. (1.8)):

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{36h^3}(-22t^3+12t^2h+40h^3)$$

на отрезке $[0;h/2]$. Имеем

$$\varphi_1(0)=\frac{10}{9},\qquad \varphi_1'(t)=\frac{1}{36h^3}(-66t^2+24th).$$

Поэтому на отрезке $[0;4h/11]$ эта функция возрастает, а на отрезке $[4h/11;h/2]$ убывает. Кроме того,

$$\max_{t\in[0;h/2]}\varphi_1(t)=\varphi_1\left(\frac{4h}{11}\right)=\frac{1226}{1089}.$$

Аналогично для функции

$$\varphi_3(t)=\varphi_1(h-t)=\frac{1}{36h^3}(22t^3-54t^2h+42th^2+30h^3)$$

получаем, что

$$\max_{t\in[h/2;h]}\varphi_3(t)=\varphi_3\left(\frac{7h}{11}\right)=\frac{1226}{1089}.$$

Для функции

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{36h^3}(32h^3-48t^2h+48th^2)$$

имеем

$$\max_{t\in[0;h]}\varphi_2(t)=\varphi_2\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{11}{9}.$$

Для доказательства теоремы 2 с учетом равенства (1.8) и неравенства (1.7) остается заметить, что $\frac{1226}{1089}<\frac{11}{9}$. □

Замечание. Ф. Ричардс [8] (более полную библиографию по вычислению и оценке констант Лебега для сплайнов см., например, в [3–6, 9]) в 1973 году установил, что для интерполяционных кубических сплайнов с равноотстоящими узлами соответствующая равномерная константа Лебега равна $(1+3\sqrt{3})/4 \approx 1.55$. Значит, в силу теоремы 2, локальные кубические сплайны обладают бóльшей устойчивостью к возмущению аппроксимационных условий, чем интерполяционные.

Литература

1. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
2. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. — М.: Наука, 1984.
3. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. — Екатеринбург: УрО РАН, 2014.
4. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О константах Лебега локальных параболических сплайнов // Тр. Института математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 1. — С. 213–219. — Перевод: Strelkova E.V., Shevaldin V.T. On Lebesgue constants of local parabolic splines // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2015. — Vol. 289, suppl. 1. — P. 192–198.
5. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О равномерных константах Лебега локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами // Тр. Института математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 4. — С. 261–272. — Перевод: Strelkova E.V., Shevaldin V.T. On uniform Lebesgue constants of local exponential splines with equidistant knots // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2017. — Vol. 296, suppl. 1. — P. 206–217.
6. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О равномерных константах Лебега локальных тригонометрических сплайнов третьего порядка // Тр. Института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 245–254.
7. **Волков Ю.С., Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов // Матем. труды. — 2011. — Т. 14, № 2. — С. 73–82. — Перевод: Volkov Yu.S., Strelkova E.V., Shevaldin V.T. Local approximation by splines with displacement of nodes // Siberian Advances in Mathematics. — 2013. — Vol. 23, № 1. — P. 63–75.
8. **Richards F.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. — 1973. — Vol. 7, № 3. — P. 302–317.
9. **Волков Ю.С., Субботин Ю.Н.** 50 лет задаче Шенберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. Института математики и механики УрО РАН. — 2014. — Т. 20, № 1. — С. 52–67. — Перевод: Volkov Yu.S., Subbotin Yu.N. Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2015. — Vol. 288, suppl. 1. — P. 222–237.

Поступила в редакцию 20 марта 2017 г.,
в окончательном варианте 25 мая 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.** Metody splayn-funktsiy. — M.: Nauka, 1980.
2. **Korneychuk N.P.** Splayny v teorii priblizheniya. — M.: Nauka, 1984.
3. **Shevaldin V.T.** Approksimatsiya lokal'nymi splaynami. — Ekaterinburg: UrO RAN, 2014.

4. **Strelkova E.V., Shevaldin V.T.** O konstantah Lebega lokal'nyh parabolicheskih splaynov // Tr. Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2015. — T. 21, № 1. — S. 213–219. — Perevod: Strelkova E.V., Shevaldin V.T. On Lebesgue constants of local parabolic splines // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2015. — Vol. 289, suppl. 1. — P. 192–198.
5. **Strelkova E.V., Shevaldin V.T.** O ravnomernyh konstantah Lebega lokal'nyh eksponentsial'nyh splaynov s ravnootstoyashchimi uzlami // Tr. Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2015. — T. 21, № 4. — S. 261–272. — Perevod: Strelkova E.V., Shevaldin V.T. On uniform Lebesgue constants of local exponential splines with equidistant knots // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2017. — Vol. 296, suppl. 1. — P. 206–217.
6. **Strelkova E.V., Shevaldin V.T.** O ravnomernyh konstantah Lebega lokal'nyh trigonometricheskih splaynov tret'ego poryadka // Tr. Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2016. — T. 22, № 2. — S. 245–254.
7. **Volkov Yu.S., Strelkova E.V., Shevaldin V.T.** Lokal'naya approksimatsiya splaynami so smeshcheniem uzlov // Matem. trudy. — 2011. — T. 14, № 2. — S. 73–82. — Perevod: Volkov Yu.S., Strelkova E.V., Shevaldin V.T. Local approximation by splines with displacement of nodes // Siberian Advances in Mathematics. — 2013. — Vol. 23, № 1. — P. 63–75.
8. **Richards F.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. — 1973. — Vol. 7, № 3. — P. 302–317.
9. **Volkov Yu.S., Subbotin Yu.N.** 50 let zadache Shenberga o skhodimosti splayn-interpolyatsii // Tr. Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. — 2014. — T. 20, № 1. — S. 52–67. — Perevod: Volkov Yu.S., Subbotin Yu.N. Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2015. — Vol. 288, suppl. 1. — P. 222–237.