

## ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ СОВМЕСТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОЕКТИВНЫХ ИСКАЖЕНИЙ И ДИСТОРСИИ

И. С. Грузман, С. В. Никитин

*Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск*

*E-mail: gruzman@ktor.ref.nstu.ru*

Получен алгоритм оценивания параметров проективных искажений и дисторсии на основе метода Голуба – Перейры, применение которого позволило редуцировать пространство оптимизируемых параметров. Проведен анализ поведения целевой функции при приближении оптимизируемых параметров к сингулярным линиям. Приведены результаты экспериментальных исследований, подтверждающие возможность использования алгоритма для решения задачи построения панорамных изображений, полученных с помощью обычных цифровых фотоаппаратов.

**Введение.** Одной из актуальных задач машинного зрения является синтез панорамы по множеству изображений статической сцены, полученных с помощью вращающейся цифровой камеры [1, 2]. Для регистрации изображений часто применяются недорогие цифровые фотоаппараты, основным недостатком которых являются нелинейные геометрические искажения (дисторсия), обусловленные относительно невысоким качеством линз объективов. В ряде практических случаев для описания нелинейных искажений используется приближение, которое состоит в разделении дисторсии объектива на радиальную и тангенциальную составляющие [3, 4]. Координаты точки  $w_d = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix}$  наблюдаемого искаженного изображения связаны с координатами  $w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  соответствующей точки неискаженного изображения следующим приближенным выражением [3]:

$$w = w_d - \Lambda^T K, \quad (1)$$

где  $K^T = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$  – параметры дисторсии, из которых  $k_1, k_2$  – параметры радиальной и  $k_3, k_4$  – параметры тангенциальной дисторсии;

$$\Lambda^T = \begin{bmatrix} \lambda_x^T \\ \lambda_y^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_d r_d^2 & -x_d r_d^4 & -(r_d^2 + 2x_d^2) & -2x_d y_d \\ -y_d r_d^2 & -y_d r_d^4 & -2x_d y_d & -(r_d^2 + 2y_d^2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}, \quad r_d = \sqrt{x_d^2 + y_d^2};$$

$T$  – операция транспонирования. Здесь и далее координаты точек наблюдаемого изображения  $w_d$  вычислены относительно координат точки с нулевой дисторсией.

Из результатов экспериментальных исследований, приведенных в [5–7], следует, что геометрические искажения носят достаточно систематический и стабильный характер, поэтому параметры дисторсии можно определить по тестовым изображениям, полученным в условиях, близких к выполняемой панорамной съемке. В работах [4, 7] показано, что параметры дисторсии определены по плоским тестовым объектам. В частности, в качестве тестового изображения использовалось плоское изображение (рис. 1, *a*), содержащее контрольные точки в виде кругов, центры тяжести которых расположены в узлах прямоугольной решетки. На рис. 1, *b* приведено изображение, полученное с помощью цифрового фотоаппарата. Очевидно, что кроме дисторсии присутствуют искажения, возникающие практически всегда из-за нарушения параллельности между плоскостями тестового изображения и матрицы цифровой камеры. Поскольку все точки тестового изображения расположены на плоскости, то эти искажения являются проективными [8]:

$$w' = \frac{P^T A}{w_t^T C + 1}, \quad (2)$$

где  $w_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$  – координаты точки на тестовом изображении;  $w' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  – координаты соответствующей точки на изображении, полученном идеальной камерой с нулевой дисторсией;  $A^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]$  и  $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$  – параметры проективных искажений;  $P = \begin{bmatrix} p & O^{3 \times 1} \\ O^{3 \times 1} & p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$ ;  $p = \begin{bmatrix} w_t \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

Здесь и далее символ  $O^{i \times j}$  обозначает векторы или матрицы размера  $i \times j$ , все элементы которых равны нулю.

В общем случае  $w \neq w'$  из-за наличия ошибок, возникающих при оценке координат центров тяжести окружностей на наблюдаемом изображении. Для большинства практических случаев можно полагать, что ошибки статисти-

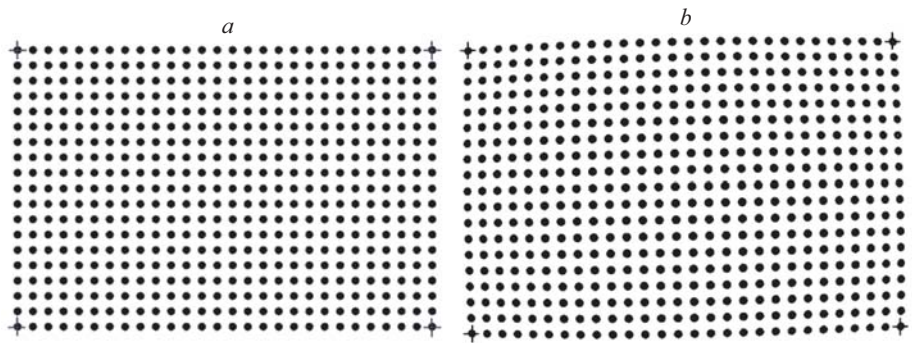


Рис. 1

чески независимы для каждой контрольной точки и имеют нулевое математическое ожидание, поэтому совместная оценка параметров  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{A}$  и  $\tilde{C}$  может быть получена методом наименьших квадратов (МНК):

$$(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{K}) = \arg \min_{A, C, K} Q(A, C, K), \quad (3)$$

где целевая функция

$$\begin{aligned} Q(A, C, K) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (w'_n - w_n)^T (w'_n - w_n) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( w_{d,n} - \Lambda_n^T K - \frac{P_n^T A}{\Upsilon_n(C)} \right)^T \left( w_{d,n} - \Lambda_n^T K - \frac{P_n^T A}{\Upsilon_n(C)} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Upsilon_n(C) = w_{t,n}^T C + 1;$$

$N$  – число контрольных точек, координаты центров тяжести  $w_n$  и  $w'_n$  которых определяются соответственно формулами (1) и (2). Таким образом, для фиксированного набора данных  $w_{t,n}$  и  $w_{d,n}$ ,  $n = \overline{1, N}$ , совместное оценивание параметров проективных искажений и дисторсии МНК является задачей поиска глобального минимума целевой функции (4) на 12-мерном евклидовом пространстве. Очевидно, что непосредственное использование стандартных численных методов поиска минимума  $Q(A, C, K)$  потребует значительных вычислительных ресурсов. Кроме того, функция (4) может иметь много локальных экстремумов, обусловленных ошибками измерения центров тяжести, что значительно затруднит поиск глобального минимума.

В [9] предложена эффективная модификация МНК (метод Голуба – Перейры), идея которой состоит в разбиении всей совокупности оцениваемых параметров на две группы параметров, линейно и нелинейно входящих в модель наблюдаемых данных. При решении оптимизационной задачи «линейные» параметры в явном виде выражаются через «нелинейные». Далее для нелинейных параметров решается задача нелинейной оптимизации. После этого линейные параметры находятся автоматически. Очевидно, что в этом случае приходится оптимизировать более сложную, чем исходная, целевую функцию. Однако метод Голуба – Перейры обладает рядом преимуществ. Он позволяет уменьшить размерность пространства оптимизируемых параметров и число итераций при поиске оптимума. Кроме того, точка минимума целевой функции для редуцированного пространства оптимизируемых параметров обусловлена лучше, чем для исходного пространства [9].

В [10] метод Голуба – Перейры был применен для оценивания параметров проективных искажений. Размерность пространства оптимизируемых параметров была уменьшена с восьми до двух. Авторы доказали, что при разрывной исходной целевой функции восьми параметров  $A$  и  $C$  целевая функция двух нелинейных параметров  $C$  ограничена и непрерывна на компактном множестве и, следовательно, имеет глобальный минимум на этом множестве. Кроме того, вычислительная эффективность полученного в [10] алгорит-

ма выше, чем типичных алгоритмов для минимизации исходной функции восьми оптимизируемых параметров.

Целью предлагаемой работы является построение алгоритма совместного оценивания параметров проективных искажений и дисторсии на основе метода Голуба – Перейры, обеспечивающего сокращение размерности пространства оптимизируемых параметров с двенадцати до двух, а также анализ поведения целевой функции на редуцированном пространстве параметров.

**Алгоритм совместного оценивания параметров проективных искажений и дисторсии.** Для синтеза алгоритма используем методику, предложенную в [10]. Не нарушая общности, будем полагать, что координаты контрольных точек тестового изображения центрированы:  $\sum_{n=1}^N w_{t,n} = O^{2 \times 1}$ . Определим требования к параметрам проективных искажений  $A$  и  $C$ , которые являются элементами матрицы  $\Xi = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , задающей общее линейное преобразование однородных координат [8]

$$[X'_n \ Y'_n \ Z'_n]^T = \Xi \cdot [X_{t,n} \ Y_{t,n} \ Z_{t,n}]^T, \quad n = \overline{1, N},$$

связанных с координатами точек на плоскости следующими соотношениями:

$$[x'_n \ y'_n] = \begin{bmatrix} X'_n & Y'_n \\ Z'_n & Z'_n \end{bmatrix}, \quad [x_{t,n} \ y_{t,n}] = \begin{bmatrix} X_{t,n} & Y_{t,n} \\ Z_{t,n} & Z_{t,n} \end{bmatrix}.$$

Чтобы проективное преобразование было взаимно однозначным, необходимо и достаточно  $\det \Xi \neq 0$  [8]. При фиксированных значениях  $w_t$  уравнения  $\Upsilon_n(C) = 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ , являются уравнениями прямых на плоскости параметров  $C$ , которые далее будем называть сингулярными линиями [10], так как проективное преобразование (2) не определено для значений параметров  $C$ , принадлежащих этим линиям. Кроме того, в практических ситуациях при съемке плоских тестовых изображений компоненты однородных координат  $Z_{t,n}$  и  $Z'_{t,n}$  одной и той же точки имеют одинаковый знак, т. е.

$$\Upsilon_n(C) > 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Область на плоскости параметров  $C$ , определяемую неравенствами (5) и ограниченную сингулярными линиями, будем называть областью допустимых значений  $\Omega$  параметров проективных искажений  $C$ . Очевидно, что область  $\Omega$  является выпуклой, точка  $C_0 = O^{2 \times 1} \in \Omega$ . Расстояние от сингулярной линии до точки  $C_0$  тем меньше, чем больше расстояние от соответствующей контрольной точки, определяющей уравнение прямой  $\Upsilon_n(C) = 0$ , до начала координат на тестовом изображении. Таким образом, для тестового изображения, приведенного на рис. 1, а, область  $\Omega$  (рис. 2) определяется системой неравенств

$$\Upsilon_n(C) > 0, \quad n = \overline{1, 4},$$

где  $w_{t,n}$ ,  $n = \overline{1,4}$ , – координаты четырех точек, отмеченных крестиком на рис. 1, а.

Пусть  $L^T = [A^T \ K^T] \in \mathbb{R}^{1 \times 10}$  и  $C$  – векторы оцениваемых параметров, которые соответственно линейно и нелинейно входят в целевую функцию (4). Учитывая (1) и (2), формулы (3) и (4) запишем как

$$(\tilde{L}, \tilde{C}) = \arg \min_{L, C} Q(L, C), \quad (6)$$

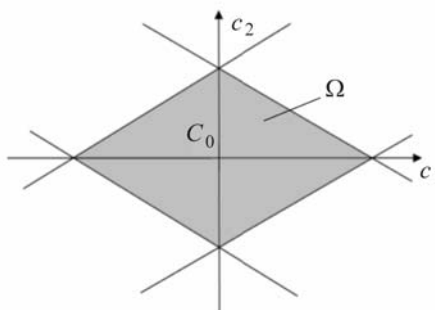


Рис. 2

$$Q(L, C) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( w_{d,n} - \frac{\Theta_n^T(C)L}{\gamma_n(C)} \right)^T \left( w_{d,n} - \frac{\Theta_n^T(C)L}{\gamma_n(C)} \right), \quad (7)$$

где

$$\Theta_n^T(C) = \begin{bmatrix} p_n^T & O^T & \lambda_{x,n}^T \gamma_n(C) \\ O^T & p_n^T & \lambda_{y,n}^T \gamma_n(C) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 10}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Выразим в явном виде параметры  $L$  через параметры  $C$ . Из необходимых условий минимума (7) градиент

$$\nabla_L Q(L, C) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\Theta_n(C) w_{d,n}}{\gamma_n(C)} - \frac{\Theta_n(C) \Theta_n^T(C) L}{\gamma_n^2(C)} \right) = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что (8) можно представить в виде системы линейных уравнений

$$W(C)L = V(C), \quad (9)$$

где

$$W(C) = \left[ \sum_{n=1}^N \frac{\Theta_n(C) \Theta_n^T(C)}{\gamma_n^2(C)} \right] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \frac{p_n p_n^T}{\gamma_n^2(C)} & O^{3 \times 3} & \sum_{n=1}^N \frac{p_n \lambda_{x,n}^T}{\gamma_n(C)} \\ O^{3 \times 3} & \sum_{n=1}^N \frac{p_n p_n^T}{\gamma_n^2(C)} & \sum_{n=1}^N \frac{p_n \lambda_{y,n}^T}{\gamma_n(C)} \\ \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_{x,n} p_n^T}{\gamma_n(C)} & \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_{y,n} p_n^T}{\gamma_n(C)} & \sum_{n=1}^N (\lambda_{x,n} \lambda_{x,n}^T + \lambda_{y,n} \lambda_{y,n}^T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}, \quad (10)$$

$$V(C) = \left[ \sum_{n=1}^N \frac{\Theta_n(C) w_{d,n}}{\gamma_n(C)} \right] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \frac{p_n x_{d,n}}{\gamma_n(C)} \\ \sum_{n=1}^N \frac{p_n y_{d,n}}{\gamma_n(C)} \\ \sum_{n=1}^N (\lambda_{x,n} x_{d,n} + \lambda_{y,n} y_{d,n}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 1}. \quad (11)$$

Система линейных уравнений (9) имеет решение

$$L(C) = W^{-1}(C)V(C), \quad (12)$$

если для всех  $C \in \Omega$  существует матрица, обратная  $W(C)$ . При этом необходимо, чтобы для всех  $C \in \Omega$  существовали матрицы, обратные матрицам, расположенным на ее главной диагонали:

$$\left[ \sum_{n=1}^N \frac{p_n p_n^T}{\gamma_n^2(C)} \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (13)$$

$$\left[ \sum_{n=1}^N (\lambda_{x,n} \lambda_{x,n}^T + \lambda_{y,n} \lambda_{y,n}^T) \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (14)$$

Отметим, что матрица (13) зависит от координат контрольных точек  $w_{t,n}$  тестового изображения, а матрица (14) – от координат контрольных точек  $w_{d,n}$  наблюдаемого изображения. В [10] показано, что для всех  $C \in \Omega$  существует матрица, обратная (13), если не все точки  $w_{t,n}$ ,  $n=1, \bar{N}$ , коллинеарны. К сожалению, сформулировать аналогичные требования к контрольным точкам наблюдаемого изображения не удастся из-за нелинейного характера  $\lambda_{x,n}$  и  $\lambda_{y,n}$  в (14). Однако координаты контрольных точек на наблюдаемом изображении не могут изменяться произвольным образом, так как их положение полностью определяется координатами контрольных точек тестового изображения и значениями параметров дисторсии и проективных преобразований. Поскольку контрольные точки тестового изображения неколлинеарны, далее будем полагать, что  $W^{-1}(C)$  существует для всех  $C \in \Omega$ .

Подставив  $L(C)$  в (7), получим двумерную целевую функцию

$$J(C) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( w_{d,n} - \frac{\Theta_n^T(C)L(C)}{\gamma_n(C)} \right)^T \left( w_{d,n} - \frac{\Theta_n^T(C)L(C)}{\gamma_n(C)} \right). \quad (15)$$

Таким образом, для фиксированного набора данных совместная оценка МНК (6) на 12-мерном евклидовом пространстве распадается на двумерную задачу оптимизации

$$\tilde{C} = \arg \min_C J(C), \quad C \in \Omega, \quad (16)$$

с последующим определением оптимальных значений параметров  $L$  по формуле

$$\tilde{L}(\tilde{C}) = W^{-1}(\tilde{C})V(\tilde{C}). \quad (17)$$

В качестве начальных значений в (16) можно использовать  $C_0$ .

**Анализ поведения двумерной целевой функции  $J(C)$  на сингулярных линиях.** Если целевая функция непрерывна на компактном множестве, то в соответствии с теоремой Вейерштрассе на внутренней или граничной точке этого множества она достигает глобального минимума.

Очевидно, что целевая функция  $J(C)$  непрерывна и ограничена на некомпактном выпуклом множестве  $\Omega$  значений параметров  $C$ , удовлетворяющих условию (5). Обозначим символом  $\bar{\Omega}$  компактное множество значений параметров  $C$ , удовлетворяющих системе линейных неравенств  $\gamma_n(C) \geq 0$ ,  $n = \overline{1, N}$ . Определим поведение двумерной целевой функции  $J(C)$  при приближении  $C$  к сингулярным линиям  $\gamma_n(C) = 0$ .

Сначала рассмотрим поведение  $J(C)$  при приближении  $C$  к одной сингулярной линии, т. е.  $C \rightarrow C^*$ , значения которых удовлетворяют условиям  $\gamma_1(C^*) = 0$  и

$$\gamma_n(C^*) \neq 0, \quad n = \overline{2, N}. \quad (18)$$

В соответствии с методикой, предложенной в работе [10], пусть  $C(\alpha) = C^* + \alpha h \in \Omega$ , где вектор  $h \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  удовлетворяет условию  $h^T w_{1,1} = 1$ . Тогда выражения (10) и (11) представим в виде сумм:

$$W(C^*, \alpha) = \frac{\Theta_1(C^*, \alpha)}{\alpha} \frac{\Theta_1^T(C^*, \alpha)}{\alpha} + W_2(C^*, \alpha), \quad (19)$$

$$V(C^*, \alpha) = \frac{\Theta_1(C^*, \alpha)}{\alpha} w_{d,1} + V_2(C^*, \alpha), \quad (20)$$

где

$$W_2(C^*, \alpha) = \left[ \sum_{n=2}^N \frac{\Theta_n(C^*, \alpha) \Theta_n^T(C^*, \alpha)}{\gamma_n^2(C^*, \alpha)} \right]; \quad V_2(C^*, \alpha) = \left[ \sum_{n=2}^N \frac{\Theta_n(C^*, \alpha) w_{d,n}}{\gamma_n(C^*, \alpha)} \right].$$

В формулах (19) и (20) учтено, что  $\gamma_1(C^*, \alpha) = \alpha$ . Подставив (20) в (12), получим

$$L(C^*, \alpha) = W^{-1}(C^*, \alpha) \frac{\Theta_1(C^*, \alpha)}{\alpha} w_{d,1} + W^{-1}(C^*, \alpha) V_2(C^*, \alpha).$$

Используя лемму обращения матриц, можно показать, что с учетом (19)

$$\begin{aligned} W^{-1}(C^*, \alpha) \frac{\Theta_1(C^*, \alpha)}{\alpha} &= \alpha W_2^{-1}(C^*, \alpha) \Theta_1(C^*, \alpha) \times \\ &\times (I\alpha^2 + \Theta_1^T(C^*, \alpha) W_2^{-1}(C^*, \alpha) \Theta_1(C^*, \alpha))^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$W^{-1}(C^*, \alpha) = W_2^{-1}(C^*, \alpha) - W_2^{-1}(C^*, \alpha)\Theta_1(C^*, \alpha) \times \\ \times (I\alpha^2 + \Theta_1^T(C^*, \alpha)W_2^{-1}(C^*, \alpha)\Theta_1(C^*, \alpha))^{-1}\Theta_1^T(C^*, \alpha)W_2^{-1}(C^*, \alpha), \quad (22)$$

где  $I$  – единичная матрица. При  $\alpha \rightarrow 0$  и при выполнении условия (18) матрицы  $W_2(C^*, 0)$  и  $V_2(C^*, 0)$  являются финитными, поэтому из (21) и (22) следует, что предельные значения  $L(C^*, \alpha)$  и  $\frac{\Theta_1^T(C^*, \alpha)L(C^*, \alpha)}{\gamma_1(C)} = \frac{\Theta_1^T(C^*, \alpha)L(C^*, \alpha)}{\alpha}$  в (15) определяются выражениями

$$L(C^*) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} L(C^*, \alpha) = (W_2^{-1}(C^*, 0) - W_2^{-1}(C^*, 0)\Theta_1(C^*, 0) \times \\ \times (\Theta_1^T(C^*, 0)W_2^{-1}(C^*, 0)\Theta_1(C^*, 0))^{-1}\Theta_1^T(C^*, 0)W_2^{-1}(C^*, 0))V_2(C^*, 0), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Theta_1^T(C^*, \alpha)L(C^*, \alpha)}{\alpha} = w_{d,1},$$

из которых также следует, что на сингулярной линии целевая функция (15) в отличие от целевой функции (7) ограничена и имеет вид

$$J(C^*, 0) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \left( w_{d,n} - \frac{\Theta_n^T(C^*, 0)L(C^*)}{\gamma_n(C^*, 0)} \right)^T \left( w_{d,n} - \frac{\Theta_n^T(C^*, 0)L(C^*)}{\gamma_n(C^*, 0)} \right).$$

Аналогичным образом можно показать, что при стремлении  $C$  к точке пересечения двух и более сингулярных линий целевая функция тоже не имеет разрывов. Таким образом, на компактном множестве  $\overline{\Omega}$  двумерная целевая функция  $J(C)$  имеет глобальный минимум.

**Результаты экспериментальных исследований.** По координатам контрольных точек  $w_{i,n}$  и  $w_{d,n}$ ,  $n = \overline{1, N}$ , на тестовом изображении и изображении, полученном цифровым фотоаппаратом, (см. рис. 1, *a, b*) с помощью предложенного алгоритма (16), (17) были определены параметры дисторсии

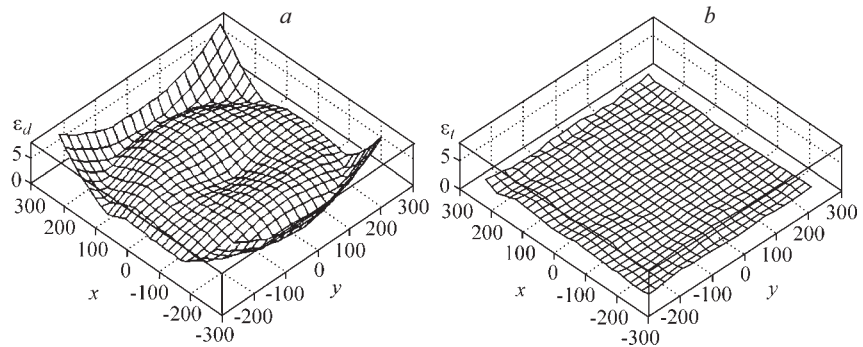


Рис. 3



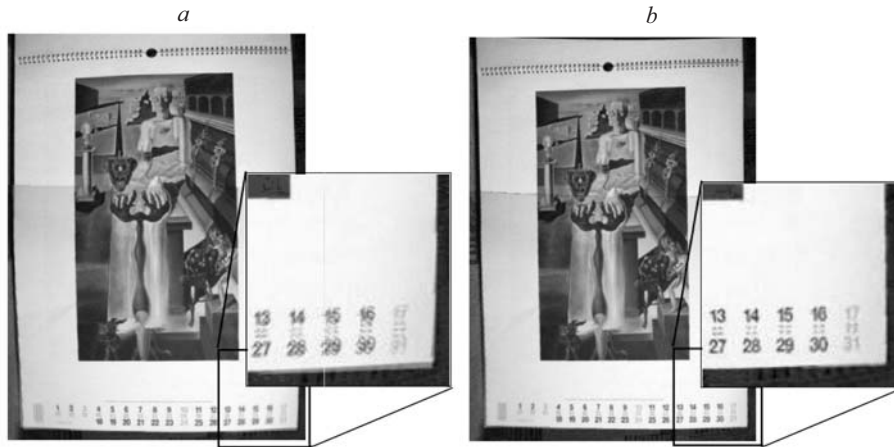


Рис. 4

и проективных искажений. Далее, используя (1) и формулу проективного преобразования, обратного (2), по координатам  $w_{d,n}$ ,  $n = \overline{1, N}$ , были найдены оценки координат контрольных точек на тестовом изображении  $\tilde{w}_{t,n}$ ,  $n = \overline{1, N}$ . Параметры обратного проективного преобразования определялись путем обращения матрицы  $\Xi$ . Полученные оценки  $\tilde{w}_{t,n}$  сравнивались с  $w_{t,n}$  вычислением расстояний  $\varepsilon_{t,n} = \sqrt{(w_{t,n} - \tilde{w}_{t,n})^T (w_{t,n} - \tilde{w}_{t,n})}$ ,  $n = \overline{1, N}$ , между этими точками. На рис. 3, *a*, *b* приведены графики распределения модуля дисторсии  $\varepsilon_{d,n} = \sqrt{(w_{d,n} - \tilde{w}_{d,n})^T (w_{d,n} - \tilde{w}_{d,n})} = \sqrt{\tilde{K}^T \Lambda_n \Lambda_n^T \tilde{K}}$  и ошибок  $\varepsilon_{t,n}$  по полю снимка. Среднеквадратические ошибки для этих двух вариантов  $M[\varepsilon_d^2] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon_{d,n}^2 = 9,60$  и  $M[\varepsilon_t^2] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon_{t,n}^2 = 0,19$  соответственно. Анализ приведенных зависимостей показывает, что точность определения координат по изображению с исправленной дисторсией возрастает примерно в 50 раз.

Результаты совмещения реальных изображений после коррекции только проективных искажений и после совместной коррекции проективных искажений и дисторсии соответственно приведены на рис. 4, *a*, *b*.

**Заключение.** Таким образом, предложенный в данной работе алгоритм совместного оценивания параметров проективных искажений и дисторсии обеспечил сокращение размерности пространства оптимизируемых параметров с двенадцати до двух, при этом число итераций в задаче поиска экстремума уменьшилось в несколько раз. Доказано, что двумерная целевая функция в области допустимых значений непрерывна и ограничена. Экспериментальные исследования показали, что данный способ оценки параметров дисторсии и проективных искажений пригоден для практического применения при решении задачи построения панорамных изображений, полученных с помощью цифровых фотоаппаратов, так как он обладает высокой точностью и для его реализации требуется относительно простое тестовое изображение и минимальный объем измерений по снимкам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Goshtasby A. A.** 2-D and 3-D Image Registration for Medical, Remote Sensing, and Industrial Applications. NJ: Wiley-Interscience, 2005.
2. **Capel D. P.** Image Mosaicing and Super-resolution. London: Springer-Verlag, 2003.
3. **Heikkila J.** Geometric camera calibration using circular control points // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2000. **22**, N 10. P. 1066.
4. **Weng J., Cohen P., Herniou M.** Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1992. **14**, N 10. P. 965.
5. **Гельман Р. Н., Никитин А. Л., Дунц А. Л.** Опыт использования и калибровки цифровых камер при совместной аэрофотосъемке с АФА // Геодезия и картография. 2001. № 6. С. 25.
6. **Гельман Р. Н.** Возможности использования обычных цифровых камер для наземной стереосъемки // Геодезия и картография. 2000. № 4. С. 31.
7. **Гельман Р. Н., Дунц А. Л.** Лабораторная калибровка цифровых камер с большой дисторсией // Геодезия и картография. 2002. № 7. С. 23.
8. **Юнг Дж. В.** Проективная геометрия: Пер. с англ. /Под ред. В. Ф. Кагана. М.: ИЛ, 1949.
9. **Golub G., Pereyra V.** Separable Nonlinear Least Squares: the Variable Projection Method and its Applications // Scientific Computing and Computational Mathematics Program. Computer Science Dept. Stanford University, 2002.
10. **Radke R., Ramadge P., Echigo T., Iisaku S.** Efficiently estimating projective transformations // Proc. of the Intern. Conf. on Image Processing'2000. Vancouver, Canada, 2000. Vol. 1. P. 232.

*Поступила в редакцию 17 сентября 2007 г.*

---