

УДК 532.526.5

ОБТЕКАНИЕ ВЕРШИНЫ КЛИНА ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

С. К. Бетяев

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского, 140181 Жуковский
E-mail: betyaevs@gmail.com

Рассмотрен плоский аналог конических течений — обтекание вершины клина невязкой несжимаемой жидкостью. Обнаружен класс плоских конических течений, когда завихренность переносится по линиям тока потенциальной составляющей скорости. Исследованы задачи о волне, “запертой” в угловой области, и о течении, ускоряющемся вдоль ребра двугранного угла. По аналогии с осесимметричным квазиконическим течением определено плоское квазиконическое течение жидкости — течение внутри и вне области, ограниченной касающимися кривыми, которые описываются степенным законом. Обнаружены условия, когда влияние завихренности и закрутки существенно. Найдено приближенное решение задачи о течении жидкости внутри “нулевого” угла.

Ключевые слова: идеальная жидкость, плоские конические и квазиконические течения, завихренность, нестационарность.

1. Постановка задачи. В случае конического течения размерность задачи понижается на единицу. Как известно, такое понижение приводит к значительному упрощению задачи и позволяет исследовать ее более полно [1, 2].

Существуют следующие типы конических течений.

1. Стационарное коническое течение идеальной жидкости. В этом случае скорость не зависит от радиальной координаты (постоянна на лучах $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ сферической системы координат). Решение является точным и представляется в виде

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{U}(\theta, \varphi), \quad p(r, \theta, \varphi) = P(\theta, \varphi).$$

Для осесимметричного течения $\partial \mathbf{U} / \partial \varphi = \partial P / \partial \varphi = 0$.

2. Нестационарное коническое течение идеальной жидкости. В данном случае точное решение уравнений Эйлера имеет вид

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi, t) = r \mathbf{U}(\theta, \varphi, t), \quad p(r, \theta, \varphi, t) = r^2 P(\theta, \varphi, t).$$

3. Стационарное коническое течение вязкой жидкости, описываемое точным решением уравнений Навье — Стокса:

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \mathbf{U}(\theta, \varphi), \quad p(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} P(\theta, \varphi).$$

Примерами такого течения являются решение Гамеля, вихрь Лонга, струя Ландау [3].

4. Обобщенные конические течения идеальной жидкости [4]. В этом случае скорость представляется в виде

$$\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = r^n \mathbf{U}(\theta, \varphi), \quad p(r, \theta, \varphi) = r^{2n} P(\theta, \varphi),$$

где n — показатель коничности.

5. Квазиконические течения [5, 6]:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = r^n \mathbf{U}\left(\frac{y}{x^m}, \frac{z}{x^m}\right) + o(r^n), \quad p(x, y, z, t) = r^{2n} P\left(\frac{y}{x^m}, \frac{z}{x^m}\right) + o(r^{2n})$$

(m — показатель квазиконичности).

Не являясь точным решением, квазиконическое решение представляет собой координатное разложение в окрестности точки $y = z = x = 0$.

В случае осевого конического течения особенность сосредоточена в вершине конуса, в то время как в случае плоского конического течения — на линии $r = 0$, являющейся вершиной двугранного угла; решение строится в виде координатного ряда по радиальному расстоянию от этой линии r .

Решение задачи об осесимметричном обтекании вершины конуса, так же как и решение задачи об обтекании вершины клина, в рамках модели Навье — Стокса неизвестно [7]. Локальное решение уравнений Эйлера дает “внешний” предел этой пока нерешенной задачи. Если локальное решение уравнения Навье — Стокса является сложной многоярусной конструкцией, то локальное решение уравнения Эйлера представляет собой однослойное координатное разложение.

Локальной теории идеальной жидкости неединственность решений присуща в большей степени, чем глобальной теории. Это обусловлено тем, что в рамках локальной (внутренней) теории не выполнены условия сращивания с внешним разложением. В локальной теории конус или клин простирается до бесконечности, а в реальной задаче обтекаемые тела конечны. Этим, по-видимому, объясняется отсутствие решения локальной задачи: либо решение становится сингулярным при некотором фиксированном значении параметра (парадокс Койтера — Стернберга [8]), либо его не существует в некотором диапазоне значений определяющего параметра.

Целью работы является исследование новых постановок задач теории плоских конических и квазиконических течений: перенос завихренности потенциальным потоком, влияние нестационарности, линейная волна, течение внутри и вне “нулевого” угла.

Уравнения Эйлера для несжимаемой жидкости единичной плотности в цилиндрической системе координат (x, r, θ) с компонентами скорости u_x, u_r, u_θ (ось x направлена вдоль вершины клина (рис. 1)) имеют вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (1.2)$$

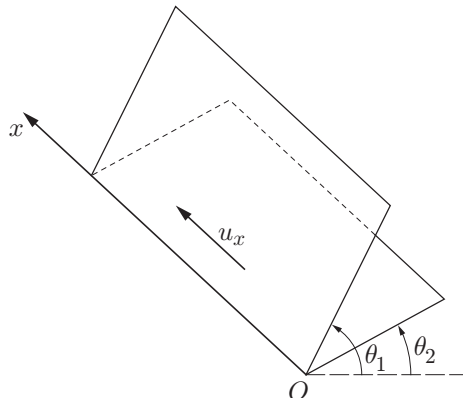


Рис. 1. Система координат

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0. \quad (1.4)$$

На подвижных гранях клина $\theta = \theta_1(t)$ и $\theta = \theta_2(t)$ выполняются условия непротекания

$$u_\theta(r, \theta_{1,2}, t) = r\theta'_{1,2}. \quad (1.5)$$

Уравнение переноса осевой составляющей завихренности $\omega = (1/r)\partial(ru_\theta)/\partial r - (1/r)\partial u_r/\partial \theta$ имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \omega_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \omega_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\omega_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta}. \quad (1.6)$$

В случае плоского течения вводится функция тока ψ и условие (1.5) интегрируется:

$$\psi(r, \theta_{1,2}, t) = -r^2 \theta'_{1,2}/2. \quad (1.7)$$

Здесь $ru_2 = \partial\psi/\partial\theta$; $u_\theta = -\partial\psi/\partial r$.

Если плоское течение стационарно, то завихренность является заданной функцией тока ψ : $\omega = \omega(\psi)$. Уравнение для определения функции ψ имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\omega. \quad (1.8)$$

Условие (1.7) упрощается:

$$\psi(x, r, 0) = \psi(x, r, \theta_0) = 0. \quad (1.9)$$

Здесь $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ — грани клина.

2. Плоское стационарное течение. В соответствии с теоремой разложения (см. [9]) плоское и пространственное течения можно рассматривать как суперпозицию потенциального и вихревого потоков. Разделив движение внутри клина на потенциальную ψ_1 и вихревую ψ_2 составляющие, функцию тока представим в виде их суперпозиции:

$$\psi(r, \theta) = \psi_1(r, \theta) + \psi_2(r, \theta), \quad \Delta\psi_1 = 0, \quad \Delta\psi_2 = -\omega. \quad (2.1)$$

Если составляющие имеют разный порядок малости при $r \rightarrow 0$, то условие непротекания (1.9) ставится для каждой из них отдельно:

$$\psi_1(r, 0) = \psi_1(r, \theta_0) = 0, \quad \psi_2(r, 0) = \psi_2(r, \theta_0) = 0.$$

Если потенциальная составляющая преобладает, то в стационарном течении завихренность переносится, как примесь, по линиям тока безвихревого течения, так как $\omega = \omega(\psi_1 + \psi_2) \approx \omega(\psi_1)$.

Функцию ψ_1 разложим в ряд Фурье, в котором потребуется только первый член:

$$\psi_1 = c_1 r^{\pi/\theta_0} \sin(\pi\theta/\theta_0) + o(r^{\pi/\theta_0}). \quad (2.2)$$

Особенность для скорости в вершине клина отсутствует, если $\theta_0 \leq \pi$. По аналогии с теорией осесимметричных конических течений [4, 5] зависимость ω от ψ представим в степенном виде $\omega(\psi) = a(\psi_1 + \psi_2)^k$, где a — константа. Особенность для завихренности на теле отсутствует, если $k \geq 0$. Из (1.8) находим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} = -a \left(c_1 r^{\pi/\theta_0} \sin \frac{\pi\theta}{\theta_0} + \psi_2 \right)^k. \quad (2.3)$$

Решение представим в степенном виде

$$\psi_2 = r^n f(\theta) + o(r^n). \quad (2.4)$$

При $r \rightarrow 0$ особенность для завихренности отсутствует, если $n \geq 2$. Решение зависит от соотношения параметров n и θ_0 . Если $n\theta_0 > \pi$, то вихрь переносится по линиям тока безвихревого течения. Из (2.3) находим $f'' + n^2 f = b \sin^k(\pi\theta/\theta_0)$, где $b = -ac_1^k$, $n = 2 + k\pi/\theta_0$. Решение имеет вид

$$f = A(\theta) \sin [n(\theta - \chi)],$$

$$A = b \int_0^\theta \sin^{-2n}[n(\theta - \chi)] d\theta \int_0^\theta \sin^{2n}[n(\theta - \chi)] \sin^k\left(\frac{\pi\theta}{\theta_0}\right) d\theta,$$

где χ — константа. Удовлетворить граничному условию при $\theta = \theta_0$ можно двумя способами, приняв условие $A(\theta_0) = 0$ либо $\sin [n(\theta - \chi)] = 0$.

Если $n\theta_0 = \pi$, то суперпозиция (2.1) нецелесообразна и задачи о потенциальном и вихревом течениях следует рассматривать совместно. Тогда этот случай идентичен случаю $n\theta_0 < \pi$ и из (2.3) следует

$$f'' + n^2 f + af^k = 0, \quad kn = n - 2, \quad (2.5)$$

где $\text{Im } f^k = 0$.

После интегрирования (2.5) получаем

$$f' = \pm A(f), \quad (2.6)$$

где $A = C^2 - n^2 f^2 - 2af^{k+1}/(k+1)$.

Без ограничения общности рассмотрим случай, когда $C = f'(0) > 0$. На отрезке $0 \leq \theta \leq \theta_0$ должен быть хотя бы один максимум f_{\max} , так как на концах этого отрезка $f = 0$. Поэтому условием существования решения уравнения (2.6) является равенство $A = 0$ при некотором (хотя бы одном) значении f_0 . Поскольку решение симметрично относительно этого максимума, он достигается при $\theta = \theta_0/2$:

$$f_{\max} = f(\theta_0/2), \quad C^2 = n^2 f_{\max}^2 + 2af_{\max}^{k+1}/(k+1).$$

Тогда $f' = A$, если $0 \leq \theta \leq \theta_0/2$, и $f' = -A$, если $0 \leq \theta \leq \theta_0/2$. Задача имеет решение не при всех значениях параметров a и k . Так, если $k = 1$, $a > -n^2$, то $A \neq 0$, т. е. решения не существует. Если $k \neq 1$, то условие существования решения можно получить при малых значениях θ_0 ($\theta_0 \ll 1$). Тогда $dF/dx \approx (C^2 - 2aF^{k+1}/(k+1))^{1/2}$, где $f = \theta_0^{2/(1-k)} F$; $\theta = \theta_0$. Решение существует, если $2a/(k+1) > 0$.

Частные решения уравнения (2.6) находятся также в двух случаях, когда задача линеаризуется.

1. При $n = 2$ решение является суммой двух гармоник: $f = (a/4)(\text{tg } \theta_0 \sin 2\theta + \cos 2\theta - 1)$.

2. При $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 1$ влияние завихренности в (2.5) существенно, если $a \rightarrow a_1 n^2$, $a_1 = O(1)$. Полагая $\vartheta = n\theta$, $\vartheta_0 = n\theta_0 = \pi(1+a_1)^{-1/2}$, $f = f(\vartheta)$, получим $f'' + (1+a_1)f = 0$. Решение этого уравнения $f = c_1 \sin [\vartheta(1+a_1)^{-1/2}]$ существует, если $a_1 > -1$.

Решение, определенное в интервале $0 \leq \theta \leq \theta_0$, можно симметрично распространить на всю плоскость $0 \leq \theta \leq \pi$, разделив ее на секторы (ячейки), стороны которых образуют линии стекания. Так как показатель степени в решении (2.2) зависит от угла сектора θ_0 , давление на предельных линиях тока в соответствии с законом Бернулли будет одинаковым по разные стороны сектора только в том случае, если углы секторов одинаковы и равны $2\pi/N$ (N — целое число). Линия стекания может являться линией тангенциального разрыва скорости. Схема потенциального течения в случае $N = 3$ показана на рис. 2, а (AO — линия тангенциального разрыва скорости). Возможна схема течения с тремя разрывами: AO , BO , CO .

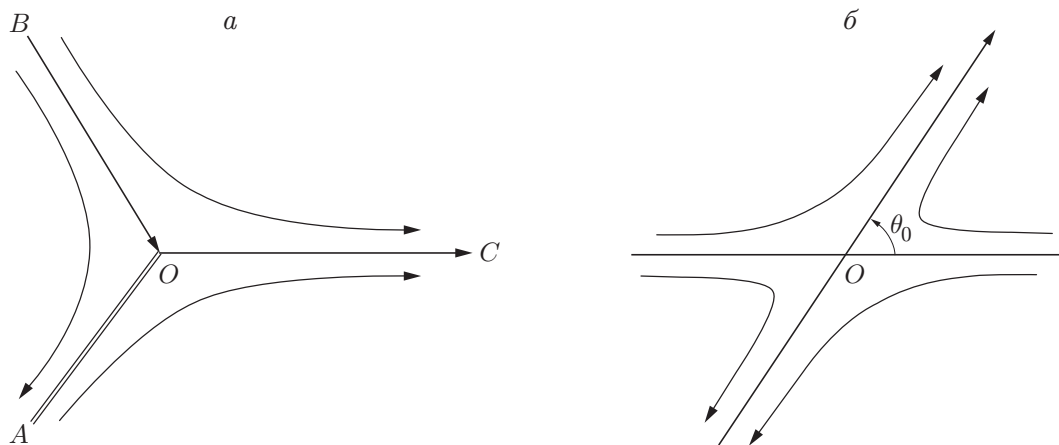


Рис. 2. Распространение решения на всю плоскость:
a — потенциальное течение ($N = 3$); *б* — вихревое течение ($N = 4, \theta_0 = \pi/2$)

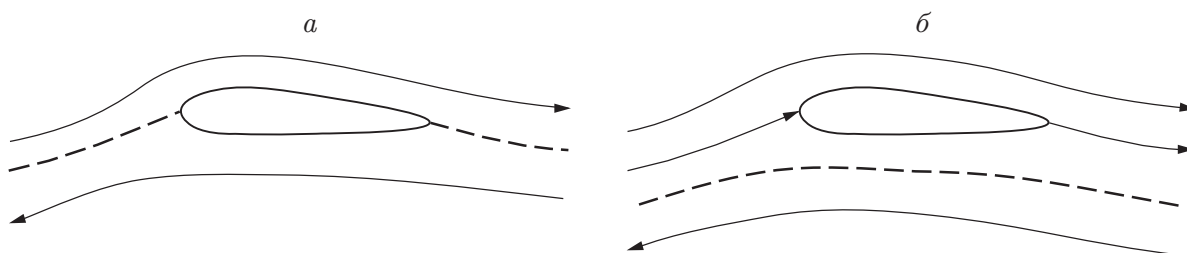


Рис. 3. Схемы разрывных течений при обтекании тела:
a — разрыв, совпадающий с нулевой линией тока, соприкасающейся с телом; *б* — разрыв, совпадающий с нулевой линией тока, не соприкасающейся с телом; штриховая линия — контактный разрыв

Так как в общем случае показатель n не зависит от θ_0 , решение (2.5) допускает сопряжение в разных секторах. На рис. 2,б показана топология линий тока решения (2.6), распространенного на всю плоскость; течение непрерывно. В каждом из четырех секторов указанное стрелками направление потока можно поменять на противоположное, получая набор разрывных решений. Следует отметить, что в стационарном невязком течении всегда можно ввести разрыв скорости на произвольно выбранной неограниченной поверхности, если изменить на противоположное направление течения, расположенного ниже (выше) одной из ее сторон.

На рис. 3 показаны схемы разрывного обтекания тела, образованные из схем непрерывного течения.

3. Плоское нестационарное течение. При известном распределении завихренности уравнение (1.8) справедливо как для стационарных, так и для нестационарных задач. Если выполняется условие непротекания на гранях клина и они неподвижны, то различие рассматриваемых задач состоит в том, что входящие в локальное стационарное решение константы в нестационарном случае становятся произвольными функциями времени, которые должны определяться из решения глобальной задачи. Такое течение, когда нестационарность генерируется вдали от вершины клина, будем называть квазистационарным.

Принципиальное отличие квазистационарной задачи от нестационарной позволяет выявить пример, когда грани клина вращаются вокруг вершины по заданному закону $\theta_{1,2} = \theta_{1,2}(t)$. Поскольку вращение граней не генерирует завихренность, она образуется

вдали от вершины. Вращение граней влияет только на перенос вихрей.

Движение внутри клина включает три компоненты: потенциальную стационарную, потенциальную нестационарную и вихревую. В соответствии с этим функцию тока представим в виде суммы трех слагаемых:

$$\psi(r, \theta, t) = \psi_1(r, \theta) + \psi_2(r, \theta, t) + \psi_3(r, \theta, t).$$

Граничные условия (1.7) принимают вид

$$\psi_1(r, \theta_{1,2}) = 0, \quad \psi_2(r, \theta_{1,2}, t) = 0, \quad \psi_3(r, \theta_{1,2}) = -r^2 \theta'_{1,2} / 2.$$

Функцию ψ_1 можно представить в форме (2.2), а функцию ψ_3 — в замкнутой форме

$$\psi_3 = r^2 [\alpha(t) \sin 2\theta + \beta(t) \cos 2\theta].$$

При этом $\alpha \sin 2(\theta_2 - \theta_1) = \theta'_1 \cos 2\theta_2 - \theta'_2 \cos 2\theta_1$, $\beta \sin 2(\theta_2 - \theta_1) = \theta'_2 \sin 2\theta_1 - \theta'_{12} \sin 2\theta_2$. Решение сингулярно при $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$; π ; $3\pi/2$. Вклад нестационарного решения ψ_3 больше вклада решения ψ_1 при $\theta_0 = \theta_2 - \theta_1 < \pi/2$ и мал при $\theta_0 > \pi/2$.

Применительно к плоскому течению ($\partial/\partial x = 0$) уравнение (1.6) упрощается:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0. \quad (3.1)$$

Функцию ψ_2 будем искать в виде (2.4).

Если скорости потенциального течения малы, т. е. $m > 2$ и $n > 2$, то перенос завихренности незначителен, начальное распределение завихренности не подвергается изменению: $\partial \omega / \partial t = 0$. В соответствии с (1.8) $\omega = O(r^{n-2})$.

Нестационарность существенна при $n = m = 2$. Представив решение в общем виде $\psi = r^2 \Psi(\theta, t)$, $\omega = \omega(\theta, t)$, из (1.8) и (3.1) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - 2\Psi \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + 4\Psi + \omega = 0. \quad (3.2)$$

Система (3.2) допускает решение вида $\Psi = \Phi(\theta)/t$, $\omega = \Omega(\theta)/t$, описывающее усиление вихря при $t \rightarrow -0$ или его затухание при $t \rightarrow \infty$. Уравнения (3.2) становятся обыкновенными:

$$2\Phi\Omega' + \Omega = 0, \quad \Phi'' + 4\Phi + \Omega = 0. \quad (3.3)$$

Вновь рассмотрим случай, когда угол раствора клина мал: $\theta_0 \ll 1$. Пусть $\theta = \theta_0 \vartheta$, $\Phi = \theta_0 f(\vartheta)$, $\Omega = \gamma(\vartheta)/\theta_0$. Тогда система (3.3) еще более упрощается: $2f\gamma' + \gamma = 0$, $f'' + \gamma = 0$. Эта система эквивалентна одному уравнению третьего порядка для функции f : $2ff''' + f'' = 0$. Дважды проинтегрировав это уравнение, получаем

$$f = a_2(1 + a_1 - f')^{(1+a_1)/(1+2a_1)}(a_1 + f')^{a_1/(1+2a_1)},$$

где a_1, a_2 — произвольные положительные константы; f' — неявная двузначная функция f (на гранях клина $f = 1 + a_1$ и $f = -a_1$). Максимальное значение f достигается на линии поворота потока ($u_r = 0$): $f = (1 + a_1)^{(1+a_1)/(1+2a_1)} a_1^{a_1/(1+2a_1)}$.

4. Пространственные течения. Анализ трехмерного течения сложен, поэтому рассмотрим примеры, когда зависимость от третьей координаты x либо известна априори, либо легко находится из простых соображений.

4.1. *Течение, ускоряющееся вдоль двугранного угла.* Точным решением уравнений Эйлера является “запертый” в двугранном угле вихрь Бюргерса — Ротга [10, 11]:

$$u_x = ax, \quad u_r = rv(\theta), \quad u_\theta = rw(\theta), \quad p = r^2 p_0(\theta) - a^2 x^2 / 2$$

(a — константа). Из (1.1)–(1.4) получаем систему уравнений

$$w\omega' - a\omega = 0, \quad w'' + 4w - 2\omega = 0, \quad (4.1)$$

с точностью до обозначений и постоянного множителя совпадающую с рассмотренной системой (3.3). При $\omega = 0$ решение тривиальное: $w = A \sin 2\theta$, $\theta_0 = \pi/2$.

4.2. *Нестационарная аналогия.* Эквивалентность плоского нестационарного движения, описываемого уравнениями (3.3), и трехмерного стационарного движения, описываемого уравнениями (4.1), позволяет предположить существование аналогии в случае постоянной в первом приближении продольной компоненты скорости (так же, как в теории тонкого тела). Пусть

$$\begin{aligned} u_x &= u_\infty + o(1), & p &= r^2 p_0(\theta, x) + o(r^2), \\ u_r &= rv(\theta, x) + o(r), & u_\theta &= rw(\theta, x) + o(r). \end{aligned}$$

Из уравнений неразрывности (1.1) и переноса вихря (1.6) получаем

$$u_\infty \frac{\partial \omega}{\partial x} + w \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + 2v = 0, \quad (4.2)$$

где $\omega = 2w - \partial v / \partial \theta$.

Координата $x = u_\infty t$ играет роль времени. Уравнение для продольной скорости решается независимо от системы (4.2). Завихренность переносится вдоль оси x по некоторой спирали.

Рассмотрим структуру сингулярности в некотором сечении $x = 0$, положив $x\omega = u_\infty a(\theta)$, $xw = u_\infty b(\theta)$, $xv = u_\infty c(\theta)$. Исключив $c(\theta)$ из (4.2), получим

$$b'' + 8b - 4a = 0, \quad ba' - a = 0. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) вновь сводится к системе (3.3) простым растяжением переменных.

4.3. *Линейная волна.* Рассмотрим гармоническую волну, “запертую” в двугранном угле:

$$\begin{aligned} u_x &= r^{n-1} \exp(ikt)u(x, \theta) + o(r^{n-1}), & u_r &= r^n \exp(ikt)v(x, \theta) + o(r^n), \\ u_\theta &= r^n \exp(ikt)w(x, \theta) + o(r^n), & p &= r^{n-1} \exp(ikt)p_0(x, \theta) + o(r^{n-1}). \end{aligned}$$

В (1.1)–(1.4) нелинейные члены оказываются малыми, поэтому имеем

$$iku + \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0, \quad ikv + (n-1)p_0 = 0, \quad ikw + \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + (n+1)v + \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0.$$

Течение безвихревое. Из (3.2) получаем уравнение для определения w :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + (n^2 - 1)w = 0.$$

При $(\pi/\theta_0)^2 < n^2 - 1$ решение $w = w_0(x) \sin(\pi\theta/\theta_0)$ описывает стоячую волну, при $(\pi/\theta_0)^2 > n^2 - 1$ — экспоненциальное течение.

5. Плоский аналог квазиконического течения. Стационарное квазиконическое течение реализуется в областях, ограниченных касающимися кривыми, которые описываются степенным законом $y = x^n \xi_{1,2}$ ($\xi_{1,2}$ — константы). Примеры квазиконических течений представлены на рис. 4. Квазиконическое решение, в отличие от конического, является приближенным, справедливым при $x \rightarrow +0$ в диапазоне $\xi_2 \leq \xi \leq \xi_1$. Рассмотрим случай $n > 1$ (рис. 4, а), аналогично (2.1) положив $\psi(x, \xi) = \psi_1(x, \xi) + \psi_2(x, \xi)$, $\Delta\psi_1 = 0$, $\Delta\psi_2 = -\omega(\psi)$, $\omega = a\psi^k$, $y = \xi x^n$, $k \geq 0$. Такое течение реализуется в области за ламинарным отрывом. Решение задачи получим методом разделения переменных с учетом

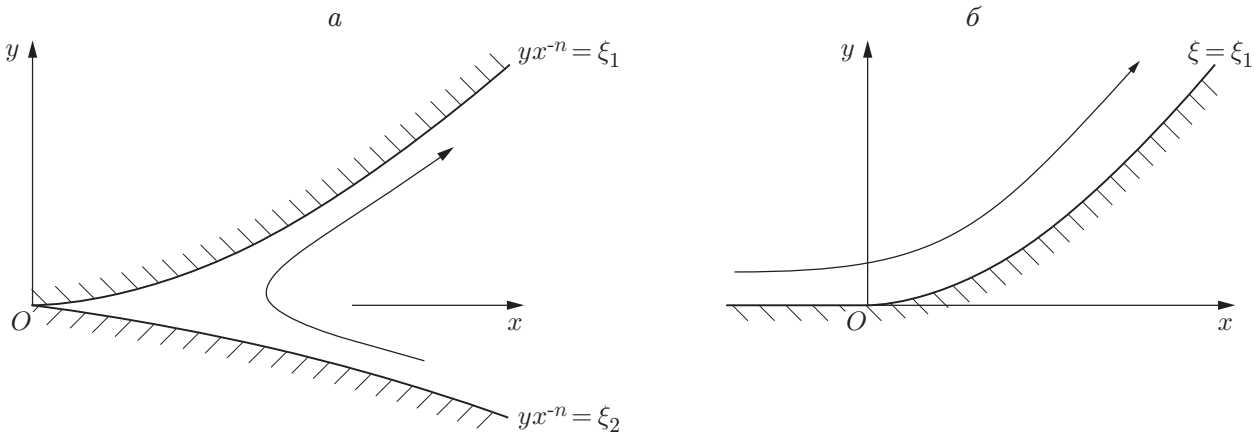


Рис. 4. Схемы квазиконических течений:

a — внутри “нулевого” угла; *b* — вне “нулевого” угла

граничных условий: $\psi_1(x, \xi_{1,2}) = \psi_2(x, \xi_{1,2}) = 0$. Полагая $\psi_1 = A(x)\varphi(\xi)$, из уравнения Лапласа в первом приближении находим $x^{2n}A''\varphi + A\varphi'' = 0$. Решение имеет вид

$$\varphi = \sin[s(\xi - \xi_2)], \quad A = \exp[-sx^{1-n}/(n-1)],$$

где $s = \pi/(\xi_1 - \xi_2) > 0$.

Из метода решения следует, что функция Φ определена с точностью до произвольного множителя — функции $B(x)$, удовлетворяющей условию $|B'| = o(x^{-n})$.

Решение для ψ_2 также будем искать методом разделения переменных:

$$\psi_2 = x^m f(\xi) + o(x^m). \quad (5.1)$$

Так как потенциальное течение экспоненциально мало, имеем $\omega = a(\psi_1 + \psi_2)^k \approx a\psi_2^k$. Уравнение для определения ψ_2 не зависит от ψ_1 :

$$x^{m-2n} f'' \approx -a\psi_2^k = -ax^{km} f^k$$

и сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f'' + af^k = 0, \quad (5.2)$$

где $k = 1 - 2n/m$, $0 < k \leq 1$.

Решение (5.2) получается в неявном виде

$$(\xi_1 - \xi_2) \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{1+k}}} = (\xi - \xi_2) \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{1+k}}},$$

где $z = f/f_{\max}$, $0 \leq z \leq 1$; $f_{\max} = f((\xi_1 + \xi_2)/2)$.

Задача о внешнем обтекании “нулевого” угла (рис. 4, б) описывает течение в предотрывной области. Решение безвихревой задачи тривиально: $\psi_1 = u_\infty x^n (\xi - \xi_1) + o(x^n)$. При $m = n$ решение вихревой задачи нефизично, так как имеется особенность в распределении завихренности ($k = -1$). При $m > n$ решение в форме (5.1) степенное:

$$f = c(\xi - \xi_1) + \frac{b}{(k+1)(k+2)} (\xi - \xi_1)^{k+2}$$

(c — константа; $k = m/n - 2$).

Заключение. Теория конических течений, разработанная для случая сверхзвуковых скоростей, применима также к случаю течения несжимаемой жидкости. Локальное ($r \rightarrow 0$) решение, построенное в виде координатного ряда, может являться точным решением уравнения Эйлера, если этот ряд обрывается: его члены, начиная с некоторого (обычно второго), отбрасываются. Такие примеры известны и в сжимаемых, и в несжимаемых конических течениях.

Теория конических течений описывает особенность в точке $r = 0$. Это обстоятельство существенно при численном расчете глобальной задачи, так как позволяет либо начать его с точки $r = 0$, либо исключить из него окрестность особенности как заранее известную.

Трудность анализа конических и квазиконических течений заключается в том, что задача содержит произвольную функцию — начальное распределение ротора скорости. Оказалось, что не при всех распределениях ротора скорости существует решение локальной задачи. При этом вопрос о связи между отсутствием решений локальной и глобальной задач остается открытым. Локальная теория несправедлива на больших расстояниях, т. е. при $r \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фриш У.** Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, 1998.
2. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. М.: Мир, 1981.
3. **Fernandez-de la Mora J., Fernandes-Feria R., Peres-Saborid M., Barrero A.** Conically similar swirling flows at high Reynolds numbers // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1999. V. 52, pt 1. P. 1–53.
4. **Франкль Ф. И.** Газодинамика тонких тел / Ф. И. Франкль, Е. А. Карпович. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
5. **Бетяев С. К.** Конические и квазиконические течения несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 4. С. 89–100.
6. **Бетяев С. К.** Спиральные вихри / С. К. Бетяев, А. М. Гайфуллин. М.: Центр. аэрогидродинам. ин-т, 2001.
7. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
8. **Баренблатт Г. И.** Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоздат, 1982.
9. **Голдстейн М. Е.** Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981.
10. **Сэффмэн Ф. Дж.** Динамика вихрей. М.: Науч. мир, 2000.
11. **Алексеев С. В.** Введение в теорию концентрированных вихрей / С. В. Алексеев, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002.

*Поступила в редакцию 25/X 2005 г.,
в окончательном варианте — 26/II 2006 г.*