

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. В. Прут

(Москва)

Уравнения, граничные и начальные условия, описывающие модель диффузии магнитного поля в полупространство — несжимаемую, проводящую ток, но не проводящую тепло среду — примем в виде

$$(1) \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\kappa}{4\pi} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2,$$

$$H(x=0, t) \equiv H_0 = at^\alpha, \quad H(x=\infty, t) = 0,$$

$$H(x, t=0) = 0, \quad Q(x, t=0) = Q_0,$$

где $\kappa = c^2/4\pi\sigma\mu$ — коэффициент диффузии; $[Q] = \text{эрг/см}^3$, остальные обозначения общепринятые; система единиц — гауссова.

Некоторые результаты по автомодельному решению уравнений диффузии магнитного поля приведены в [1—4]. Полагаем в отличие от авторов [1—4], что $\kappa = bQ^\beta$, где b и β есть константы, определяемые как некие средние из экспериментальных или теоретических зависимостей электрического сопротивления от температуры или энтальпии. Для большинства металлов эта зависимость линейная ($\beta = 1$) при $T_D \leq T \leq T_{пл}$, где T_D и $T_{пл}$ — температуры Дебая и плавления; в более широком диапазоне $\beta > 1$: в частности, при $T \leq 0,2T_D$ $\beta = 5/4$ ($\kappa \sim T^5$, а $Q \sim T^4$), а при $T > T_{пл}$ $\beta > 1$ из-за скачка сопротивления при $T = T_{пл}$; для некоторых сплавов $\beta \approx 0$, тугоплавких металлов $\beta \leq 1$; для плазмы $\beta = -3/2$. Здесь рассматриваются в основном значения $\beta \geq 0$, а также $\mu = 1$.

Задача (1) определяется тремя константами с независимыми размерностями:

$$[a] = L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1-\alpha}, \quad [b] = L^{2+\beta} M^{-\beta} T^{\beta-1}, \quad [Q_0] = L^{-1} M^1 T^{-2}.$$

Если принять их за основные единицы измерения, то уравнения полностью обезразмериваются (для этого можно во всех уравнениях (1) положить a , b и Q_0 равными единице). Поэтому очевидно, что при заданных α и β достаточно решить полностью обезразмеренные уравнения в частных производных всего лишь один раз.

В сильных магнитных полях, в области, прилегающей к границе полупространства, джоулева энергия $Q \gg Q_0$, вещество «забывает» о своем начальном состоянии и задача (1) определяется только двумя параметрами: a и b . (При $\beta = 0$ задача всегда определяется, по существу, только параметрами a и b , так как энергия может отсчитываться от произвольной начальной энергии.) В этом случае она, как известно (см., например, [5, 6]), автомодельна. Получим решение более общей задачи (1), рассматривая автомодельное решение как предельное при $t \rightarrow \infty$ или $Q_0 \rightarrow 0$.

Сделаем замену переменных и функций таким образом, чтобы такая замена оставалась справедливой и при $Q_0 = 0$. Тогда влияние Q_0 скажется только на времени перехода к автомодельному решению и на границе области его применимости. Можно показать, что автомодельная переменная представима в виде

$$\xi = x/dt^\delta, \quad \text{где } \delta = 1/2 + \alpha\beta, \quad d = (a/\sqrt{8\pi})^\beta b^{1/2}.$$

Функции заменим следующим образом: $H = at^\alpha h(\xi, t)$, $Q = (a^2 t^{2\alpha}/8\pi) \times q(\xi, t) + Q_0$, тогда

$$j = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{c}{4\pi} \frac{a}{d} t^{\alpha-\delta} i, \quad \text{где } i = -\partial h / \partial \xi;$$

h, q, i — «автомодельные» магнитное поле, энергия и плотность тока.

Проведя эти замены в уравнениях (1), получим

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \ln t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \chi \frac{\partial h}{\partial \xi} + \delta \xi \frac{\partial h}{\partial \xi} - \alpha h, \\ \frac{\partial q}{\partial \ln t} &= 2\chi \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 + \delta \xi \frac{\partial q}{\partial \xi} - 2\alpha q, \end{aligned}$$

где $\chi = [q + Q_0/(H_0^2/8\pi)]^\beta$; $h(\xi = 0, t) = 1$; $h(\xi = \infty, t) = 0$.

Если $Q_0/(H_0^2/8\pi) \ll q$, то коэффициенты в правых частях (2) не зависят от времени и уравнения приводятся к автомодельному виду. Однако решение краевой задачи для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой проблему, пожалуй, более нетривиальную, нежели решение нелинейного уравнения в частных производных. Более того, одним из методов решения обыкновенных уравнений является метод установления, по своей идее аналогичный нестационарной задаче. Поэтому удобнее решать неавтомодельные уравнения (2), полагая, что при больших t решение близко к автомодельному.

Для решения уравнений (2) при $\delta > 0$ использовалась разностная схема:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{i_n^{m+1} - i_n^m}{\Delta_m} &= \frac{-1}{\Delta_n} (\chi_{n+1/2}^m i_{n+1/2}^{m+1} - \chi_{n-1/2}^m i_{n-1/2}^{m+1}) - \delta \xi_n i_{n+1/2}^{m+1} - \alpha i_n^{m+1}, \\ \frac{q_{n+1/2}^{m+1} - q_{n+1/2}^m}{\Delta_m} &= 2\chi_{n+1/2}^m (i_{n+1/2}^{m+1})^2 + \delta \xi_{n+1/2} \frac{q_{n+3/2}^{m+1} - q_{n+1/2}^{m+1}}{\Delta_{n+1}} - 2\alpha q_{n+1/2}^{m+1}, \end{aligned}$$

где $i_{n+1/2} = -(h_{n+1} - h_n)/\Delta_{n+1/2}$; Δ_m, Δ_n — шаги и m, n — индексы по $\ln t$ и ξ .

Особенностью уравнений (2) в отличие от (1) является присутствие в них первых производных по ξ , ответственных в этой системе координат за перенос величин h и q . Эти члены аппроксимировались по схеме первого порядка точности. Уравнение диффузии поля в (3) решали методом прогонки, а энергии явно: считая q справа налево. При малых t решались численно уравнения (1), а затем при t , определяемом условием $Q_0/(H_0^2/8\pi) \sim 1$, происходил переход к уравнениям (2).

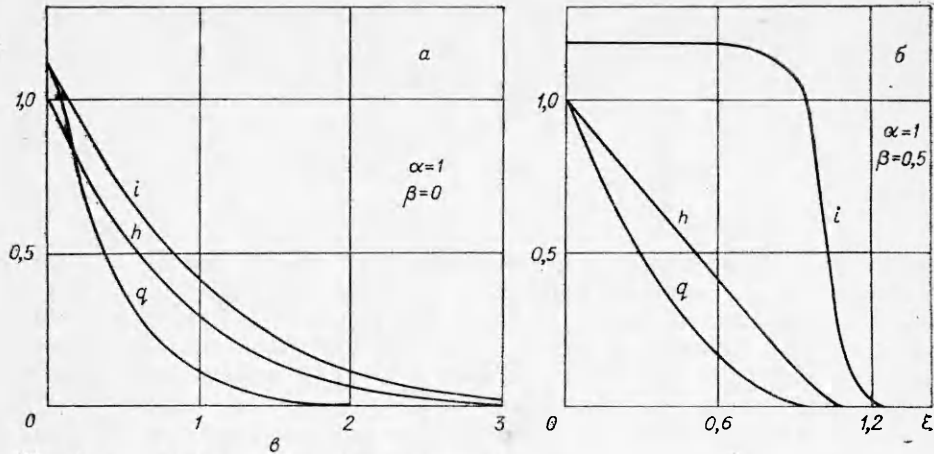
Результаты решения при $\alpha = 1$ и $\beta = 0, 0,5$ и 2 в виде зависимостей h, i и q от ξ при $\tau = 30$ (τ — время в системе единиц $\{a, b, Q_0\}$) представлены на фиг. 1, $a-e$, иллюстрирующей основные закономерности при увеличении нелинейности, т. е. β . При линейной диффузии, как известно (см., например, [1]), магнитное поле в рамках модели, описываемой уравнениями (1), мгновенно распространяется на все пространство, хотя и с очень резким (гауссовым) законом спада поля, так что основное количество энергии поля распространяется по закону $x \sim t^{1/2}$.

При нелинейной диффузии, т. е. при $\beta \neq 0$, и дополнительно при $Q_0 = 0$ появляется четкая граница, разделяющая области с полем и без него. Поле и соответственно энергия поля и внутренняя энергия распространяются от границы полупространства в виде волны уже с бесконечной скоростью ее фронта. Этот процесс очень схож с распространением тепловой волны [5], поэтому естественно назвать эту волну магнитной.

Распределение поля и внутренней энергии на фронте можно получить, если искать решение (1) в виде $H = H(s), Q = Q(s)$, где $s = x - v_\Phi$ а $v_\Phi = \text{const}$. Уравнения (1) примут форму

$$(4) \quad -v_\Phi \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} b Q^\beta \frac{\partial H}{\partial s}, \quad -v_\Phi \frac{\partial Q}{\partial s} = b Q^\beta \left(\frac{\partial H}{\partial s} \right)^2.$$

Решение (4) ищем в виде $H \sim s^\lambda$ с неопределенным коэффициентом λ , подставляя которое в (4), получим $\lambda = 1/2\beta$ и соответственно $H \sim (x_\Phi - x)^{1/2\beta}$, $Q \sim (x_\Phi - x)^{1/\beta}$. Плотность тока на фронте $j \sim (x_\Phi - x)^{1/2\beta-1}$, так что при $\beta < 1/2$ $j_\Phi = 0$, при $\beta > 1/2$ $j_\Phi = \infty$ и при $\beta = 1/2$ $j_\Phi = \text{const} \neq 0$.



Фиг. 1

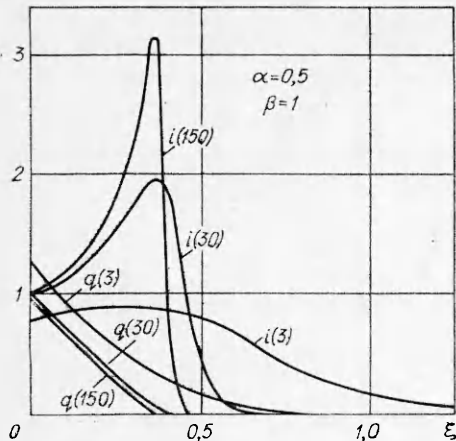
$\neq 0$; градиент внутренней энергии $\partial Q/\partial x \sim (x_\Phi - x)^{1/\beta-1}$, откуда на фронте $\partial Q/\partial x = 0$ при $\beta < 1$ и т. п. Численные результаты на фиг. 1 качественно соответствуют этим простым оценкам.

Скорость фронта, вообще говоря, не постоянна, а определяется из автомодельной пере-

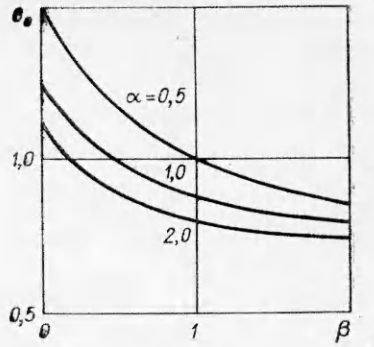
менной $v_\Phi = dx_\Phi/dt = \xi_\Phi d\delta t^{\delta-1}$, так что при $\delta > 0$ волна распространяется в глубь проводника, при $\delta = 0$ волна стоит, а при $\delta < 0$ волна бежит к границе полупространства (это возможно лишь при $\beta < 0$). Причем скорость постоянна только при $\delta = 1$, при $\delta < 1$ скорость уменьшается от бесконечности до нуля, а при $\delta > 1$ — увеличивается. Заметим, что при линейной диффузии с $\delta = 1/2$ скорость фронта, как известно, уменьшается, а при нелинейной диффузии с $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и $\delta = 3/2$ скорость увеличивается. Координата фронта ξ_Φ в автомодельных переменных находится из решения уравнений (3) и соответственно $x_\Phi = \xi_\Phi dt^\delta$. При $H_0/\sqrt{8\pi Q_0} \geq 1$ нелинейность увеличивает область пространства, занятого сильным полем. Плотность тока — физическая, а не автомодельная — определяется зависимостью от времени как $j \sim t^{-[1/2+\alpha(\beta-1)]}$, так что она может уменьшаться и увеличиваться (при $\alpha(1-\beta) > 1/2$).

Конечность скорости фронта при $\beta \neq 0$ и $Q_0 = 0$ обусловлена тем, что коэффициент диффузии — коэффициент при старшей производной $\kappa = 0$ и дифференциальное параболическое уравнение вырождается. При $\beta \neq 0$ и $Q_0 \neq 0$ $\kappa \neq 0$ и скорость фронта становится бесконечной, но в сильных полях при $Q \gg Q_0$ основную роль в процессах переноса поля энергии играют «автомодельные» процессы, описанные выше. Влияние $Q_0 \neq 0$ сводится к расплыванию фронта и его мгновенному распространению. Основная доля энергии переносится со скоростью, определяемой автомодельной переменной (куда не входит Q_0), а малая доля находится между автомодельным фронтом и бесконечностью.

Характерное время перехода t_a к автомодельному решению определяется из $q \sim Q_0/(H_0^2/8\pi)$, так что при $q \sim 1$ $t_a \sim (8\pi Q_0/a^2)^{1/2\alpha}$ или $\tau \sim (8\pi)^{1/2\alpha}$. Зависимости $q(\xi)$ и $i(\xi)$ на фиг. 2 иллюстрируют процесс «автомоделирования», где в скобках указаны соответствующие моменты времени τ . Характерная величина размытия фронта определяется из (1), если решение искать в виде $H = H(x - v_\Phi t)$, тогда $H \sim \exp(-(x - x_\Phi)/\Delta)$, где $\Delta = \kappa_0/v_\Phi$.



Ф и г. 2



Ф и г. 3

коэффициент θ , определяемый из $Q(x, t) = \theta H^2(x, t)/8\pi$, тогда в области автомодельности $\theta = q(\xi)/h^2(\xi)$. Для некоторых α зависимости $\theta_0 \equiv \theta(\xi=0) = q$ от β показаны на фиг. 3 (при $\tau = 5/0,03^{1/2\alpha}$). С увеличением β независимо от α θ_0 медленно спадает, причем при $\alpha \sim 1$ $\theta_0 \sim 1$. Последний результат естествен, поскольку в задаче отсутствует малый параметр и есть одна переменная с размерностью энергии. При $\alpha \rightarrow 0$ $\theta_0 \rightarrow \infty$ аналогично тому, что наблюдалось при линейной диффузии [1] и нелинейной с $\beta \approx 1$ и $\alpha = 0$ [2], т. е. увеличение крутизны нарастания поля приводит к увеличению j и соответственно θ .

Процесс потери проводимости происходит при $\rho \sim \rho_c$ (ρ_c — критическая плотность), где характерной величиной энергии является энергия связи Q_c . Из условия $\theta \sim 1$ следует существование некоей характерной величины максимального магнитного поля $H_c = (8\pi Q_c)^{1/2}$. Для некоторых элементов Q_c и H_c приведены в таблице. Это поле может быть значительно превышено по нескольким причинам. Во-первых, из-за инерции разлета проводника. При этом должно соблюдаться условие $t_i < t$, где инерционное время $t_i \sim x/c$, x — величина фронта или толщина проводника, c — скорость звука. Если $x = x_\phi$, $c \sim T^{1/2} \sim t^\alpha$, то это условие приводит к $t^{\alpha\beta-1/2-\alpha} < \text{const}$, характерной для проводника.

Во-вторых, магнитное давление $p_H = H^2/8\pi$ может превысить термодинамическое давление p вещества. Примем, что $p = p_x + p_T$, где p_x — упругое (потенциальное), а $p_T = \gamma Q_T$ — тепловое давление, Q_x — потенциальная, а $Q_T = Q - Q_x$ — тепловая энергия. При $p_x \approx 0$ или $p_T \gg \gg p_x$ $p = \gamma(\theta p_H - Q_x)$ и при $\theta p_H \gg Q_c$ и $\gamma\theta < 1$ магнитное давление препятствует разлету проводника, проводимость которого должна быть еще велика. Если вещество расширилось настолько, что стало плотной плазмой и β изменило знак, то качественно представляется естественным, что при $T \rightarrow \infty$ величина скин-слоя и полная диссипируемая энергия стремятся к нулю. Снижение θ и изменение соотношений на фронте волны возможно, в частности, из-за теплопроводности и излучения.

С другой стороны, в реальных условиях максимальная величина поля может быть ограничена по техническим причинам или из-за не рассматриваемых здесь гидродинамических эффектов, неустойчивостей.

| | Ag | Al | Cu | Fe | Ta | W |
|------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $Q_c, 10^{11}$ эрг/см ³ | 2,7 | 3,2 | 4,7 | 5,4 | 7,1 | 8,8 |
| H_c , МЭ | 2,6 | 2,8 | 3,5 | 3,7 | 4,2 | 4,7 |

Ограничение «толщины» R полупространства по отношению к фронту x_f волны приведет к увеличению θ . Это утверждение следует из того, что при этом увеличивается средняя плотность тока $j \sim H/R$ и соответственно $Q \sim \int \kappa j^2 dt$. Рассмотрим предельный случай, который широко распространен при взрыве проволочек, когда ток равномерно распределен по толщине. Тогда

$$j \sim \frac{\partial H}{\partial x} \sim \frac{H_0}{R} = \frac{at^\alpha}{R}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = bQ^\beta \frac{a^2 t^{2\alpha}}{4\pi R^2};$$

интегрируя это уравнение, получим при $\beta = 1$ $Q = Q_0 \exp(\eta)$ и при $\beta \neq 1$

$$Q = [Q_0^{1-\beta} + \eta(1-\beta)]^{1/(1-\beta)}, \quad \text{где } \eta = \frac{ba^2}{4\pi} \frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} \frac{1}{R^2};$$

в частности, при $\beta < 1$ зависимость $Q = Q(t)$ приблизительно степенная, при $\beta = 1$ — экспоненциальная, а при $\beta > 1$ — гиперболическая, причем при приближении к соответствующей асимптоте все проводники взрываются.

В заключение отметим, что изложенные результаты применимы и к следующим случаям. Во-первых, когда поле выводится из проводника. Можно рассмотреть модель, в которой начальное поле $H(x) = \text{const}$, поле отсчитывается от этого значения, а в качестве граничного условия используется $H = -at^\alpha$. Во-вторых, когда нагрев происходит при постоянном давлении, тогда можно полагать, что Q — энтальпия, x — движущаяся с веществом координата.

Автор признателен В. Ф. Демичеву за обсуждение изложенной проблемы.

Поступила 17 XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
2. Шнеерсон Г. А. Поверхностный эффект в сверхсильном импульсном магнитном поле. — ЖТФ, 1967, т. 37, вып. 3.
3. Семченко В. В., Степанов А. В. О диффузии импульсных сверхсильных магнитных полей. — ПМТФ, 1969, № 1.
4. Биченков Е. И., Войтенко А. Е. Автомодельный электрический скин-взрыв проводника. — ПМТФ, 1969, № 3.
5. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.

УДК 537.52 : 533.9.01

ПРОБИВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ИНЕРТНЫХ ГАЗОВ ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ 300—2000 К

И. В. Божко, Н. И. Глазков, С. Р. Троицкий, Н. И. Фальковский
(Киев)

Можно предполагать, что с ростом температуры электрическая прочность инертных газов начнет отклоняться от закона Пашена

$$(1) \quad U_{пр} = f(ps/T)$$

при более низких температурах, чем, например, прочность электроотрицательных газов [1]. Это может обуславливаться, в частности, отсутствием в инертном газе захвата термоэлектронов, эмиттируемых катодом при высокой температуре, т. е. отсутствием фактора, тормозящего развитие пробоя. Подтверждением этому могут служить результаты исследова-