

УДК 539.4

## НИЖНЯЯ И ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ НАЧАЛА РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

А. Ф. Никитенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Приведена методика вычисления нижней и верхней оценок времени начала разрушения элементов конструкций. Представлен пример вычисления соответствующих оценок вращающегося неравномерно нагретого диска гиперболического профиля.

При проектировании элементов конструкций, предназначенных для работы в условиях ползучести, необходимо, чтобы за время службы (существования) элемента конструкции были выполнены одновременно условия прочности и жесткости. Для обеспечения первого условия необходимо вычислить время разрушения, для обеспечения второго — время эксплуатации [1–4].

Используя кинетическую теорию ползучести Ю. Н. Работнова, можно легко вычислить нижнюю и верхнюю оценки времени начала разрушения конструкций. Ниже получены такие оценки для произвольного неравномерно нагретого тела (элемента конструкции), нагруженного постоянными во времени поверхностными нагрузками. Здесь и в дальнейшем температурное поле считается стационарным. Полученные ниже оценки сопоставлены с аналогичными, используемыми в настоящее время при расчете конструкций [2, 5].

1. Соотношения кинетической теории ползучести Ю. Н. Работнова [1, 2, 6]

$$\eta_{ij} = \frac{W}{\sigma_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}}, \quad W = \frac{B\sigma_3^{n+1}}{\varphi(\omega)}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1.1)$$

$$\dot{\omega} = B_1\sigma_*^{g+1}/\varphi(\omega), \quad \omega(x_k, 0) = 0, \quad \omega(x_k^*, t_*) = 1 \quad (1.2)$$

и уравнения равновесия, соотношения Коши, уравнения совместности скоростей деформации и соответствующие граничные условия позволяют объединить две самостоятельные задачи: задачу по определению напряженно-деформированного состояния произвольного тела и задачу определения времени начала разрушения этого тела [1]. Очевидно, что решение ее связано с определенными математическими трудностями даже применительно к простейшим элементам конструкций [1], поэтому в [7, 8] разработан приближенный метод решения данной задачи, согласно которому напряженно-деформированное состояние произвольного неравномерно нагретого тела, нагруженного постоянными во времени поверхностными нагрузками, можно представить в виде (температурное поле считается постоянным)

$$\sigma_{ij}(x_k, t) = \sigma_{ij}^0 f(x_k, t) + C_1(x_k, t)\delta_{ij}, \quad f = [\varphi(\omega)]^{1/n}/X(t); \quad (1.3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(x_k, t) = \eta_{ij}^0 F(t). \quad (1.4)$$

В (1.1)–(1.4)  $\sigma_{\alpha}, \sigma_*$  — однородные относительно напряжений функции первой степени;  $W = \sigma_{ij}\eta_{ij}$ ;  $\sigma_{ij}, \eta_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформации ползучести;  $B, n, B_1, g$  — характеристики ползучести и длительной прочности материала, в рассматриваемом интервале температур  $n$  и  $g$  считаются постоянными, а  $B$  и  $B_1$  — функциями температуры [9];  $\omega$  — параметр, описывающий накопление повреждений в материале. Для исходного материала во всех точках тела с координатами  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) параметр повреждаемости равен нулю; если в некоторой точке с координатами  $x_k^*$  в момент времени  $t = t_*$  будет  $\omega(x_k^*, t_*) = 1$ , то считается, что в этой точке произошло разрушение материала, время  $t_*$  называется временем начала разрушения тела. Для функции  $\varphi(\omega)$  в соотношениях (1.1), (1.2) принято  $\varphi = \omega^\alpha(1 - \omega^{\alpha+1})^m$  [6]; при  $m = 0, \alpha \neq 0$  имеем упрочняющийся в процессе ползучести материал, при  $m \neq 0, \alpha = 0$  — разупрочняющийся, при  $\alpha = m = 0$  — материал, подчиняющийся закону установившейся ползучести;  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} + p_{ij} + \delta_{ij}$  — компоненты тензора деформации;  $\epsilon_{ij}$  — компоненты тензора упругой деформации;  $\delta_{ij}$  — температурная деформация;  $p_{ij}$  — деформации ползучести. Верхний индекс 0 обозначает, что функция зависит только от координат  $x_k$ , точка обозначает дифференцирование по времени.

В общем случае в (1.3), (1.4)  $\sigma_{ij}^0, \eta_{ij}^0$  есть статически допустимые и кинематически возможные поля. В данном случае это решение сформулированной выше задачи в предположении установившейся ползучести материала

$$\eta_{ij}^0 = \frac{W^0}{\sigma_{\alpha}^0} \frac{\partial \sigma_{\alpha}^0}{\partial \sigma_{ij}^0}, \quad W^0 = B^0(\sigma_{\alpha}^0)^{n+1}. \quad (1.5)$$

Гидростатическая составляющая  $C_1$  в каждой точке тела удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_j} \delta_{ij} = -\sigma_{ij}^0 \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

а на поверхности тела  $S_T$  — условию  $C_1 = (1 - f)T$ , где  $T$  — модуль вектора поверхностной нагрузки.

Функции  $F(t), X(t), \omega(x_k, t)$  определяются из системы уравнений, которая для разупрочняющегося в процессе ползучести материала ( $\alpha = 0, m \neq 0$ ) имеет вид [7, 8]

$$F(t) = \int_V f(x_k, t) \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij} dV \Big/ \int_V W^0 dV + [X(t)]^{-n};$$

$$\int_1^\mu Z^{m(n-g-1)/n} dZ = -[(m+1)t^0]^{-1} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau; \quad (1.6)$$

$$\int_V W^0 [\mu(x_k, t)]^{m/n} dV = X(t) \int_V W^0 dV. \quad (1.7)$$

Здесь  $\mu(x_k, t) = 1 - \omega(x_k, t)$ ;  $\mu(x_k, 0) = 1$ ;  $\mu(x_k^*, t_*) = 0$ ;

$$t^0(x_k) = [CB_1^0(\sigma_*^0)^{g+1}]^{-1}, \quad C^{-1} = \int_0^1 \varphi(\omega) d\omega. \quad (1.8)$$

Отметим, что (1.8) следует из (1.2) в предположении установившейся ползучести материала. Из (1.8) вычисляется время  $t^0(x_k^*)$  начала разрушения тела в точке с координатами  $x_k^*$ .

Далее будем обозначать его  $t_*^0$ . Таким образом,  $t_*^0$  есть время начала разрушения тела в точке с координатами  $x_k^*$  при решении соответствующей задачи в предположении, что материал подчиняется закону установившейся ползучести (1.5).

Требование сходимости интеграла в левой части равенства (1.6) накладывает некоторые ограничения на характеристики ползучести и длительной прочности материала. Эти ограничения не противоречат экспериментальным результатам. В частности,  $\beta = m/[n + m(n - g - 1)] > 0$ . Легко показать, что система уравнений (1.6), (1.7) имеет аналитическое решение только при  $\beta = 1$ , в остальных случаях можно получить нижнюю и верхнюю оценки этого решения. Например, при  $\beta > 1$  получим

$$\left(1 - \frac{t}{\bar{t}^0}\right)^{\beta v} \leq X(t) \leq \left(1 - \frac{v(g+2)t}{\bar{t}^0}\right)^{1/(g+2)};$$

$$\mu^{m/n} \geq \left\{1 - \frac{\bar{t}^0}{t_*^0} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\bar{t}^0}\right)^v\right]\right\}^\beta; \quad (1.9)$$

$$\mu^{m/n} \leq \left\{1 - \frac{\bar{t}^0}{t_*^0} \left[1 - \left(1 - \frac{v(g+2)t}{\bar{t}^0}\right)^{1/(g+2)}\right]\right\}^\beta. \quad (1.10)$$

Здесь

$$v = \frac{n + m(n - g - 1)}{n(m + 1)}, \quad \bar{t}^0 = \int_V W^0 dV / \int_V (W^0/t^0) dV. \quad (1.11)$$

Учитывая, что  $0 < \mu(x_k, t) < 1$  и  $\mu(x_k^*, t_*) = 0$ , из (1.9) и (1.10) получаем искомые оценки времени начала разрушения тела

$$\frac{1 - (1 - \lambda)^{1/v}}{\lambda} \leq \frac{t_*}{t_*^0} \leq \frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda} \frac{1}{v(g+2)}, \quad \lambda = \frac{t_*^0}{t^0}. \quad (1.12)$$

**2.** При расчете конструкций рекомендуется вычислять нижнюю границу времени начала разрушения тела, выполняя соответствующий расчет в предположении установившейся ползучести материала [1, 2, 5, 10]. Доказать, что полученная при таком расчете оценка будет нижней, нельзя [10]. Так же без обоснования рекомендуется вычислять верхнюю оценку, осуществляя соответствующий расчет по предельному состоянию тела [2]. Таким образом, предлагаемые оценки можно записать в виде

$$t_*^0 \leq t_* \leq t_{**}. \quad (2.1)$$

Здесь  $t_{**}$  — момент, соответствующий разрушению тела одновременно во всех точках.

Проведем анализ, позволяющий сравнить оценки (1.12) с оценками (2.1). Сначала выполним соответствующий расчет по предельному состоянию. Потребуем, чтобы напряжения удовлетворяли условию предельного состояния [11]. Это условие следует из (1.2) и для стационарного температурно-силового воздействия на тело имеет вид [11]

$$B_1^0(\sigma_*^0)^{g+1} = (Ct_{**})^{-1}, \quad C^{-1} = \int_0^1 \varphi(\omega) d\omega. \quad (2.2)$$

Соотношение (2.2) можно записать в виде

$$U\sigma_*^0 = \sigma_{д.п.}, \quad U = [B_1^0(\theta)/B_1^0(\theta_0)]^{1/(g+1)}, \quad \sigma_{д.п.} = [CB_1^0(\theta_0)t_{**}]^{-1/(g+1)},$$

где  $\sigma_{д.п.}$  — предел длительной прочности материала на растяжение, определенный на базе  $t_{**}$  при фиксированной температуре  $\theta_0$ . Условие предельного состояния можно записать

следующим образом:  $\sigma_*^0 = \sigma_{д.п.}$ ,  $\sigma_{д.п.} = [CB_1^0(\theta)t_{**}]^{-1/(g+1)}$ . Это условие является аналогом условия текучести материала. В этом случае предел длительной прочности материала, определенный на базе  $t_{**}$ , является известной функцией температуры.

Используя условие (2.2), из (1.8) и (1.11) получаем  $t_*^0 = t_{**}$ ,  $\bar{t}^0 = t_{**}$ . Далее, учитывая, что  $\lambda = t_*^0/\bar{t}^0 = 1$ , из (1.12) окончательно получим

$$t_{**} \leq t_* \leq t_{**}/(v(g+2)). \tag{2.3}$$

Сопоставляя (2.1) и (2.3) с учетом  $t_*^0 = t_{**}$ , убеждаемся, что верхняя оценка (2.1) не согласуется с (2.3).

На практике в большинстве случаев не удается реализовать условие (2.2) предельного состояния. Поэтому, как правило,

$$B_1^0(\sigma_*^0)^{g+1} \leq (Ct_{**})^{-1}. \tag{2.4}$$

Из (1.8) с учетом (2.4) имеем  $t_*^0 \geq t_{**}$ . Легко показать, что дробь в (1.12) не меньше единицы:  $(1 - (1 - \lambda)^{1/v})/\lambda \geq 1$ ,  $(1 - (1 - \lambda)^{g+2})/\lambda \geq 1$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ . С учетом этих неравенств и (1.12) получим

$$t_* \leq \frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda} \frac{t_*^0}{v(g+2)}; \tag{2.5}$$

$$\frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda} \frac{t_*^0}{v(g+2)} \geq \frac{t_*^0}{v(g+2)} \geq \frac{t_{**}}{v(g+2)};$$

$$t_* \geq \frac{1 - (1 - \lambda)^{1/v}}{\lambda} t_*^0 \geq t_*^0 \geq t_{**}. \tag{2.6}$$

Система неравенств (2.6) представляет собой доказательство непротиворечивости используемой в расчетной практике оценки (2.1) времени начала разрушения снизу. Время разрушения, вычисленное на основе оценки (1.12), ближе к истинному, чем вычисленное по оценке (2.1).

**3.** Вычислим соответствующие оценки времени начала разрушения вращающегося неравномерно нагретого диска гиперболического профиля. Здесь реализуется плоское напряженное состояние. Будем полагать, что  $\sigma_\varphi > \sigma_r > \sigma_z = 0$ .

В качестве эквивалентного напряжения  $\sigma_3^0$  в (1.5) используем критерий максимального касательного напряжения  $\sigma_3^0 = \sigma_\varphi^0/2$ , а зависимость коэффициента ползучести от температуры будем считать степенной:  $B^0 = B_0\theta^{\nu_1}$ . Закон изменения температуры по радиусу диска примем в виде

$$\theta = \theta_0(r/a)^{\nu_2}, \quad \nu_2 \geq 0,$$

где  $a$  — внутренний радиус диска. Пусть  $\varrho = b/a$ ,  $b$  — наружный радиус диска. Толщина диска определяется выражением  $h = h_0r^{-k}$ ,  $k \geq 0$ . Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии неравномерно нагретого диска гиперболического профиля в предположении установившейся ползучести материала при степенном законе (1.5) приведено в [9, 11].

Выпишем выражения для напряжений:

$$\sigma_r^0 = C_1 \left(\frac{r}{a}\right)^{k-1} - C_2 \left(\frac{a}{r}\right)^{(1+\nu)/k} - \frac{\rho\Omega^2}{3-k} r^2, \quad \sigma_\varphi^0 = \delta C_2 \left(\frac{a}{r}\right)^{(1+\nu)/n},$$

$$C_1 = \frac{p_1 + p_2\varrho^{1+\delta-k}}{\varrho^\delta - 1} + \frac{\varrho^{3+\delta-k} - 1}{\varrho^\delta - 1} \frac{\rho a^2 \Omega^2}{3-k}, \quad \delta = k - 1 + \frac{1+\nu}{n}, \tag{3.1}$$

$$C_2 = \frac{(p_1 + p_2 \varrho^{1-k}) \varrho^\delta}{\varrho^\delta - 1} + \frac{(\varrho^{3-k} - 1) \varrho^\delta}{\varrho^\delta - 1} \frac{\rho a^2 \Omega^2}{3 - k},$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения;  $\rho$  — плотность материала диска;  $p_1 = -\sigma_r(a)$ ;  $p_2 = \sigma_r(b)$ ;  $\nu = \nu_1 \nu_2$ .

В качестве эквивалентного напряжения  $\sigma_*$  в (2.2) используем критерий Джонсона  $\sigma_* = \sigma_\varphi^0$ , а зависимость коэффициента  $B_1^0$  от температуры примем степенной:  $B_1^0 = B_{01} \theta^{\nu_1}$ . Условие предельного состояния (2.2) запишется в виде

$$(r/a)^{\nu/(g+1)} \sigma_\varphi^0 = \sigma_{д.п.}, \quad \sigma_{д.п.} = (C B_{01} \theta_0^{\nu_1} t_{**})^{-1/(g+1)}. \quad (3.2)$$

В случае предельного состояния материала диска поле напряжений (3.1) должно удовлетворять условию (3.2), откуда следует, что для обеспечения предельного состояния диска должно быть [11]

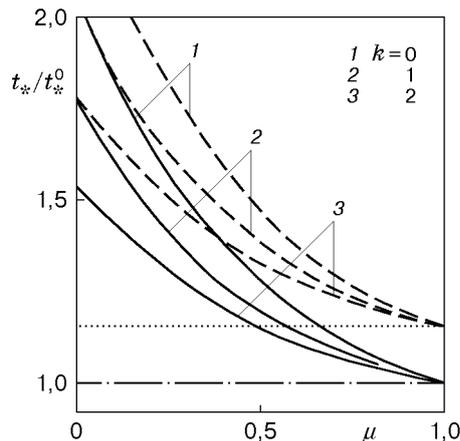
$$\nu = \frac{g+1}{n-g-1}, \quad \frac{\rho a^2 \Omega_*^2}{3-k} = \frac{\varrho^\delta - 1}{\delta \varrho^\delta (\varrho^{3-k} - 1)} \sigma_{д.п.} - \frac{p_1 + p_2 \varrho^{1-k}}{\delta (\varrho^{3-k} - 1)}. \quad (3.3)$$

Положим  $\nu = \mu(g+1)/(n-g-1)$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ . Значение  $\mu = 0$  соответствует равномерно нагретому диску,  $\mu = 1$  — неравномерно нагретому диску, находящемуся в предельном состоянии.

Разрушение диска начинается с внутренней поверхности:  $r^* = a$ . Используя (3.1), согласно (1.8) и (1.11) вычисляем  $t_*^0$ ,  $\bar{t}^0$  и их отношение  $\lambda = t_*^0/\bar{t}^0$ . Получаем

$$\lambda = \frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{\varrho^{\xi_2} - 1}{\varrho^{\xi_1} - 1}, \quad \lambda = \lambda(\mu), \quad (3.4)$$

$$\xi_1 = -k + \frac{n-g-2}{n} \frac{n - (1-\mu)(g+1)}{n-g-1}, \quad \xi_2 = -k + 1 - \frac{n - (1-\mu)(g+1)}{n(n-g-1)}.$$



На рисунке при различных значениях  $k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) и  $\varrho = 4$  представлены кривые, соответствующие нижней и верхней границам времени начала разрушения диска. Расчет выполнен по формулам (1.12) и (3.4). Для характеристик ползучести и длительной прочности материала принято  $n = 6$ ,  $g = 4,75$ ,  $m = 10$ . Верхняя граница показана штриховой линией, нижняя — сплошной, штрихпунктирной линией показана нижняя граница, вычисленная по (2.1), пунктирной — верхняя граница, вычисленная по (2.3). Очевидно, что оценка, вычисленная по (2.1), близка к (1.12) в “окрестности” значения параметра  $\mu$ , обеспечивающего предельное состояние тела. Состояние, близкое к предельному, можно реализовать как за счет внешних температурно-силовых воздействий при заданной геометрии тела, так и за счет оптимальной геометрии при заданных внешних воздействиях. Действительно, из представленных на рисунке зависимостей следует:

1) для неравномерно нагретого диска постоянной толщины ( $k = 0$ ) отклонение штрихпунктирной линии от сплошной составляет 7% при  $\mu = 0,8$ ; 19% при  $\mu = 0,6$ ; 63% при  $\mu = 0,2$ ;

2) для неравномерно нагретого диска гиперболического профиля ( $k > 0$ ) аналогичные отклонения составляют 5,5% ( $k = 1$ ) и 4,5% ( $k = 2$ ) при  $\mu = 0,8$ ; 14% ( $k = 1$ ) и 11% ( $k = 2$ ) при  $\mu = 0,6$ ; 46% ( $k = 1$ ) и 33% ( $k = 2$ ) при  $\mu = 0,2$ ;

3) для равномерно нагретого диска ( $\mu = 0$ ) эти отклонения составляют 104 % при  $k = 0$ ; 76 % при  $k = 1$ ; 54 % при  $k = 2$ .

Таким образом, во всех случаях по мере отклонения от предельного состояния тела нижняя оценка  $t_* \geq t_*^0$  становится достаточно грубой.

В заключение отметим, что соответствующие оценки времени начала разрушения элементов конструкций, представленные неравенствами (1.12), справедливы, когда  $\beta = m/[n + m(n - g - 1)] > 1$ . Если  $\beta = 1$ , то нижняя и верхняя оценки совпадают, и для вычисления времени начала разрушения тела получаем выражение

$$\frac{t_*}{t_*^0} = \frac{1 - (1 - \lambda)^{1/\gamma}}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{m}{n(m + 1)}$$

(если  $\beta = 1$ , то  $v = \gamma$ ,  $v(g + 2) = 1$  [7, 8]). Случай  $0 < \beta < 1$  рассматривается аналогично.

Предложенную методику вычисления нижней и верхней оценок времени начала разрушения элементов конструкций можно использовать для расчета конструкций. Эта методика связана с решением задачи определения напряженного состояния тела в предположении установившейся ползучести материала при степенном законе (1.5) и дальнейшим вычислением оценок согласно системе неравенств (1.12) с одновременным использованием соотношений (1.8) и (1.11).

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Работнов Ю. Н., Милейко С. Т.** Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970.
3. **Немировский Ю. В.** О времени эксплуатации и разрушения конструкций в условиях ползучести // Прикл. механика. 1970. Т. 6, вып. 3. С. 47–54.
4. **Немировский Ю. В.** Об учете веса при проектировании конструкций в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 4. С. 113–123.
5. **Работнов Ю. Н.** Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // Инж. журн. Механика твердого тела. 1967. № 3. С. 36–41.
6. **Никитенко А. Ф.** Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997.
7. **Никитенко А. Ф., Заев В. А.** Расчет напряженно-деформированного состояния и времени начала разрушения элементов конструкций с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Пробл. прочности. 1983. № 1. С. 56–61.
8. **Заев В. А., Никитенко А. Ф.** Приближенный метод расчета элементов конструкций с учетом повреждаемости материала в процессе ползучести // Надежность и неупругое деформирование конструкций: Сб. науч. тр. Куйбышев: Куйбышев. политехн. ин-т, 1990. С. 29–39.
9. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
10. **Бойл Дж., Спенс Дж.** Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986.
11. **Никитенко А. Ф.** Предельное состояние тела в процессе ползучести его материала // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Докл. II Всерос. семинара, Новосибирск, 1998 г. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1998. С. 94–103.

Поступила в редакцию 13/IV 1999 г.,  
в окончательном варианте — 14/X 1999 г.