

УДК 532.545

АНАЛИЗ ПРИЧИН ВОЗНИКНОВЕНИЯ ДОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

А. Г. Петров, И. И. Потапов*

Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, 119526 Москва, Россия

* Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск, Россия

E-mails: petrov@ipmnet.ru, potapovii@rambler.ru

С использованием формулы расхода переносимых наносов, не содержащей феноменологических параметров, выполнен анализ причин возникновения донной неустойчивости в канале с песчаным дном. При этом расход наносов однозначно определяется нормальными и касательными придонными напряжениями, а также уклоном донной поверхности. В рамках линейной модели показано, что причиной возникновения донной неустойчивости являются лишь возмущения придонного нормального давления независимо от их природы.

Ключевые слова: русловые процессы, переносимые наносы, придонный слой, донные волны, донная неустойчивость.

Введение. Анализу причин возникновения и развития донной неустойчивости посвящено большое количество работ (см., например, [1–5]). В работе [6], посвященной изучению данной проблемы, рассмотрена задача, которую можно сформулировать следующим образом. Используем для определения эволюции донной поверхности уравнение Экснера [1]

$$(1 - \varepsilon)\rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Подставляя в уравнение (1) выражения для малых возмущений донной поверхности ζ и удельного массового расхода донного материала q

$$\zeta = \zeta_0 \exp(\sigma t + ikx); \quad (2)$$

$$q = q_0 \exp(\sigma t + ik(x + \delta)), \quad (3)$$

получаем выражение для частоты возмущенной донной волны

$$\sigma = \frac{q_0 ik}{\zeta_0(1 - \varepsilon)\rho_s} (\cos(k\delta) - i \sin(k\delta)),$$

где ρ_s, ε — плотность и коэффициент пористости донного материала соответственно; t — время; x — пространственная координата; σ — частота волны; k — волновое число; ζ_0 — амплитуда донной волны; q_0 — амплитуда возмущения удельного массового расхода донного материала; δ — сдвиг фазы расхода наносов относительно расхода внешнего гидродинамического потока.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-98518-р восток(а)) и фонда ДВО РАН (код проекта 12-III-A-03-034).

© Петров А. Г., Потапов И. И., 2014

Анализируя условие развития донной неустойчивости $\sigma_R > 0$, где $\sigma_R = \text{Re } \sigma$ — действительная часть частоты волны:

$$\sigma_R = \frac{q_0 k}{\zeta_0(1 - \varepsilon)\rho_s} \sin(k\delta), \quad (4)$$

авторы работы [6] пришли к выводу, что развитие донных волн может происходить только при существовании ненулевого фазового сдвига $\delta > 0$. Это условие не является замкнутым. Для полного решения задачи о возникновении и развитии донной неустойчивости необходимо определить формулу переносимых наносов и выразить величину δ через параметры задачи.

Одно из первых решений данной задачи получено в работе [7], в которой сделано предположение, что для донных волн с малой амплитудой расход наносов на волнообразном дне определяется той же однозначной связью со скоростью течения, что и при равномерном движении. На основе этого предположения и простых феноменологических формул для расхода наносов автор работы сформулировал проблему нейтральности донных волн и предложил два подхода к ее решению:

1) использовать более точную формулу, описывающую движение наносов с учетом неравномерности движения потока;

2) ввести гипотезу о запаздывании изменения расхода наносов относительно изменений скорости, полагая, что при неравномерном движении расход наносов в сечении с координатой x определяется скоростью в некотором вышележащем сечении с координатой $x - \delta$, где сдвиг δ объясняется отставанием на оси x распределений донной скорости и касательного напряжения от распределения средней скорости гидродинамического потока.

В работе [7] с использованием второго подхода получен ряд важных результатов и определено направление дальнейших исследований. Вслед за работой [7] появился ряд работ [1, 2, 8–10], в которых происхождение грядовой формы донного рельефа в деформируемых руслах также объяснялось наличием волн на свободной поверхности потока. Однако использование в данных работах простых феноменологических формул не позволило не только определить причины возникновения сдвига δ , но и объяснить процесс возникновения донных волн в напорных каналах [4].

В настоящей работе без привлечения гипотез о сдвиге δ с использованием формулы движения переносимых наносов, полученной в [11], выполнен анализ развития донной неустойчивости и определены условия, при которых возможно возникновение донных волн.

1. Уравнение русловых деформаций. Согласно работе [11] удельный массовый расход твердых частиц, движущихся в придонном слое, линеаризованный по малым параметрам $\partial\zeta/\partial x$, $\partial P/\partial x$, определяется уравнением

$$q = q_0 T^b \left(A^* - B^* \frac{\partial\zeta}{\partial x} - C^* \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (5)$$

где

$$A^* = 1 - \Xi, \quad B^* = \frac{1}{\text{tg } \varphi} \left(\frac{\Xi}{2} - (1 - \Xi) \frac{1 + s}{s} \right), \quad C^* = \frac{1 - \Xi}{s\rho_s g \text{tg } \varphi},$$

$$\Xi = \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \quad T_0 = \frac{9\kappa^2 d F_a}{8c_x}, \quad F_a = g(\rho_s - \rho_w) \text{tg } \varphi, \quad q = \frac{4}{3} \frac{\rho_s}{\sqrt{\rho_w} \kappa F_a},$$

ρ_w — плотность воды; $s = f\rho_b$; $\rho_b = (\rho_s - \rho_w)/\rho_w$; φ — угол внутреннего трения донных частиц; T — придонное касательное напряжение; P — придонное давление; f — концентрация переносимых частиц в придонном слое; d — диаметр частиц; c_x — коэффициент лобового сопротивления частиц; κ — постоянная Кармана; $b = 3/2$.

Для получения уравнения русловых деформаций выражения для удельного массового расхода переносимых наносов (5) подставим в уравнения Эйснера (1):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + A \frac{\partial T^b}{\partial x} - B \frac{\partial}{\partial x} \left(T^b \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - C \frac{\partial}{\partial x} \left(T^b \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$A = \frac{A^* q_0}{(1 - \varepsilon) \rho_s} > 0, \quad B = \frac{B^* q_0}{(1 - \varepsilon) \rho_s} > 0, \quad C = \frac{C^* q_0}{(1 - \varepsilon) \rho_s} > 0. \quad (7)$$

Заметим, что параметры A , B , C зависят только от физико-механических и гранулометрических параметров задачи. Таким образом, при решении уравнения (6) факторами, приводящими к развитию донной неустойчивости, являются нормальное P и касательное T придонные напряжения, определяемые из решения внешней гидродинамической задачи.

2. Анализ механизмов донной неустойчивости. Рассмотрим причины развития донной неустойчивости и определим условия, при которых возможно возникновение донных волн. Будем полагать, что придонное касательное напряжение T близко к напряжению T_0 , при котором начинается движение донного материала, поэтому влиянием взвешенных наносов можно пренебречь. Следует отметить, что в отличие от работ [12–15] анализ уравнения (6) характеризуется изолированностью от внешних решений. Таким образом, в настоящее время не используются математические модели, в рамках которых можно получить информацию о внешних параметрах исследуемой задачи, рассматривая лишь влияние внешнего решения на процесс развития донной неустойчивости.

Рассмотрим несколько вариантов решения уравнения (6) для различных представлений сдвигового и нормального придонных напряжений. В простейшем случае, при постоянных значениях T , P , уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - BT^b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = 0. \quad (8)$$

Подставляя решение (2) в уравнение (8), можно показать, что любое малое возмущение ζ_0 будет затухать с показателем

$$\sigma_R = -BT^b k^2. \quad (9)$$

Неоднородное решение возможно лишь при периодическом или квазипериодическом возмущении дна на границах области. Однако и при этом малые возмущения дна на границах области будут затухать в области решения задачи. Таким образом, для развития устойчивых донных возмущений необходимо, чтобы величины, характеризующие внешнее воздействие, не были постоянными, а имели периодический или квазипериодический характер. Рассмотрим случай $P = \text{const}$, $T = T_0 + \tau(t, x)$, когда линеаризованное по малому параметру τ уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + AbT_0^{b-1} \frac{\partial \tau}{\partial x} - BT_0^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (10)$$

Подставляя решения

$$\zeta = \zeta_0 \exp(\sigma t + ikx), \quad \tau = \tau_0 \exp(\sigma t + ikx)$$

в уравнение (10), получаем характеристическое уравнение

$$\sigma \zeta_0 + AbT_0^{b-1} \tau_0 ki + BT_0^b k^2 \zeta_0 = 0. \quad (11)$$

Решая (11) относительно параметра σ и определяя действительную часть σ_R , убеждаемся, что она совпадает с показателем (9):

$$\sigma_R = \text{Re } \sigma = -BT^b k^2. \quad (12)$$

Из (12) следует, что пульсации сдвиговых придонных напряжений не приводят к генерации донных волн и для выполнения условия донной неустойчивости $\sigma_R > 0$ необходимо вновь рассмотреть вопрос о существовании фазового сдвига δ .

Как сказано выше, для достижения неустойчивости фазовый сдвиг δ следует ввести в функцию напряжений:

$$\tau = \tau_0 \exp(\sigma t + ik(x + \delta)).$$

Действительно, гидродинамические расчеты и натурные эксперименты [1] показывают, что при развитом волнистом дне максимум функции τ отстает от максимума функции ζ на фазу δ . Поскольку на ровном дне $\zeta = 0$ функция $\delta(\zeta)$ должна быть равна нулю, при малых ζ для нее должна быть справедлива аппроксимация $\delta(\zeta) \approx \alpha\zeta$, $\alpha = \text{const}$. Однако, подставляя аппроксимацию $\delta(\zeta) \approx \alpha\zeta$ в уравнение (3) и линеаризуя его, получаем

$$q = q_0 \exp(\sigma t + ik(x + \alpha\zeta)) \approx q_0(1 + \alpha\zeta ik) \exp(\sigma t + ikx) \approx q_0 \exp(\sigma t + ikx). \quad (13)$$

Из выражения (13) следует, что возникающий в рамках линейной теории фазовый сдвиг не может являться причиной возникновения и развития донной неустойчивости.

Рассмотрим линеаризацию уравнения (6) для случая $T = \text{const}$, при котором данное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - BT^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - CT^b \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0. \quad (14)$$

Подставляя в (14) решения

$$\zeta = \zeta_0 \exp(\sigma t + ikx), \quad P = P_0 \exp(\sigma t + ikx),$$

получаем характеристическое уравнение

$$\sigma\zeta_0 + AT_0^b k^2 P_0 + BT_0^b k^2 \zeta_0 = 0.$$

Решая это уравнение, находим функцию σ , действительная часть которой равна

$$\sigma_R = -T^b k^2 (B + AP_0/\zeta_0). \quad (15)$$

Из полученного решения следует, что область роста донных возмущений может существовать при выполнении условия

$$1 < -\frac{A}{B} \frac{P_0}{\zeta_0}. \quad (16)$$

Учитывая, что $A/B > 0$, для выполнения условия (16) необходимо, чтобы амплитуды функций P , ζ находились в противофазе, т. е. выполнялось условие $P_0/\zeta_0 < 0$. При этом условие (16) является условием с отрицательной обратной связью, поскольку с ростом донных возмущений отношение P_0/ζ_0 должно уменьшаться, при некоторых критических значениях P_0^*/ζ_0^* приводя к равновесному состоянию

$$\frac{B}{A} + \frac{P_0^*}{\zeta_0^*} = 0, \quad (17)$$

при котором рост донных волн прекращается. Учитывая, что значение минимальной амплитуды ζ_0 ограничено размером донных частиц d , и используя условие (16), можно оценить критическое значение амплитуды придонного давления P_0 , при котором возникает донная неустойчивость $(B/A)d < -P_0$.

Из равенства выражений (4), (15) следует условие для определения фазового сдвига

$$\delta = -\frac{1}{k} \arcsin \left(\zeta_0 k T^b A^* \left(\frac{B^*}{A^*} + \frac{P_0}{\zeta_0} \right) \right), \quad (18)$$

которое в длинноволновом приближении $k\delta \ll 1$ упрощается:

$$\delta = -T^b(\zeta_0 B^* + P_0 A^*). \quad (19)$$

Уравнения (15)–(19) не являются замкнутыми, однако позволяют выполнить оценку значения δ по экспериментальным данным и указывают на причины возникновения и развития донной неустойчивости.

Заключение. Для решения задачи о донной устойчивости сформулировано уравнение русловых деформаций, не содержащее феноменологических коэффициентов и имеющее два параметра, оказывающие влияние на устойчивость донной поверхности: придонные касательное и нормальное напряжения, получаемые из решения внешней гидродинамической задачи.

Решена задача о донной устойчивости, получены аналитические зависимости частоты донной волны от придонного касательного и нормального напряжений, волновых чисел донных волн и физико-механических параметров донного материала. Показано, что основной причиной возникновения донной неустойчивости, приводящей к образованию донных волн, является возмущение придонного давления.

Установлено, что в рамках линейной модели наличие возмущений донной поверхности ζ не приводит к возникновению фазового сдвига δ , достаточного для появления донной неустойчивости.

Определено условие образования донной неустойчивости, на его основе получено асимптотическое аналитическое выражение, связывающее величину фазового сдвига δ и амплитуды донных волн и придонного давления.

Полученные результаты позволяют классифицировать различные причины возникновения донной неустойчивости в зависимости от причин возникновения придонных пульсаций давления, обусловленных наличием внутренних волн в потоке [2], неоднородностью турбулентного гидродинамического потока [4], возмущением свободной поверхности гидродинамического потока [12–15] и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гришанин К. В.** Устойчивость русел рек и каналов. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
2. **Сидорчук А. Ю., Михинов А. Е.** Морфология и динамика руслового рельефа // Гидрология суши. М.: ВИНТИ, 1985. (Итоги науки и техники; АН СССР). Т. 5. С. 5–160.
3. **Coleman S. E., Fedele J. J., Garcia M. H.** Closed-conduit bed-form initiation and development // J. Hydraul. Engng. 2003. V. 129, N 12. P. 956–965.
4. **Colombini M.** Revisiting the linear theory of sand dune formation // J. Fluid Mech. 2004. V. 502. P. 1–16.
5. **Venditti J. G., Church M. A.** Bed form initiation from a flat sand bed // J. Geophys. Res. 2005. V. 110, iss. F1. P. 1–19.
6. **Engelund F., Fredsoe J.** Sediment ripples and dunes // Annu. Rev. Fluid Mech. 1982. V. 14. P. 13–37.
7. **Kennedy J. F.** The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels // J. Fluid Mech. 1963. V. 16. P. 521–544.
8. **Hayashi T.** Formation of dunes and antidunes in open channels // J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1970. V. 96, N 2. P. 357–366.
9. **Mercer A. G., Hague M. J.** Ripple profiles modelled mathematically // J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs. 1973. V. 99, N 3. P. 441–460.
10. **Engelund F.** Instability of erodible beds // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. P. 225–244.

11. **Потапов И. И.** Уравнение русловых деформаций для несвязного дна. Хабаровск, 2011. (Препр. / ДВО РАН. Вычисл. центр; № 168).
12. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Постановка и решение задачи об устойчивости несвязного дна канала // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 1. С. 62–74.
13. **Петров А. Г., Потапов И. И.** О развитии возмущений песчаного дна канала // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 2. С. 191–195.
14. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Об устойчивости песчаного дна канала постоянной ширины // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 5. С. 631–634.
15. **Петров А. Г., Потапов И. И.** О влиянии турбулентной вязкости на процессы образования и движения донных волн // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 1. С. 57–68.

Поступила в редакцию 20/XI 2013 г.
