

УДК 534.222.2

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗБЫТОЧНОГО ДАВЛЕНИЯ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Я. Го, Я. Хань, Л.-М. Ван

Северный университет Китая, 030051 Тайюань, Шаньси, Китай
guoyali@nuc.edu.cn, hanyan@nuc.edu.cn, wlm@nuc.edu.cn

Представлен метод восстановления избыточного давления в ударной волне, позволяющий преодолеть недостатки предыдущих подходов, связанные с недостаточностью точек измерения скорости ударной волны, а также с ограниченным характером эмпирического уравнения. Спроектирована оптимальная экспериментальная схема расположения датчиков. На основе данных, полученных при использовании этой схемы, проведено обратное преобразование поля скоростей ударной волны с использованием обобщенной теории восстановления и установлено распределение избыточного давления. Результаты обратного преобразования предпочтительнее эмпирического подхода, поскольку данные эксперимента подтверждаются в ограниченной области. Описан метод вычисления и визуализации избыточного давления.

Ключевые слова: восстановление избыточного давления, оптимальная структура тестирующей системы, разбиение сетки на подобласти с ячейками разного масштаба, оптимальное расположение датчиков, обобщенное обратное преобразование.

DOI 10.15372/FGV20150511

ВВЕДЕНИЕ

Взрывные технологии всё более широко применяются в различных областях. Оценка силы взрыва и способы уменьшения разрушений — важные направления в обеспечении безопасности таких технологий [1]. Наибольшего контроля требует главный разрушающий фактор взрыва — избыточное давление в ударной волне [2]. В настоящее время для его определения используются обобщающими эмпирическими соотношениями [3–5]. Однако отличия в условиях испытаний и формах зарядов ВВ приводят к таким различиям в результатах опытов, что применять эти формулы для точного вычисления избыточного давления в ударной волне не представляется корректным.

Ввиду того, что по результатам измерения лишь в нескольких точках невозможно дать полное описание процесса распространения волны, а эмпирические формулы для определения избыточного давления имеют ограничения, в данной статье предложен метод восстановления избыточного давления в ударной волне на основе теории компьютерной томографической реконструкции. Для улучшения

точности восстановления использовался метод разбиения расчетной сетки на подобласти с ячейками разного масштаба, а также проводилась оптимизация расположения датчиков. На основе оптимальной системы построена теория восстановления, которая по полю скоростей ударных волн позволяет получить распределение избыточного давления и тем самым оценить возможные разрушения.

ТЕОРИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗБЫТОЧНОГО ДАВЛЕНИЯ В УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Считаем, что ударная волна распространяется по прямым лучам и не распространяется по границе сетки. Каждому лучу соответствует датчик. Время, скорость и геометрический путь ударной волны связаны соотношением

$$DS = T. \quad (1)$$

Здесь $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)'$ — m -мерный вектор-столбец времени распространения; $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)'$ — неизвестный N -мерный вектор-столбец, выражающий неизвестные значения интервального времени пробега (величина, обратная скорости) в дискретной ячейке; D — матрица расстояний размерностью $M \times N$, ее элементы d_{ij} представляют

собой длину i -го луча в j -й ячейке. Решив уравнение (1), можно получить интервальное время пробега.

Пиковое избыточное давление p_m определяется по соотношению Ренкина — Гюгиони [6]:

$$p_m = \frac{7p_0}{6} \left(\frac{c^2}{C_0^2} - 1 \right). \quad (2)$$

Здесь c — скорость ударной волны, $C_0 = 20.1\sqrt{T_0}$ — скорость звука в воздухе, p_0, T_0 — начальные давление и температура невозмущенного воздуха, К.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДАТЧИКОВ ТЕСТИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Восстановление избыточного давления относится к задачам томографии времени движения волны с одиночными источниками и редкими лучами. Устойчивость восстановления связана со структурой матрицы D , и ее можно усовершенствовать путем конструирования соответствующих ячеек и оптимизации распределения лучей.

При взрыве в воздухе избыточное давление в ударной волне быстро уменьшается вблизи места взрыва. По мере удаления от точки взрыва темп снижения давления замедляется. Разбиение сетки на подобласти с ячейками разного масштаба основано на характеристиках ударной волны. Вблизи взрывчатого вещества размеры ячеек малы, по мере удаления от него размеры увеличиваются. Чтобы избежать линейности вектора-строки, зависящей от матрицы D , симметричные области разбиваются на ячейки разного размера. Необходимо также рассмотреть разрешение и точность инверсии.

При томографическом анализе взрыва положение заряда ВВ фиксировано. Оптимизация распределения лучей означает оптимизацию расположения датчиков.

В матричном уравнении (1) для вектора времени t_0 часто требуется найти модельный вектор $s_0 \in S$ такой, чтобы разность $|t_0 - Ds_0|^2$ была минимальной. Это достигается предварительным умножением уравнения (1) на D^T и обращением матрицы [7]:

$$S = (D^T D)^{-1} D^T T. \quad (3)$$

Квадратичная матрица $L = D^T D$ размерностью $N \times N$ часто почти сингулярна,

это приводит к неустойчивости решения. То есть некоторые из ее собственных векторов $\{e_i: i = 1, \dots, N\}$ имеют крайне малые собственные значения $\{\lambda_i: i = 1, \dots, N\}$. Погрешность измерений величины T влияет на решение S в соответствии с законом $1/\lambda_i$ [8, 9]. Следовательно, в том случае, когда собственные значения малы, решение становится неустойчивым, а обратная задача — плохо обусловленной. Чем выше ранг и больше собственные значения, тем устойчивее решение обратной задачи (инверсии) и можно получить больше независимой информации из данных измерения. Таким образом, оптимальное расположение датчиков достигается при максимально возможных значениях L и ранге D . Оценочная функция —

$$E_1 = \frac{N\lambda_1}{\text{trace}(D^T D)} + N - \text{rank}(D), \quad (4)$$

где λ_1 — максимальные собственные значения $D^T D$; $\text{trace}(D^T D) = \sum_{i=1}^N \lambda_i$; N — число ячеек;

$\text{rank}(D)$ — ранг матрицы D . Значение E_1 минимально, математические свойства оптимальны, и, как результат, решение обратной задачи устойчиво. Важным показателем, определяющим степень некорректности уравнения, является число обусловленности матрицы. Оценочная функция, выраженная через число обусловленности, может быть записана в виде

$$E_2 = \text{cond}(D). \quad (5)$$

Если величина E_2 минимальна, уравнение становится корректным.

При проектировании расположения датчиков необходимо исходить из того, что они должны охватывать наибольшую область. Поэтому нужно сделать максимальными плотность лучей и ортогональность. Оценочная функция, выраженная через эти величины, может быть представлена в виде

$$E_3 = \frac{k_1}{N} \sum_{j=1}^N \rho_j + \frac{k_2}{N} \sum_{j=1}^N O_j = k_1 \bar{\rho} + k_2 \bar{O}, \quad (6)$$

где ρ_j — число лучей в j -й ячейке; O_j — ортогональность лучей в j -й ячейке, т. е. максимальное значение синуса угла между лучами; значения k_1 и k_2 определяются величинами ρ_j и O_j .

На основе взвешенных значений E_1, E_2, E_3 нами получена интегральная оценочная функция

$$E = \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3. \quad (7)$$

Здесь значения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ определяются порядком величин E_1, E_2, E_3 . Если E минимальна, тестирующая система оптимальна.

ИНВЕРСИЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ПРОБЕГА НА ОСНОВЕ ВЗВЕШЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ИНВЕРСИИ

Проблема восстановления избыточного давления при взрыве относится к задачам кинематической томографии с одиночными источниками и редкими лучами, что приводит к неполноте данных томографии. Решение дискретного уравнения обратной задачи (1) матричным способом — то же самое, что решение матрицы, обратной D . Матрица коэффициентов D в общем виде сингулярна, и неочевидно, что существует обратная ей матрица. Поэтому для решения уравнения необходимо использовать обобщенную теорию восстановления [10–12]. Кроме того, для увеличения количества информации следует использовать взвешенную обобщенную обратную задачу.

Данные наблюдений могут быть взвешены, так же как и модельный параметр в обобщенной обратной задаче. Если $A \in C^{M \times N}$, то P и Q являются положительно определенными матрицами размерностью $M \times M$ и $N \times N$ соответственно. Если $X \in C^{N \times M}$, выполняется

$$AXA = A, \quad XAX = X,$$

$$(PAX)^T = PAX,$$

$$(QXA)^T = QXA.$$

Тогда X определяется как взвешенная обобщенная обратная задача от A :

$$A_{MN}^+ = Q^{-1}(PAQ^{-1})^+ P.$$

В данной статье используется натуральная весовая матрица, причем диагональные элементы P и Q определяются как

$$\text{diag}\{P\} = T^{-1},$$

$$\text{diag}\{Q\} = K.$$

Здесь T — M -мерный вектор времени пространства, $K = k_j = \sum_{i=1}^M d_{ij} v_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots, N$) — N -мерный вектор, v_j — скорость в j -й ячейке.

Такая взвешенная матрица имеет ясный физический смысл [13, 14], а именно:

- (1) амплитуда затухания избыточного давления ударной волны уменьшается с увеличением расстояния, траектория луча короче, отношение сигнал/шум выше; таким образом, меньшее время распространения должно иметь больший вес;
- (2) чем выше плотность лучей, тем точнее результаты решения обратной задачи, поэтому ячейки, через которые проходит больше лучей, содержат больше информации и должны иметь больший вес.

Следовательно, условие кинематической томографии при взвешенной обобщенной обратной задаче запишется в виде

$$S = Q^{-1}(PDQ^{-1})^+ PT.$$

ЭКСПЕРИМЕНТ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В соответствии с законом затухания ударной волны, ячейки вблизи взрывчатого вещества имеют меньшие размеры и расположены плотнее, тогда как на удалении они крупнее и расположены реже. Поскольку число датчиков ограничено, размер ячейки не может быть слишком малым, иначе слишком большим будет число ячеек. Разделим область на семь подобластей пропорционально расстоянию. Для того чтобы избежать линейной зависимости вектора-строки матрицы D , в симметричных областях генерируем ячейки разного размера. Результат деления на ячейки для 1/4 области с числом ячеек 58 показан на рис. 1. Точками обозначены положения 13 датчиков. Вначале вычисляем $E_1, E_2, \bar{\rho}$ и \bar{O} при симметричном и случайном распределении датчиков (табл. 1). В соответствии с их значениями выбираем $\omega_1 = 0.8, \omega_2 = 0.2, \omega_3 = 15, k_1 = 0.1, k_2 = 0.9$ и принимаем алгоритм оптимизации частиц для получения оптимальной оценочной функции E и оптимального расположения датчиков. Оптимальное расположение достигается при наименьших значениях E_1 и E_2 и наибольших $\bar{\rho}$ и \bar{O} . На рис. 2 приведены

Таблица 1

Сравнение коэффициентов для разных распределений

Распределение датчиков	Ранг	E_1	E_2	\bar{O}	$\bar{\rho}$	Относительная ошибка, %
Симметричное	11	56.6824	$3.6734 \cdot 10^{16}$	0.1778	3.1569	7.89
Случайное	13	58.9	887.7	0.1902	3.3725	7.41
Оптимальное	13	50.8442	10.196	0.2537	3.3725	5.51

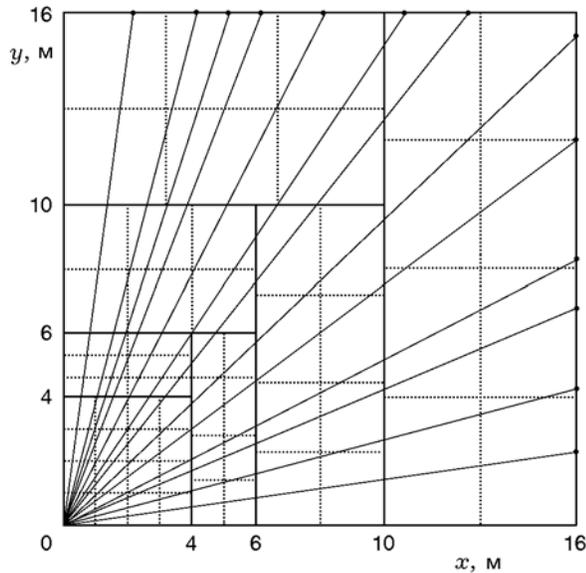


Рис. 1. Разделение на ячейки:
 точки — датчики, в точке 0 — взрывчатое вещество

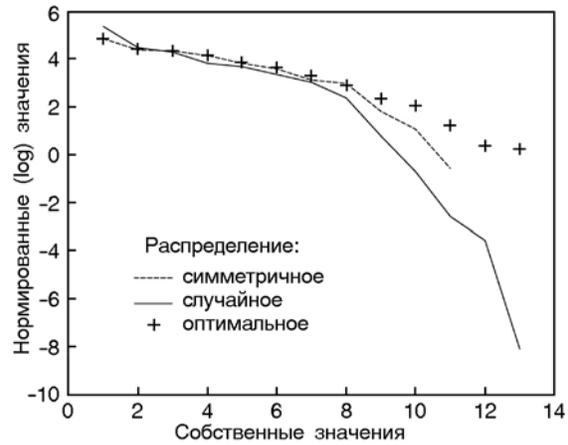


Рис. 2. Нормированные спектры собственных значений

спектры нормализованных собственных значений для каждого случая; видно, что оптимизированная модель дает наилучшие результаты. Численное моделирование по одной и той же исходной модели и с одними и теми же параметрами показало, что при оптимальном распределении датчиков получаются наименьшие ошибки при решении обратной задачи.

Был проведен взрыв в воздухе насыпного заряда ТНТ массой 50 кг, плотностью 0.80 г/см^3 . Взрывчатое вещество располагалось в центре тестируемой области. Для восстановления поля избыточного давления размером $32 \times 32 \text{ м}$ достаточно не более 50 датчиков. На основании вышеописанного метода тестируемая область была разделена на 7 больших подобластей и 28 асимметричных малых подобластей. Общее число ячеек составило 232 (рис. 3). Для определения оптимального расположения датчиков был применен алгоритм оптимизации

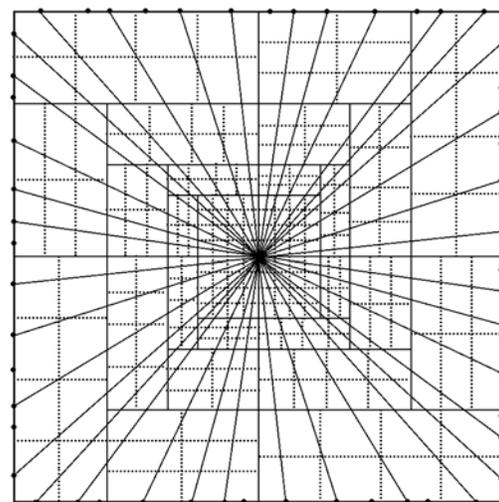


Рис. 3. Взрывчатое вещество (в центре) и расположение датчиков (точки)

частиц. Для обращения скорости ударной волны использовали взвешенный обобщенный метод инверсии, пиковые значения избыточного давления определяли по уравнению (2).

Пиковые избыточные давления можно вычислить также по приведенным ниже эмпири-

Таблица 2

Результаты, полученные методом восстановления, расчета по эмпирическому уравнению и в эксперименте

Расстояние от заряда, м	p_m , МПа			Расхождение результатов, %	
	эмпирическое уравнение	эксперимент	метод восстановления	восстановления и эксперимента	эмпирических и экспериментального
1.5	6.0377	5.341	5.8680	9.87	13.04
4	0.8533	1.1080	1.0708	3.36	22.99
8	0.1643	0.2781	0.2690	3.27	40.92
10	0.1026	0.1920	0.1885	1.82	46.56
12	0.0715	0.1355	0.1310	3.32	47.23
14	0.0536	0.1070	0.1022	4.49	49.91
16	0.0422	0.0820	0.0845	3.05	48.54

ческим формулам.

В Китае для оборонных конструкторских расчетов [15] пиковое избыточное давление в ударной волне в произвольном воздушном поле определяется по формуле Садовского

$$p_m = 0.084 \frac{\sqrt[3]{W}}{r} + 0.27 \left(\frac{\sqrt[3]{W}}{r} \right)^2 + 0.7 \left(\frac{\sqrt[3]{W}}{r} \right)^3$$

$$(1 \leq \bar{r} \leq 10 \div 15), \quad (8)$$

где W — масса тротила, кг; r — расстояние от взрывчатого вещества до точки тестирования, м; $\bar{r} = r/\sqrt[3]{W}$ — приведенное расстояние, м/кг^{1/3}. В работе [5] предложена формула

$$p_m = \frac{0.61938}{\bar{r}} - \frac{0.0326}{\bar{r}^2} + \frac{0.21324}{\bar{r}^3}$$

$$(0.5 \leq \bar{r} \leq 1), \quad (9)$$

в работе [16] — формула

$$p_m = \frac{2.006}{\bar{r}} + \frac{0.194}{\bar{r}^2} - \frac{0.004}{\bar{r}^3}$$

$$(0.05 \leq \bar{r} \leq 0.50), \quad (10)$$

$$p_m = \frac{0.067}{\bar{r}} + \frac{0.301}{\bar{r}^2} + \frac{0.431}{\bar{r}^3}$$

$$(0.50 \leq \bar{r} \leq 70.9). \quad (11)$$

В формулах (8)–(11) давление выражено в мегапаскалях. Результаты восстановления пикового избыточного давления, данные экспериментов и результаты, полученные по эмпирическим формулам (9)–(11), приведены в

табл. 2. В ближней области до 4 м расхождение результатов восстановления и экспериментов наибольшее — около 10 %. Это объясняется тем, что в ближней области слишком много факторов, уменьшающих точность результатов экспериментов, и мало точек измерения. Вне этой области результаты восстановления близки к экспериментальным и относительная ошибка не превышает 5 %, что значительно лучше, чем дают эмпирические формулы.

Двумерная картина восстановления показана на рис. 4. В области расстояний до 5 м затухание и распределение избыточного давления ударной волны очевидны и распределение соответствует форме заряда ВВ. Вне этой области распределение давления не очевидно, по-

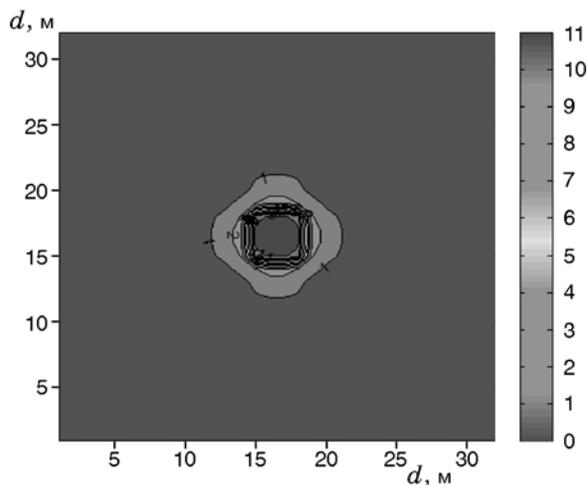


Рис. 4. Результат восстановления пикового избыточного давления

скольку значителен масштаб затухания волны.

ВЫВОДЫ

С учетом ограничений эмпирической формулы для избыточного давления проведена оптимизация расположения датчиков тестируемой системы, представлена обобщенная теория восстановления для описания распределения избыточного давления. В определенной области результаты восстановления близки к измеренным в экспериментах и превосходят результаты, рассчитанные по эмпирической формуле. В ближней области расхождение результатов, полученных методом восстановления и экспериментально, значительно, поскольку здесь расположено мало датчиков, некоторые из них не срабатывают либо дают неточные показания. При увеличении числа используемых датчиков следует ожидать улучшения результатов.

Авторы благодарят рецензентов и редакторов за ценные замечания и искреннюю помощь, что помогло существенно улучшить статью. Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект № 611711179).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wang Hai-Yan, Cao Tao, Zhou Xin-Quan.** Research and application of attenuation law about gas explosion shock wave in coal mine // J. China Coal Soc. — 2009. — V. 34, N 6. — P. 778–782.
2. **Baker W. E.** Explosions in Air. — Beijing: Atomic Energy Press, 1982.
3. **Wu C., Hao H.** Modeling of simultaneous ground shock and air blast pressure on nearby structures from surface explosions // Intern. J. Impact Eng. — 2005. — V. 31, N 6. — P. 699–717.
4. **Brode H. L.** Blast wave from a spherical charge // Phys. Fluids. — 1959. — V. 2. — P. 217–219.
5. **Henrych J.** The Dynamics of Explosion and Its Use. — Beijing: Science Press, 1979.
6. **Hui Shourong, Zhao Hengyang.** Explosion Mechanics. — Beijing: National defence of Industry Press, 2005.
7. **Curtis A.** Optimal design of focused experiments and surveys // Geophys. J. Intern. — 1999. — V. 139. — P. 205–215.
8. **Vesnaver A. L.** Null space reduction in the linearized tomographic inversion // Full Field Inversion Methods in Ocean and Seismo-Acoustics / O. Diachok et al. (Eds). — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1995.
9. **Wéber Z.** Optimizing model parameterization in 2D linearized seismic traveltime tomography // Phys. Earth and Planetary Interiors. — 2001. — V. 124. — P. 33–43.
10. **Zavala P. A. G., De Roeck W., Janssens K., Arruda J. R. F., Sas P., Desmet W.** Generalized inverse beamforming with optimized regularization strategy // Mech. Systems and Signal Proces. — 2011. — V. 25, N 3. — P. 928–939.
11. **Zafarani H., Hassani B., Ansari A.** Estimation of earthquake parameters in the Alborz seismic zone, Iran using generalized inversion method // Soil Dyn. and Earthquake Eng. — 2012. — V. 42. — P. 197–218.
12. **Tasic M. B., Stanimirovic P. S., Pepic S. H.** About the generalized LM-inverse and the weighted Moore — Penrose inverse // Appl. Math. and Comput. — 2010. — V. 216, N 1. — P. 114–124.
13. **Sheng Xingping, Chen Guoliang.** The generalized weighted Moore — Penrose inverse // J. Appl. Math. Comput. — 2007. — V. 25, N 2. — P. 407–413.
14. **Berryman J. G.** Fermat's principle and nonlinear travel time tomography // Phys. Rev. Lett. — 1989. — V. 62, N 25. — P. 2953–2956.
15. **Zhang Shouzhong.** The Basic Principle of Explosive. — Beijing: National Defence of Industry Press, 1988.
16. **Li Yiqi.** Mechanics of Explosion. — Beijing: Science Press, 1992.

*Поступила в редакцию 10/IV 2014 г.,
в окончательном варианте — 26/XI 2014 г.*