

РЕЛАКСАЦИЯ ДАВЛЕНИЯ В ПОЛОСТИ, ОКРУЖЕННОЙ ПОРИСТОЙ И ПРОНИЦАЕМОЙ ГОРНОЙ ПОРОДОЙ

В. Ш. Шагапов, Г. Я. Хусаинова, И. Г. Хусаинов, Р. М. Хафизов

Стерлитамакский государственный педагогический институт, 453118 Стерлитамак, tsur1@mail.ru

Рассмотрена задача о взрыве в полости, окруженной пористой средой. В рамках плоскооднородной, радиальной и сферической постановок получены интегральные уравнения, описывающие релаксацию давления в полости из-за фильтрации газа в окружающее пористое пространство. Анализ результатов численного решения этих уравнений показывает, что характерное время релаксации давления в полости слабо зависит от его начального значения.

Ключевые слова: релаксация давления, взрыв в полости, пористая среда, фильтрация продуктов взрыва, очистка призабойной зоны.

ВВЕДЕНИЕ

При долгой эксплуатации газонефтяных скважин происходит засорение призабойной зоны пласта за счет отложения твердой фазы (например, парафина, асфальто-смолистых веществ), что приводит к снижению дебита скважин. К числу наиболее эффективных способов очистки призабойных зон относятся технологии с использованием энергии взрыва. Высокотемпературные продукты взрыва, проникая достаточно глубоко в пористые породы, могут расплавлять отложения тяжелых углеводородных систем, что увеличивает эффективность процессов очищения пористых систем.

Кроме того, информация, полученная при релаксации давления взрыва за счет фильтрации продуктов взрыва в окружающую пористую среду, может быть использована для контроля коллекторских характеристик прискважинной зоны. В частности, по темпу релаксации давления в скважине можно судить о пористости, проницаемости и трещиноватости пласта. Необходимые оценки для технологических расчетов можно получить на основе решений плоскооднородной, радиальной и сферической задач. В частности, в радиальной постановке можно проанализировать фильтрацию в пористой среде вокруг скважины, а решение плоскооднородной задачи дает возможность проследить эти процессы в трещинах.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть в исходном состоянии ($t < 0$) давление газа во всем пористом пласте вокруг полости постоянно и равно p_0 , а сама полость (тре-

щина, цилиндрическая или сферическая области) заполнена взрывчатым веществом. В момент времени $t = 0$ происходит взрыв и полость заполняется продуктами взрыва, давление в ней мгновенно достигает значения p_e . Далее за счет фильтрации продуктов взрыва давление в полости будет снижаться до значения p_0 .

При описании этих процессов пористый скелет будем считать несжимаемым и однородным, а коэффициент вязкости газа не зависящим от температуры и давления. В рамках вышеизложенных допущений запишем уравнение сохранения массы газа в полости, нелинейное уравнение пьезопроводности и закон Дарси [1] для фильтрации газа в пористой и проницаемой породе вокруг этой полости в следующем виде:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{n+1}{a} \rho v \Big|_{r=a}; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} = \frac{k}{\mu m} \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n p^{(1)} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} \right), \quad (1.2)$$

$$v^{(1)} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r}, \quad a < r < \infty,$$

Здесь a — радиус полости; m, k — коэффициенты пористости и проницаемости; ρ, μ — плотность и вязкость газа; $p^{(1)}, v^{(1)}$ — давление и скорость вокруг полости; индексы $n = 0, 1$ и 2 соответствуют плоскооднородной, радиально-симметричной и сферической задачам.

Для данного процесса начальное и граничное условия для уравнения (1.2) можно записать в виде

$$p^{(1)} = p_0 \quad (t = 0, \quad r > a);$$

$$p^{(1)} = p(t), \quad v^{(1)} = v \quad (t > 0, \quad r = a). \quad (1.3)$$

Аналитическое решение нелинейного уравнения пьезопроводности общего вида для фильтрации газа (1.2) при условиях (1.3) не найдено, поэтому в дальнейшем это уравнение будем использовать в линеаризованном приближении:

$$\frac{\partial(p^{(1)})^j}{\partial t} = \chi \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial(p^{(1)})^j}{\partial r} \right), \quad (1.4)$$

$$\chi = \frac{kp_0}{\mu m},$$

где χ — коэффициент пьезопроводности, значения показателя степени $j = 1$ и 2 соответствуют обычной линеаризации и линеаризации по Лейбензону [2].

Связь текущих плотности и давления в полости примем в виде

$$\frac{p}{p_e} = \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^\gamma, \quad (1.5)$$

где γ — показатель политропы, p_e, ρ_e — давление и плотность в полости после взрыва.

2. ПЛОСКООДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ($n = 0, r = x$)

Применяя принцип Дюгамеля, решение уравнения (1.4), удовлетворяющего условиям (1.3), можно записать [3] в виде

$$(p^{(1)})^j = \int_0^t \frac{\partial U(x-a, t-t')}{\partial t} ((p(t'))^j - p_0^j) dt', \quad (2.1)$$

$$U(x-a, t-t') = 1 - \Phi \left(\frac{x-a}{2\sqrt{\chi(t-t')}} \right),$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \exp(-\xi^2) d\xi.$$

Используя это решение, на основе (1.1) получим интегральное уравнение, описывающее эволюцию давления внутри полости:

$$\ln \frac{p}{p_e} = -\frac{k\gamma}{a\mu\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{p(t') - p_0}{\sqrt{t-t'}} dt', \quad j = 1, \quad (2.2)$$

$$p = p_e - \frac{k\gamma}{2a\mu\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{(p(t'))^2 - p_0^2}{\sqrt{t-t'}} dt', \quad j = 2.$$

Для дальнейшего анализа эти уравнения удобно представить в безразмерной форме:

$$\ln \frac{P}{P_e} = -\frac{\gamma m}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{P(\tau') - 1}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau', \quad j = 1, \quad (2.3)$$

$$P = P_e - \frac{1}{2} \frac{\gamma m}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{(P(\tau'))^2 - 1}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau', \quad j = 2,$$

где

$$P = \frac{p}{p_0}, \quad t = \tau t_*, \quad t' = \tau' t_*, \quad (2.4)$$

$$t_* = \frac{a^2}{\chi} = \frac{a^2 \mu m}{k p_0}, \quad P_e = \frac{p_e}{p_0}.$$

Уравнения (2.3) можно преобразовать, введя вместо безразмерного времени τ новую безразмерную переменную $\tilde{\tau}$:

$$\tau = \frac{\pi}{\gamma^2 m^2} \tilde{\tau}. \quad (2.5)$$

При этом $\tilde{\tau}$ связана с размерным временем t следующим образом:

$$t = \tilde{t}_* \tilde{\tau}, \quad \tilde{t}_* = \frac{\pi t_*}{\gamma^2 m^2} = \frac{\pi a^2 \mu}{\gamma^2 m k p_0}. \quad (2.6)$$

Тогда уравнения (2.3) примут вид

$$\ln \frac{P}{P_e} = -\int_0^{\tilde{\tau}} \frac{P(\tilde{\tau}') - 1}{\sqrt{\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'}} d\tilde{\tau}', \quad j = 1, \quad (2.7)$$

$$P = P_e - \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{\tau}} \frac{(P(\tilde{\tau}'))^2 - 1}{\sqrt{\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'}} d\tilde{\tau}', \quad j = 2.$$

Из (2.7) следует, что переменная $\tilde{\tau}$ является автомодельной, а решение этого уравнения зависит лишь от безразмерного начального давления P_e в полости.

На рис. 1 представлены результаты численного решения уравнений (2.7). Здесь и далее численные результаты получены на основе метода, изложенного в [4]. **Использованный**

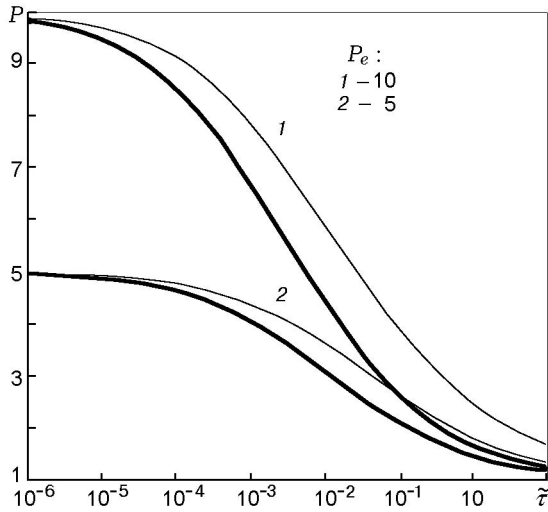


Рис. 1. Релаксация безразмерного давления при различных его начальных значениях в плоскоодномерной задаче:

толстые линии соответствуют обычной линейаризации ($j = 1$), тонкие — линейаризации по Лейбензону ($j = 2$)

алгоритм расчета тестировался на точных решениях уравнения Абеля. На этом рисунке и других толстые линии соответствуют обычной линейаризации ($j = 1$), тонкие линии — линейаризации по Лейбензону ($j = 2$). Как следует из рис. 1, при описании процесса фильтрации с помощью линейаризованного по Лейбензону уравнения темп релаксации давления в полости занижается. Времена снижения давления до определенного промежуточного значения P ($1 < P < P_e$), полученные по этим двум схемам учета фильтрации газа, различаются менее чем в три раза. Кроме того, из представленных графиков видно, что начальное давление в полости слабо влияет на значение характерного безразмерного времени релаксации давления в полости (значение $\tilde{\tau} \approx 10$ получено по обычным линейаризованным уравнениям). Следовательно, в случае полости с плоскопараллельными стенками характерное время $t = 10t_*$ ($t_* = \pi a^2 \mu / \gamma^2 m k p_0$) фактически определяет (по порядку величин) время полной релаксации давления.

3. РАДИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ($n = 1$)

В случае $n = 1$ решение (1.4) при условиях (1.3) можно записать в виде (2.1). При этом

$$U(r, t - t') = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\chi u^2(t-t')}{a^2}\right) \times \frac{J_0(ur/a)Y_0(u) - J_0(u)Y_0(ur/a)}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} \frac{du}{u}. \quad (3.1)$$

Воспользовавшись (3.1) и учитывая (1.1), получим уравнение, описывающее эволюцию давления в цилиндрической полости:

$$\ln \frac{p}{p_e} = -\frac{k\gamma}{a^2\mu} \int_0^t \varphi\left(\frac{\chi(t-t')}{a^2}\right) (p(t') - p_0) dt', \quad j = 1, \quad (3.2)$$

$$p = p_e - \frac{k\gamma}{2a^2\mu} \int_0^t \varphi\left(\frac{\chi(t-t')}{a^2}\right) ((p(t'))^2 - p_0^2) dt', \quad j = 2,$$

$$\varphi(S) = \frac{8}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp(-Su^2)}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} \frac{du}{u},$$

где $J_0(u)$ и $Y_0(u)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка.

Для ядра $\varphi(S)$ интегральных уравнений (3.2) имеют место [5] следующие асимптотические разложения:

$$\varphi(S) = \frac{2}{\sqrt{\pi S}} + 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} + \frac{1}{4} S \dots, \quad S \ll 1, \quad (3.3)$$

$$\varphi(S) = \frac{4}{\ln(4S) - 2\Gamma} - \frac{4\Gamma}{[\ln(4S) - 2\Gamma]^2} - \dots, \quad S \gg 1,$$

$$\Gamma = 0,57722\dots,$$

где Γ — постоянная Эйлера.

В безразмерных переменных, введенных аналогично п. 2, уравнения (3.2) принимают вид

$$\ln \frac{P}{P_e} = -\frac{\gamma m}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \varphi(\tau - \tau') (P(\tau') - 1) d\tau', \quad j = 1, \quad (3.4)$$

$$P = P_e - \frac{\gamma m}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \varphi(\tau - \tau') ((P(\tau'))^2 - 1) d\tau', \quad j = 2.$$

В этом случае выбором новой переменной $\tilde{\tau}$ для безразмерного времени в уравнениях (3.4) не удается «спрятать» множитель $\gamma m / \sqrt{\pi}$ и, следовательно, задача в отличие от плоскоодномерного случая не является автомодельной.

По первой формуле (3.3), оставляя только первое слагаемое, получим уравнение для релаксации давления на начальном этапе, когда характерная глубина зон фильтрации вблизи стенок полости не превышает радиуса полости. Принимая для безразмерного времени автомодельную переменную из (2.5) для начального этапа релаксации давления, имеем

$$\ln \frac{P}{P_e} = -2 \int_0^{\tilde{\tau}} \frac{P(\tilde{\tau}') - 1}{\sqrt{\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'}} d\tilde{\tau}', \quad j = 1, \quad (3.5)$$

$$P = P_e - \int_0^{\tilde{\tau}} \frac{(P(\tilde{\tau}'))^2 - 1}{\sqrt{\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'}} d\tilde{\tau}', \quad j = 2.$$

Эти уравнения отличаются от (2.7) в два раза бóльшим значением коэффициента в правой части. Следовательно, в цилиндрической полости интенсивность релаксации давления будет выше. Это объясняется тем, что в данном случае ее удельная поверхность, через которую происходит фильтрация газа, больше, чем для полости с плоскопараллельными стенками. Кроме того, из вида (2.7) (в это уравнение γ и m явно не входят) также следует, что начальная стадия процесса релаксации давления автомодельна.

На рис. 2 приведены график функции $\varphi(S)$, полученный численно [5], и зависимости, рассчитанные по асимптотическим формулам. Видно, что наилучшую аппроксимацию при $0 < S < 10$ дает асимптотическое разложение $\varphi(S)$ при малых значениях S ($S \ll 1$), когда оставлено два первых слагаемых. Поэтому в дальнейших численных расчетах по интегральным уравнениям (3.4) для $\varphi(S)$ использовано это двухчленное приближение.

Рис. 3,а иллюстрирует влияние пористости m на решения (3.4) (при $m = 0,1$ и $0,4$). На начальной стадии процесса ($\tilde{\tau} < 10^{-3}$) все линии близки. Кривые несколько различаются в промежутке $10^{-4} \leq \tilde{\tau} \leq 1$. При дальнейшем росте безразмерного времени ($\tilde{\tau} \geq 1$) все линии опять сливаются. Отсюда также следует, что характерное безразмерное время релаксации находится в пределах $0,2 < \tilde{\tau} < 1$. Кроме

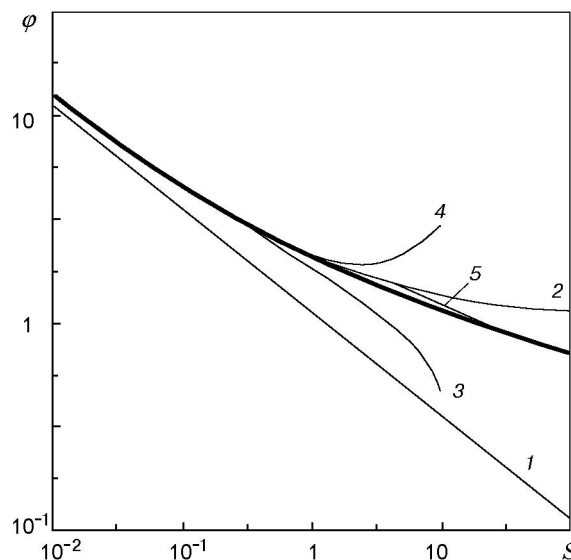


Рис. 2. График ядра интегрального уравнения (толстая линия), полученный численно, а также зависимости, рассчитанные по асимптотическим формулам (тонкие линии):

цифры 1–4 соответствуют количеству (начиная с первого) слагаемых, используемых в первой формуле (3.3), 5 — расчет по второй формуле (3.3)

того, видно, что чем меньше пористость, тем быстрее (при меньших значениях безразмерного времени $\tilde{\tau}$) происходит релаксация давления в полости. Как следует из рисунка, при изменении пористости с $m = 0,1$ до $m = 0,4$ время релаксации возрастает примерно в три-четыре раза. Но в связи с тем, что характерное время из (2.7) обратно пропорционально пористости, размерное время релаксации очень слабо зависит от значения m .

На рис. 3,б показана эволюция давления при $m = 0,1$ для различных значений безразмерного давления ($P_e = 10$ и 5). Видно, что начальное значение давления в полости слабо влияет на время релаксации давления.

4. СФЕРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ($n = 2$)

Аналогично предыдущим случаям для распределения давления в пористой среде вокруг полости решение уравнения (1.4) также можно записать в виде (2.1), при этом

$$U(r, t - t') = \frac{a}{r} \left(1 - \Phi \left(\frac{r - a}{2\sqrt{\chi(t - t')}} \right) \right), \quad (4.1)$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha \exp(-\xi^2) d\xi.$$

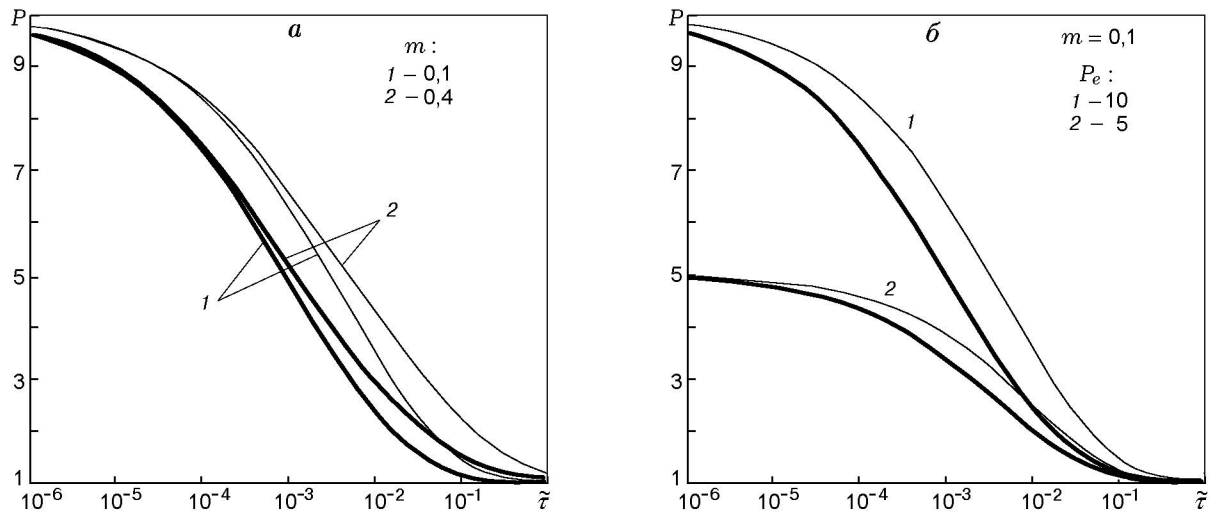


Рис. 3. Релаксация безразмерного давления в цилиндрической полости при различных значениях коэффициента пористости (а) и различных начальных значениях давления (б): толстые линии соответствуют обычной линейризации ($j = 1$), тонкие — линейризации по Лейбензону ($j = 2$)

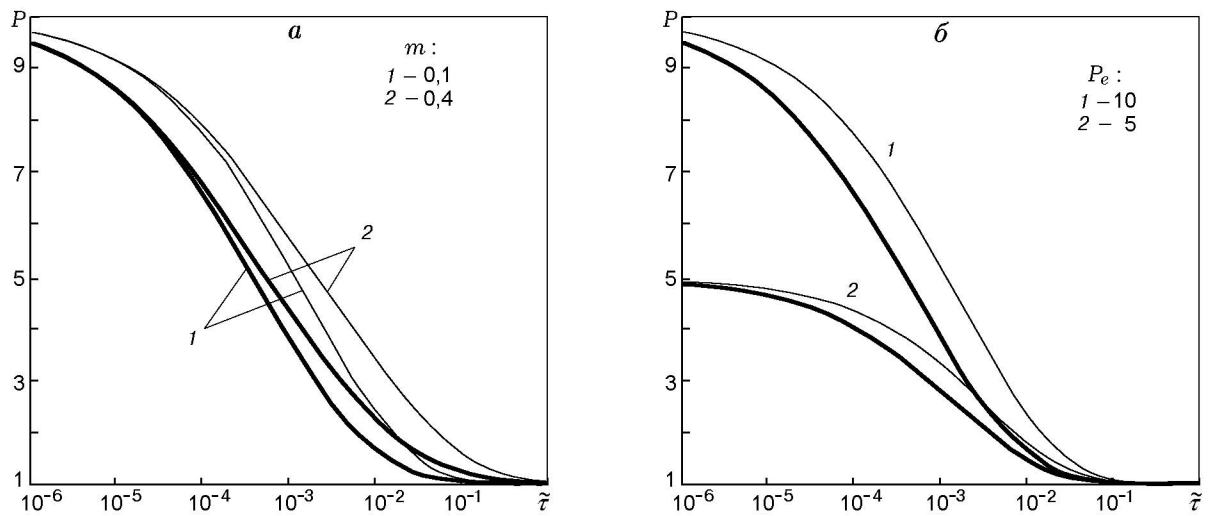


Рис. 4. Релаксация безразмерного давления в сферической полости при различных значениях коэффициента пористости (а) и различных начальных значениях давления (б): толстые линии соответствуют обычной линейризации ($j = 1$), тонкие — линейризации по Лейбензону ($j = 2$)

Используя это решение, на основе (1.1) получим

$$\ln \frac{p}{p_e} = -\frac{3k\gamma}{\mu a} \int_0^t \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{\pi\chi(t-t')}} \right) \times \times (p(t') - p_0) dt', \quad j = 1, \quad (4.2)$$

$$p = p_e - \frac{3k\gamma}{2\mu a} \int_0^t \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{\pi\chi(t-t')}} \right) \times$$

$$\times \left((p(t'))^2 - p_0^2 \right) dt', \quad j = 2.$$

В безразмерных переменных уравнения (4.2) сводятся к виду

$$\ln \frac{P}{P_e} = -3 \int_0^{\tilde{\tau}} \left(\frac{\pi}{\gamma m} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'}} \right) \times \times \left(P(\tilde{\tau}') - 1 \right) d\tilde{\tau}', \quad j = 1, \quad (4.3)$$

$$P = P_e - \frac{3}{2} \int_0^{\tilde{\tau}} \left(\frac{\pi}{\gamma m} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'}} \right) (P(\tilde{\tau}')^2 - 1) d\tilde{\tau}',$$

$$j = 2.$$

Для начального этапа процесса ($\sqrt{\tilde{\tau}} \ll \gamma m / \pi$) из (4.3) получим уравнения

$$\ln \frac{P}{P_e} = -3 \int_0^{\tilde{\tau}} \frac{P(\tilde{\tau}') - 1}{\sqrt{\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'}} d\tilde{\tau}', \quad j = 1, \quad (4.4)$$

$$P = P_e - \frac{3}{2} \int_0^{\tilde{\tau}} \frac{(P(\tilde{\tau}'))^2 - 1}{\sqrt{\tilde{\tau} - \tilde{\tau}'}} d\tilde{\tau}', \quad j = 2.$$

Для достаточно больших времен ($\sqrt{\tilde{\tau}} \gg \gamma m / \pi$), когда реализуется квазистационарный режим, пренебрегая в ядрах уравнений (4.3) вторым слагаемым по сравнению с первым, получим следующие решения для релаксации давления:

$$\frac{P - 1}{P} = \frac{P_e - 1}{P_e} \exp\left(-\frac{3\pi}{\gamma m} \tilde{\tau}\right), \quad j = 1, \quad (4.5)$$

$$\frac{P - 1}{P + 1} = \frac{P_e - 1}{P_e + 1} \exp\left(-\frac{3\pi}{\gamma m} \tilde{\tau}\right), \quad j = 2.$$

В размерных переменных они записываются в виде

$$\frac{p - p_0}{p} = \frac{p_e - p_0}{p_e} \exp\left(-\frac{3kp_0 t}{a^2 \mu}\right), \quad j = 1, \quad (4.6)$$

$$\frac{p - p_0}{p + p_0} = \frac{p_e - p_0}{p_e + p_0} \exp\left(-\frac{3kp_0 t}{a^2 \mu}\right), \quad j = 2.$$

В случае сильного взрыва ($P_e \gg 1$) из решений (4.5) для достаточно больших времен, когда $P - 1 \ll 1$, имеем

$$P - 1 = P \exp\left(-\frac{3\pi}{\gamma m} \tilde{\tau}\right), \quad j = 1,$$

$$P - 1 = 2(P + 1) \exp\left(-\frac{3\pi}{\gamma m} \tilde{\tau}\right), \quad j = 2.$$

Рис. 4,а иллюстрирует влияние пористости m на решения (4.3) (при $m = 0,1$ и $0,4$). На начальной стадии процесса ($\tilde{\tau} < 10^{-4}$) все

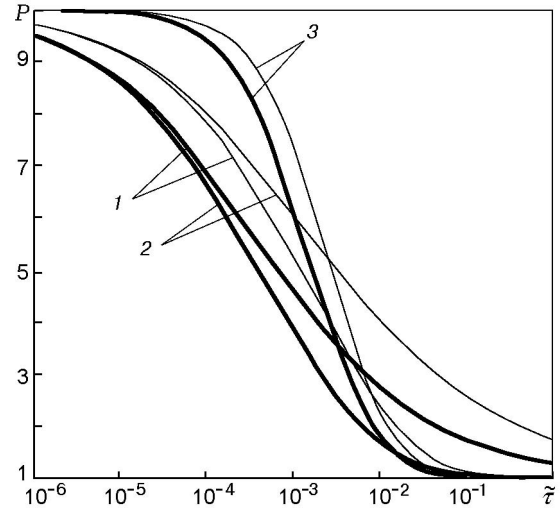


Рис. 5. Релаксация безразмерного давления в сферической полости, рассчитанная по полному уравнению (линии 1), уравнению для начального этапа (линии 2) и по квазистационарному решению (линии 3):

толстые линии соответствуют обычной линейризации ($j = 1$), тонкие — линейризации по Лейбензону ($j = 2$)

линии совпадают. На рис. 4,б показано влияние начального безразмерного давления в полости ($P_e = 10$ и 5) на последующий процесс релаксации давления в полости. В связи с тем, что для сферической полости удельная поверхность фильтрации выше, чем для цилиндрической полости и полости с плоскопараллельными стенками, релаксация давления в этом случае идет быстрее, чем для процессов с плоскокоординатной и радиальной геометрией.

На рис. 5 представлены численные решения уравнений (4.3) и (4.4) при $\gamma = 1,3$, $m = 0,1$, а также квазистационарное решение (4.5). На начальном этапе ($\tilde{\tau} \leq 10^{-4}$) результаты расчетов по соотношениям (4.4) и (4.3) очень близки. Кроме того, хотя на начальном этапе квазистационарное решение сильно отличается от решения общего уравнения, однако это квазистационарное решение неплохо согласуется с решением (4.3) на последующем этапе релаксации давления ($P \rightarrow 1$). Следовательно, основной этап полной релаксации давления в сферической полости происходит в квазистационарном режиме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из приведенных результатов численных

расчетов следует, что начальное давление в полости слабо влияет на характерное время релаксации давления в случае плоскоодномерной, радиальной и сферической задач. Кроме того, с переходом задачи с плоской симметрией ($n = 0$) к радиальной и сферической задачам ослабевает зависимость характерного размерного времени релаксации давления от пористости. Времена релаксации давления при учете процессов фильтрации газа в пористой среде, рассчитанные по обычным линеаризованным уравнениям и по линеаризованным по Лейбензону уравнениям, различаются не более чем в три раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М.** Подземная гидродинамика. М.: Недра, 1993.
2. **Лейбензон Л.** Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: Гостехиздат, 1947.
3. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнение математической физики. М.: Наука, 1972.
4. **Brunner H., Crisci M. R., Pusso E., Vecchio A.** A family of methods for Abel integral equations of the second kind // J. Comput. Math. 1991. V. 34, N 2. P. 211–219.
5. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 29/V 2001 г.
