

УДК 532.59

РОЛЬ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ФОРМИРОВАНИИ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О. Ю. Цвелодуб

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: tsveld@itp.nsc.ru

На примере двух нестационарных сил исследовано влияние внешних воздействий, приводящих к появлению дополнительных пондеромоторных сил, на волновые режимы течения пленки, свободно стекающей по вертикальной поверхности. В первом случае на пленку ферромагнитной жидкости действует магнитное поле, во втором на пленку диэлектрической жидкости действует электрическое поле. Для указанных сил в случае малых расходов задача сведена к решению одного модельного уравнения для возмущения толщины пленки. Получены численные решения уравнения, рассмотрено несколько характерных сценариев эволюции периодических возмущений. Показано, что изменение границ области линейной устойчивости невозмущенного течения с плоской свободной границей под действием пондеромоторных сил оказывает существенное влияние на течение.

Ключевые слова: стекающая пленка, модельное уравнение, волновые режимы, влияние внешних сил.

DOI: 10.15372/PMTF20160603

Введение. Исследования течений тонких пленок жидкости в поле силы тяжести проводятся уже более 50 лет. Интерес к изучению таких течений вызван их широким использованием в различных технологических процессах. Стекающие пленки, имеющие большую площадь поверхности и малое гидродинамическое сопротивление, применяются в качестве рабочего тела в тепло- и массообменных аппаратах химической и пищевой промышленности, в теплообменниках и конденсаторах энергетических установок и т. п.

В то же время интерес к исследованию пленочных течений обусловлен тем, что для таких течений с границами раздела (в частности, со свободной поверхностью) характерно наличие различного рода линейных (в том числе длинноволновых) неустойчивостей, в результате чего формируются разнообразные нелинейные волновые структуры. Использование различных методов, в том числе метода малых параметров, позволяет получать упрощенные модели, которые являются универсальными, так как могут быть использованы и в других областях физики.

Постановка задачи. Известно, что нелинейные волновые режимы свободно стекающей пленки обусловлены развитием линейной неустойчивости исходного плоскопараллельного течения пленки с постоянной толщиной. Различные внешние воздействия часто

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-22-00174).

приводят к появлению дополнительных пондеромоторных сил, оказывающих влияние на устойчивость течения. В данной работе показано влияние двух нестационарных сил на волновые режимы течения пленки. В первом случае рассматривается тонкая пленка вязкой ферромагнитной жидкости, стекающая по вертикальному цилиндрическому проводнику радиусом R в поле силы тяжести. Толщина пленки мала по сравнению с радиусом проводника. По проводнику течет меняющийся со временем ток $I_0 F(t)$ ($F(t)$ — некоторая произвольная достаточно гладкая функция времени). Во втором случае рассматриваются волны на поверхности пленки вязкой диэлектрической жидкости, стекающей по внутренней поверхности одной из обкладок плоского конденсатора. На обкладки подается переменная во времени разность потенциалов $V(t) = V_0 F(t)$.

В длинноволновом приближении в случае малых расходов для двумерных возмущений указанные выше задачи сводятся к исследованию одного уравнения, описывающего эволюцию возмущений толщины пленки [1–3]. После ряда преобразований это уравнение приводится к виду [3]

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + [1 - CF^2(\tau)] \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

Здесь H — трансформированное отклонение толщины пленки от значения, соответствующего невозмущенному состоянию; C — коэффициент, определяемый физическими характеристиками задачи (см. [1–3]). Значение C может быть как положительным (случай пленки ферромагнитной жидкости [1, 3]), так и отрицательным (случай пленки диэлектрической жидкости [2]). Течение пленки происходит в направлении оси x , параллельной направлению силы тяжести. Уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся относительно стенки со скоростью, равной скорости бесконечно малых нейтральных возмущений (см. [1, 2]).

В работах [1, 2] рассматривались некоторые решения уравнения (1), полученные для случая, когда функция F является периодической.

При $F = \text{const}$ уравнение (1) переходит в известное уравнение Курамото — Сивашинского. Из результатов линейного анализа устойчивости тривиального решения $H \equiv 0$ уравнения Курамото — Сивашинского к возмущениям вида $H \sim \exp(i\alpha(x - c\tau)) + \text{к.с.}$ (к.с. — комплексно-сопряженная величина) следует, что оно неустойчиво, если значения волнового числа α удовлетворяют условию $\alpha < \alpha_n$ (α_n — нейтральное волновое число). Коротковолновые возмущения, наоборот, со временем экспоненциально затухают.

В данной работе рассматривается случай, когда F представляет собой ступенчатую функцию:

$$F(\tau) = 0,5(1 + \text{th}(\beta(\tau - \tau_0))). \quad (2)$$

Использование зависимости $F(\tau)$ в форме (2) позволяет проанализировать стабилизирующее и дестабилизирующее влияние магнитного и электрического полей соответственно на рассматриваемое пленочное течение. Для моментов времени, существенно отличающихся от τ_0 , функция $F(\tau)$ практически постоянна: при $\tau \ll \tau_0$ она равна нулю, а при $\tau \gg \tau_0$ — единице. Для этих моментов времени уравнение (1) фактически представляет собой уравнение Курамото — Сивашинского. При этом для значений $F(\tau) = 0$ областью неустойчивости волновых чисел является интервал $0 \div 1$, а для значений $F(\tau) = 1$ — интервал $0 \div (1 - C)^{1/2}$. Таким образом, появление магнитной пондеромоторной силы приводит к сужению области неустойчивости, а в результате действия электрической пондеромоторной силы область неустойчивости расширяется.

Для задачи (1), (2) рассматривались пространственные периодические возмущения. Одним из основных факторов, влияющих на их эволюцию, является изменение со временем границы области линейной неустойчивости. Например, если сначала значение волнового

числа находилось в области неустойчивости, но при этом было близко к нейтральному волновому числу, то со временем оно может стать устойчивым (при $C > 0$). Это приведет к прекращению роста данного возмущения и к его последующему затуханию. При $C < 0$, наоборот, возмущения, сначала являющиеся затухающими, могут стать неустойчивыми, в результате чего произойдет переход к режиму стационарно бегущих волн.

Метод решения. Для нахождения нелинейных периодических решений уравнение (1) решалось численно. Решение представлялось в виде пространственного ряда Фурье, гармоники H_n которого являются функциями времени:

$$H(x, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(\tau) e^{in\alpha x}. \quad (3)$$

Подставляя этот ряд в (1), получаем бесконечную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для гармоник $H_n(\tau)$. Обрывая ряд, т. е. полагая, что все гармоники с индексами $|n| > N$ равны нулю, получаем конечномерное приближение этой системы. Число гармоник выбиралось таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{|H_N|}{\max_n |H_n|} < 10^{-5}.$$

Для этого в расчетах при различных значениях α достаточно выбрать число N в интервале $5 \div 15$.

Система решалась численно методом Рунге — Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования и контролируемой погрешностью.

Даже уравнение Курамото — Сивашинского (случай $C = 0$) имеет большое количество семейств решений в виде стационарно бегущих волн. Известно, что при значении волнового числа $\alpha = \alpha_n$ (нейтральное волновое число) от тривиального решения ответвляется первое семейство периодических решений уравнения Курамото — Сивашинского, которые существуют при значениях волнового числа $\alpha \geq 0,4979\alpha_n$. В [4] показано, каким образом происходят бифуркации, в результате которых появляются все более сложные семейства решений в виде стационарно бегущих волн.

В [3] для зависимости $F(\tau)$ в форме (2) для случая пленки ферромагнитной жидкости ($C > 0$) изучалась эволюция пространственного периодического сигнала, содержащего в начальный момент времени до 10 ненулевых гармоник. Значение первой (основной) гармоники менялось в диапазоне $0,05 \div 1,00$. Получено большое количество различных сценариев развития этих возмущений.

В данной работе исследуется эволюция только тех решений уравнения (1), которые в случае $C = 0$ приближались к решениям первого семейства в виде стационарно бегущих волн. Кроме того, во всех рассмотренных ниже примерах в начальный момент времени ненулевые значения задавались только для первой (рис. 1) или первой и второй (рис. 2–4) гармоник.

Результаты расчетов. Для всех представленных ниже примеров расчетов на рис. 1–4 приведена зависимость модулей первых двух гармоник от времени (кривые 1, 2 соответственно), момент времени начала действия полей $\tau_0 = 100$.

В случае существования одного семейства решений (семейства I) при $C = 0$ значения волнового числа находятся в диапазоне $0,554 < \alpha < 1,000$. Решения указанного семейства антисимметричны, а скорость волн в данной системе отсчета равна нулю (см., например, [4]). В данном интервале все начальные возмущения эволюционируют к соответствующему решению семейства I (см. рис. 1). Наличие магнитного поля ($C > 0$) приводит к тому, что значение волнового числа $\alpha = 0,9$ оказывается ближе к границе области устойчивости. Решение так же приближается к стационарному решению первого семейства, но установившиеся значения модулей гармоник уменьшаются (см. рис. 1, *a*).

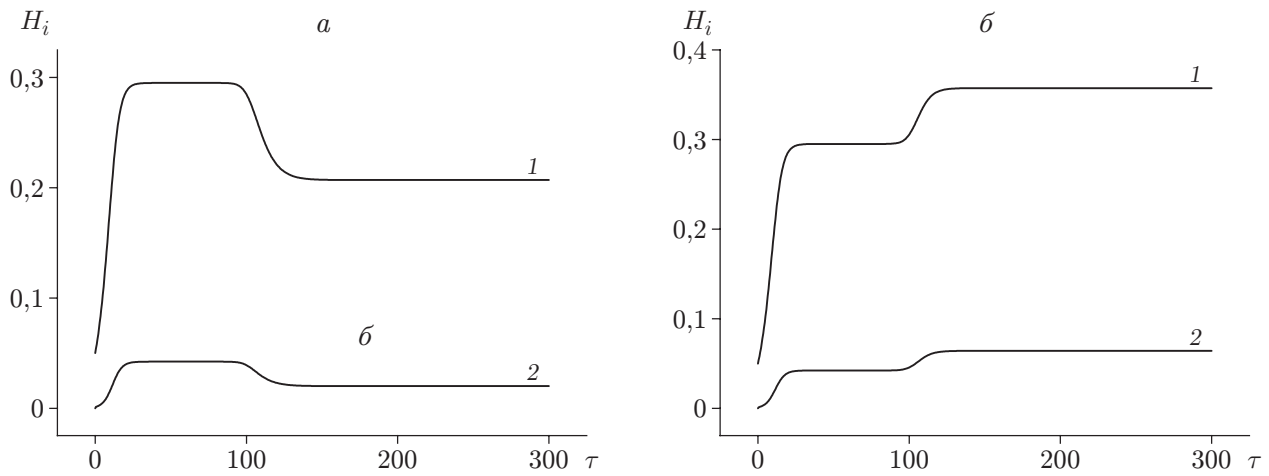


Рис. 1. Зависимости модулей первой H_1 (1) и второй H_2 (2) фурье-гармоник от времени при $\alpha = 0,9$, $|H_1(0)| = 0,05$:
 а — $C = 0,1$ (магнитное поле), б — $C = -0,1$ (электрическое поле)

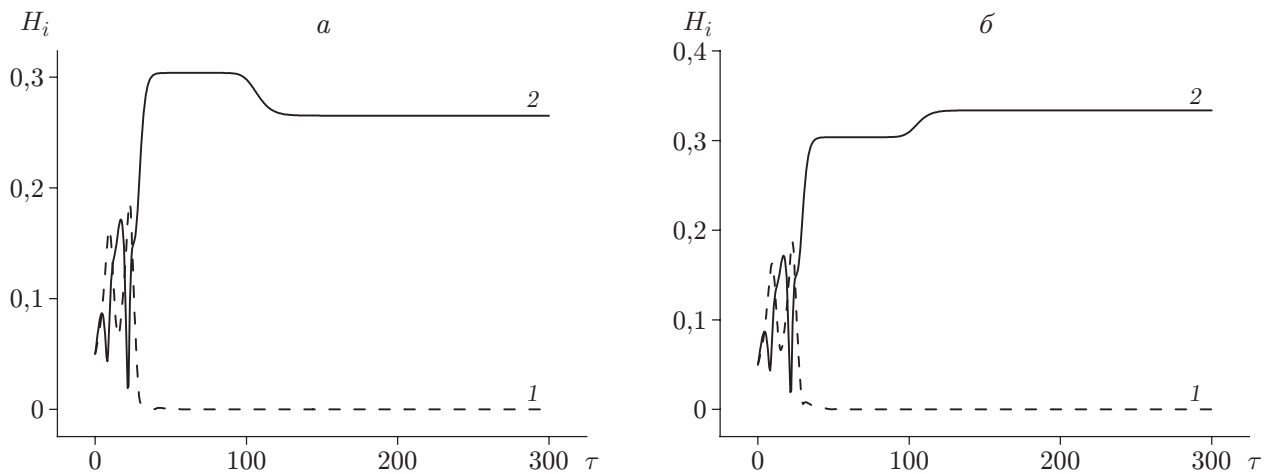


Рис. 2. Зависимости модулей первой H_1 (1) и второй H_2 (2) фурье-гармоник от времени при $\alpha = 0,4$, $|H_1(0)| = 0,05$, $|H_2(0)| = 0,05$:
 а — $C = 0,1$ (магнитное поле), б — $C = -0,1$ (электрическое поле)

В случае наличия электрического поля ($C < 0$) значение волнового числа оказывается дальше от границы области устойчивости и амплитуда стационарного решения первого семейства увеличивается (см. рис. 1,б).

При $\alpha < \alpha_n/2$ возможен сценарий, при котором в процессе эволюции вторая гармоника со временем становится преобладающей по сравнению с первой. При этом все нечетные гармоники с увеличением τ стремятся к нулю и решение приближается к стационарному решению с удвоенным волновым числом, равным 2α (см. рис. 2).

Если при $0 < \tau < 15$ профиль волны не является синусоидальным, то после установления течения ($\tau > 15$) волна вырождается практически в чисто синусоидальную с длиной волны, равной половине первоначальной (в этом случае все нечетные гармоники стремятся к нулю). Как и в примере, показанном на рис. 1, появление магнитного (см. рис. 2,а) и электрического (см. рис. 2,б) полей приводит соответственно к уменьшению и увеличению амплитуды предельной волны. Решение эволюционирует к решению из первого семейства, т. е. приближается к стационарному с удвоенным волновым числом 2α .

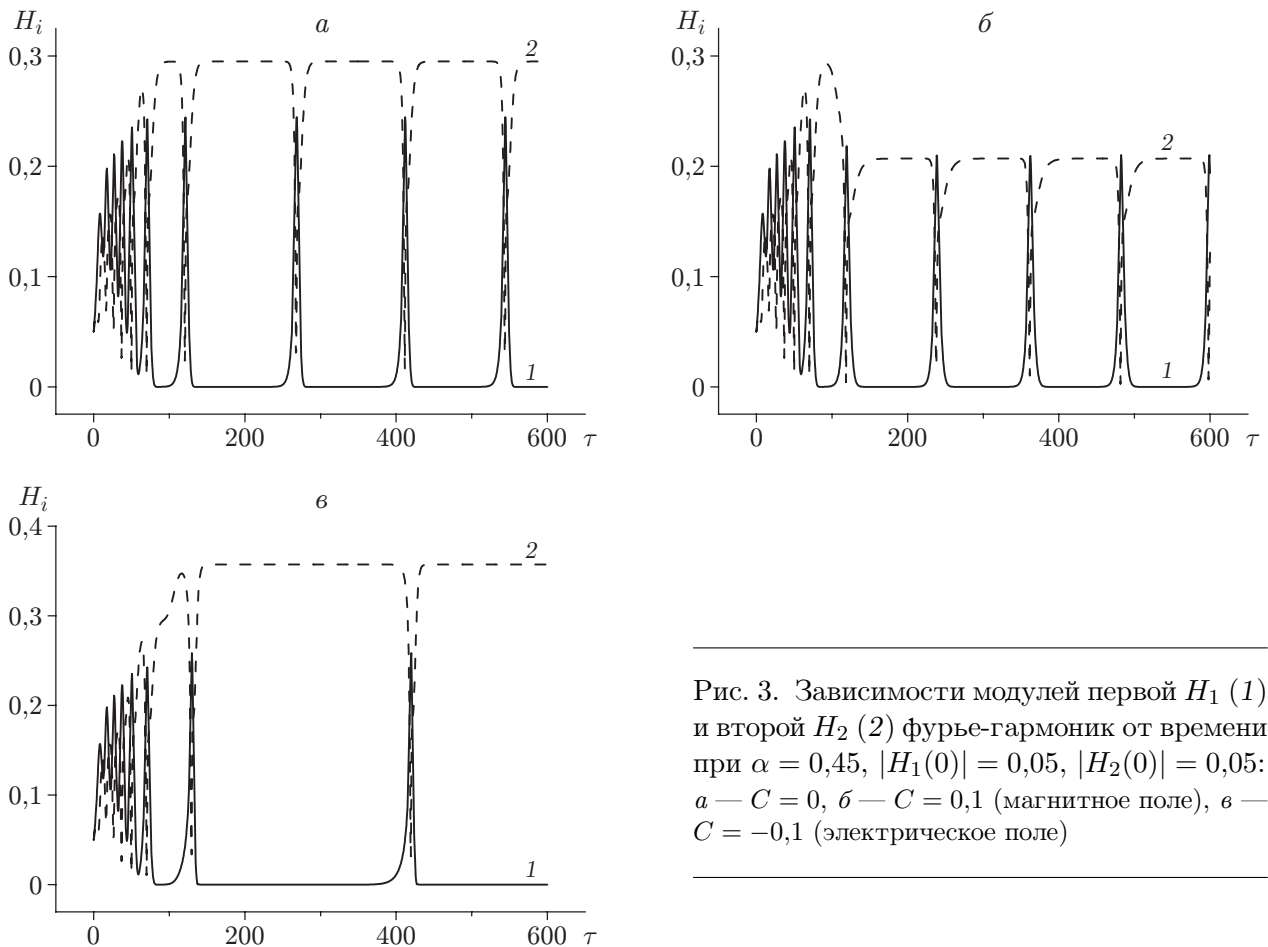


Рис. 3. Зависимости модулей первой H_1 (1) и второй H_2 (2) фурье-гармоник от времени при $\alpha = 0,45$, $|H_1(0)| = 0,05$, $|H_2(0)| = 0,05$: a — $C = 0$, $б$ — $C = 0,1$ (магнитное поле), $в$ — $C = -0,1$ (электрическое поле)

На рис. 3,а представлено решение, для которого значение волнового числа $\alpha > 0,4$. В данном случае поля отсутствуют, волновое число равно $\alpha = 0,45$. Следует отметить, что в этом случае в процессе эволюции возмущения имеет место “волновая перемежаемость”: сначала решение приближается к стационарному решению из семейства I с волновым числом $2\alpha = 0,9$, затем в течение малого промежутка времени происходит перестройка решения, в ходе которой первая гармоника вновь становится преобладающей, а волновое число решения вновь равно $\alpha = 0,45$. Затем решение приближается к стационарному с $2\alpha = 0,9$. Этот процесс повторяется регулярно, но не строго периодически, о чем свидетельствуют интервалы времени, в течение которого амплитуды гармоник остаются неизменными (см. рис. 3,а). Более подробное описание данного режима приведено в работе [5].

На рис. 3,б показано поведение решения при наличии магнитного поля. Видно, что характер эволюции решения не меняется. Как и в случае, представленном на рис. 3,а, для данного решения имеет место “волновая перемежаемость”, при этом время существования решения в окрестности стационарного решения, принадлежащего семейству I , изменилось и, естественно, уменьшились амплитуды гармоник, так как волновое число полученного решения находится ближе к границе области устойчивости, чем в случае отсутствия поля.

Дестабилизирующее воздействие электрического поля при $\alpha = 0,45$ также не привело к изменению характера эволюции (см. рис. 3,в): “волновая перемежаемость” не исчезает и решение регулярно приближается к стационарному решению с волновым числом $2\alpha = 0,9$. При этом время существования решения в окрестности стационарного решения, принадле-

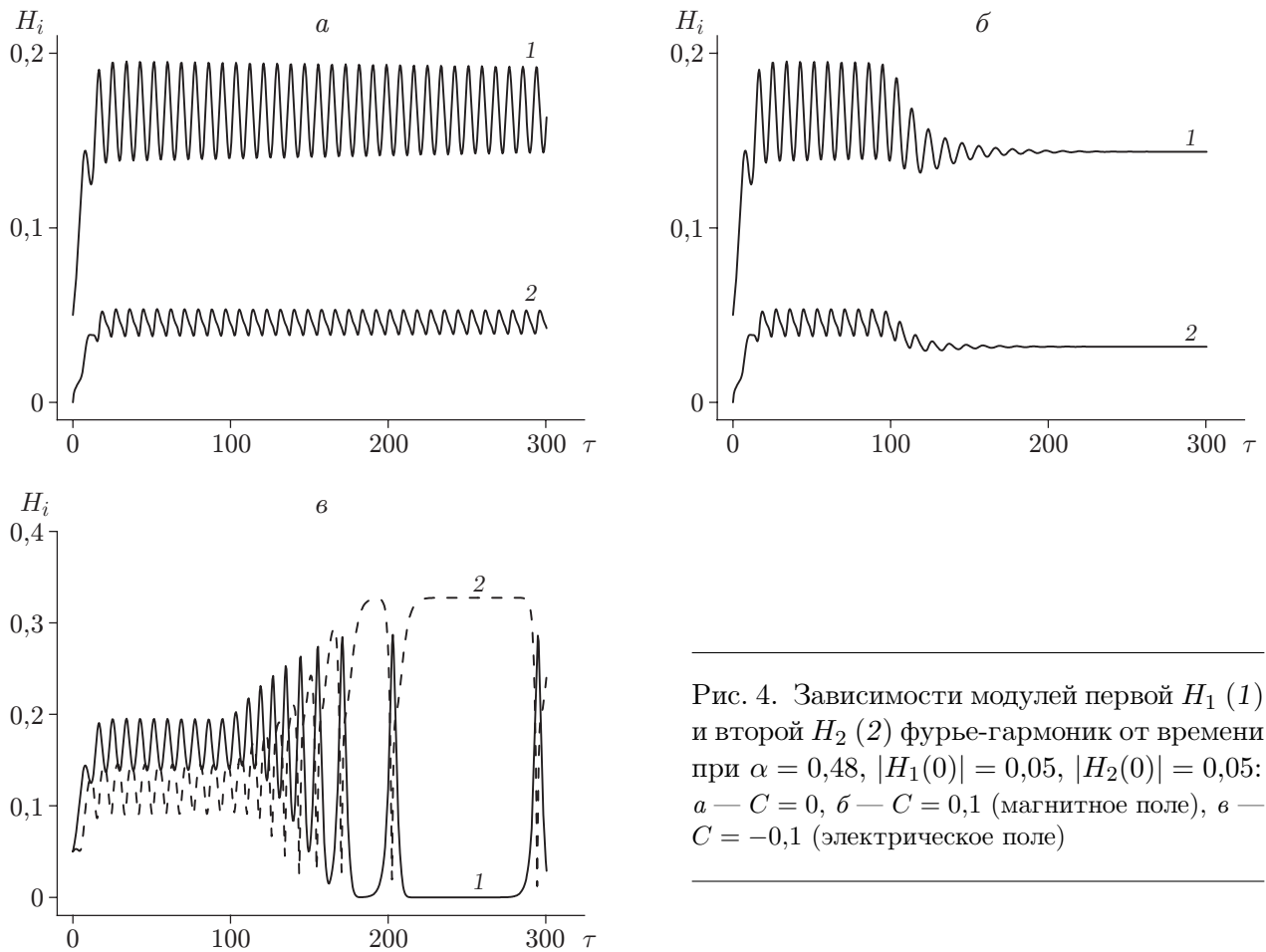


Рис. 4. Зависимости модулей первой H_1 (1) и второй H_2 (2) фурье-гармоник от времени при $\alpha = 0,48$, $|H_1(0)| = 0,05$, $|H_2(0)| = 0,05$: $a - C = 0$, $б - C = 0,1$ (магнитное поле), $в - C = -0,1$ (электрическое поле)

жащего семейству I , изменяется, амплитуды гармоник увеличиваются, так как волновое число находится дальше от области устойчивости по сравнению со случаем $C = 0$.

Во всех представленных выше примерах пондеромоторные силы не оказывают существенного влияния на характер эволюции, но при наличии магнитного поля имеет место стабилизация возмущений, амплитуды которых уменьшаются, наличие электрического поля оказывает дестабилизирующее воздействие, что проявляется в увеличении амплитуд возмущений.

Однако в области неустойчивости имеются зоны, для которых наличие пондеромоторных сил приводит к существенному изменению сценария развития возмущений. В одной из таких зон волновые числа незначительно меньше значения $\alpha = 0,5$ (см. рис. 4). Для решений, представленных на рис. 4, волновое число равно $\alpha = 0,48$. Начальные значения гармоник те же, что и на рис. 3.

На рис. 4,а поля отсутствуют, в процессе эволюции решение выходит не на стационарный режим, а на периодически осциллирующий во времени режим с доминирующей первой гармоникой.

На рис. 4,б показано поведение решения при наличии магнитного поля. После завершения переходного процесса решение приближается к стационарному решению с тем же волновым числом.

Дестабилизирующее воздействие электрического поля при $\alpha = 0,48$ (см. рис. 4,в) приводит к проявлению “волновой перемежаемости”: решение регулярно приближается к стационарному решению с волновым числом $2\alpha = 0,96$.

Заключение. На примере двух нестационарных сил показано, что на волновые режимы течения свободно стекающей пленки существенное влияние могут оказывать внешние воздействия, приводящие к появлению пондеромоторных сил. Установлено, что под действием пондеромоторных сил меняются границы области линейной устойчивости невозмущенного течения с плоской свободной границей. Приведены результаты численных расчетов, показывающие это влияние.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саматов С. Н., Цвелодуб О. Ю.** Волновые режимы на пленке вязкой ферромагнитной жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 76–84.
2. **Цвелодуб О. Ю., Саматов С. Н.** Влияние электрического поля на волновые режимы течения тонкой пленки вязкой диэлектрической жидкости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 3. С. 73–83.
3. **Tsvlodub O. Yu., Rohlf s W., Kneer R.** Modeling of wave modes on a vertical film of a viscous ferromagnetic fluid flowing down a cylindrical electric conductor // Phys. Fluids. 2013. V. 25, N 9. 092101.
4. **Tsvlodub O. Y., Trifonov Y. Y.** On steady-state traveling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. V. 36, N 3. P. 255–269.
5. **Цвелодуб О. Ю.** Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 2. С. 183–192.

*Поступила в редакцию 20/V 2015 г.,
в окончательном варианте — 11/VIII 2015 г.*
