УДК 532.51

ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ НА ПЛЕНКЕ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

О. Ю. Цвелодуб, В. Ю. Шушеначев

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Рассматривается течение тонкой пленки нелинейно-вязкой жидкости, тензор напряжения которой моделируется степенным законом, стекающей по вертикальной стенке в поле тяжести. Для случая малых расходов в длинноволновом приближении получено уравнение, описывающее эволюцию возмущений поверхности. Найдена область линейной устойчивости тривиального решения, аналитически получены слабонелинейные стационарно-бегущие решения данного уравнения. Показано, как происходит ветвление семейств решений в особой точке нейтральной кривой.

Ключевые слова: реологическая жидкость, степенной закон, стекающая пленка, эволюционное уравнение.

1. Постановка задачи. Течения тонких пленок жидкости в поле тяжести привлекают внимание исследователей уже более полувека. Этот интерес вызван, в частности, широким использованием таких течений в различных технологических процессах.

В данной работе рассматривается течение пленки неньютоновской жидкости по вертикальной стенке в поле тяжести. В качестве реологического соотношения используется одна из наиболее известных моделей нелинейно-вязких жидкостей — модель степенной жидкости. Как известно, она достаточно хорошо описывает жидкости как с псевдопластическими, так и с дилатантными свойствами. Основной целью работы является получение модельного уравнения, позволяющего исследовать волновые режимы течения таких реологических пленок.

Рассмотрим течение тонкой пленки нелинейно-вязкой жидкости по вертикальной плоскости в поле тяжести. Схема течения и принятая система координат показаны на рис. 1.

Система уравнений Навье — Стокса и неразрывности, описывающая движение такой пленки, имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g} + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{Div}\,\tau, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости; $\mathrm{Div}\,\tau$ — дивергенция тензора напряжений. Реология жидкости моделируется степенным законом, инвариантная форма которого имеет вид [1]

$$\tau_{ik} = 2\mu_n(2D_{kl}D_{kl})^{(n-1)/2}D_{ik}, \qquad D_{ik} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\Big].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00183) и Сибирского отделения РАН (интеграционная программа № 4.2-04).

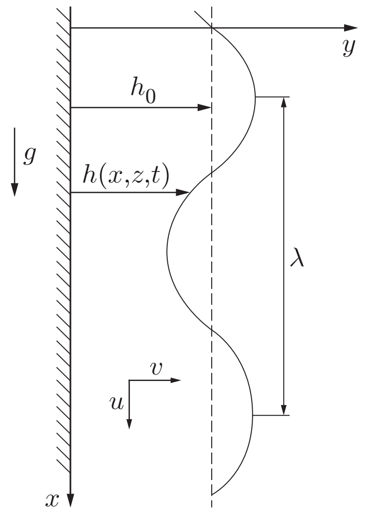

Рис. 1. Схема течения

Здесь τ_{ik} — тензор напряжений; D_{ik} — тензор скоростей деформаций. Постоянная μ_n — показатель консистенции жидкости, параметр n характеризует степень неньютоновского поведения.

Чем больше n отличается от единицы, тем отчетливее проявляется аномалия вязкости в такой среде [2]. Значениям $0 < n < 1$ отвечают псевдопластические жидкости, кажущаяся вязкость которых убывает с ростом скоростей сдвига, а значениям $n > 1$ — дилатантные жидкости, у которых кажущаяся вязкость с ростом скоростей сдвига увеличивается.

При любых расходах жидкости задача (1) допускает решения с плоской свободной поверхностью $h(x, z, t) = h_0$, удовлетворяющие условиям прилипания на твердой стенке и отсутствию касательных напряжений на свободной границе. В этом случае профиль скорости течения имеет вид

$$U(y) = U_0\Big[1 - \Big(1 - \frac{y}{h_0}\Big)^{(n+1)/n}\Big], \qquad U_0 = \frac{n}{n+1}\Big(\frac{\rho g}{\mu_n}\Big)^{1/n} h_0^{(n+1)/n}. \tag{2}$$

Однако даже при малых расходах течение (2) вследствие неустойчивости может стать волновым. Для описания таких режимов запишем уравнения движения в безразмерном виде. Пусть L — характерный продольный размер возмущения. Тогда, используя L/U_0, U_0, $\rho g h_0$ как масштабы времени, скорости и давления, а L и h_0 — масштабы в направлениях x, z и y соответственно, запишем уравнения движения для пленки в виде (знаки обезразмеривания опускаем):

$$\begin{gathered}
\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon w\,\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}\Big(1 - \varepsilon\,\frac{\partial p}{\partial x}\Big) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\varepsilon\,\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\Big),\\
\varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon w\,\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\mathrm{Fr}}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\varepsilon\,\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \varepsilon\,\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\Big),\\
\varepsilon\,\frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon w\,\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{\mathrm{Fr}}\,\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\varepsilon\,\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \varepsilon\,\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\Big),\\
\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon\,\frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Динамические граничные условия на твердой ($y = 0$) и свободной ($y = h(x, z, t)$) границах имеют вид

$$u = v = w = 0, \qquad y = 0,$$

$$(p-p_0-\mathrm{We}\,(K_1+K_2))n_i-(\mathrm{Fr}\,/\,\mathrm{Re})\tau_{ik}n_k=0, \qquad y=h(x,z,t). \tag{4}$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль осей x, y и z соответственно; p — давление в жидкости; p_0 — внешнее давление (без ограничения общности в дальнейшем его можно полагать равным нулю); n_i — компоненты вектора нормали:

$$\boldsymbol{n}=(-\varepsilon h_x,1,-\varepsilon h_z)/\sqrt{1+\varepsilon^2h_x^2+\varepsilon^2h_z^2};$$

K_i — безразмерные главные кривизны свободной поверхности:

$$K_1+K_2=\frac{(1+\varepsilon^2h_x^2)\varepsilon h_{zz}-2\varepsilon^3h_xh_zh_{xz}+(1+\varepsilon^2h_z^2)\varepsilon h_{xx}}{(1+\varepsilon^2h_x^2+\varepsilon^2h_z^2)^{3/2}}$$

(здесь и ниже индексы у h означают дифференцирование по соответствующей переменной); τ_{ik} — компоненты тензора напряжений:

$$\tau_{xx}=2I^{(n-1)/2}\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \tau_{yy}=2I^{(n-1)/2}\,\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau_{zz}=2I^{(n-1)/2}\varepsilon\,\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=I^{(n-1)/2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\Big), \qquad \tau_{xz}=\tau_{zx}=I^{(n-1)/2}\varepsilon\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big), \tag{5}$$
$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=I^{(n-1)/2}\Big(\varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big),$$

где I — второй инвариант тензора скоростей деформаций:

$$I=2\Big[\varepsilon^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2+\varepsilon^2\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2\Big]+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2+\varepsilon^2\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\Big(\varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2.$$

В (3)–(5) в качестве параметров входят: $\varepsilon=h_0/L$, число Рейнольдса $\mathrm{Re}=\rho\,h_0^n/(\mu_nU_0^{n-2})$, число Фруда $\mathrm{Fr}=U_0^2/(g\,h_0)$, число Вебера $\mathrm{We}=\sigma/(\rho g h_0^2)$.

На свободной границе выполняется также кинематическое условие

$$\varepsilon\Big(\frac{\partial h}{\partial t}+u\,\frac{\partial h}{\partial x}+w\,\frac{\partial h}{\partial z}\Big)=v, \qquad y=h(x,z,t). \tag{6}$$

Используя (2), нетрудно показать, что при произведенном выборе характерных масштабов справедливо соотношение

$$\mathrm{Re}=((n+1)/n)^n\,\mathrm{Fr}\,.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением длинноволновых возмущений, полагая, что $\varepsilon\ll1$ и числа Рейнольдса достаточно малы — $\mathrm{Re}\approx1$.

Для применения метода многих масштабов (см. [3]) введем набор быстрых и медленных времен и новые функции:

$$\begin{gathered}\tau_m=\varepsilon^m t, \qquad m=0,1,2,\ldots,\\ u=U+\varepsilon u', \qquad v=\varepsilon^2v', \qquad w=\varepsilon^2w', \qquad p=p_0+\varepsilon p', \qquad h=1+\varepsilon h'.\end{gathered} \tag{7}$$

Пренебрегая членами порядка ε^2 и выше и перенося граничные условия со свободной поверхности на ее невозмущенный уровень (т. е. разлагая все функции по степеням $\varepsilon h'$), приходим к системе (штрихи у возмущенных величин опускаем):

$$\varepsilon\Big(\frac{\partial u}{\partial\tau_0}+U\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{dU}{dy}+\frac{1}{\mathrm{Fr}}\,\frac{\partial p}{\partial x}\Big)=$$
$$=\frac{n}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1}\Big)+(n-1)\,\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\Big[n\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-2}\Big),$$

$$\frac{1}{\mathrm{Fr}}\,\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big(\Big[n\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)\Big]\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1} + 2\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1}\Big)\Big), \qquad (8)$$

$$\varepsilon\Big(\frac{\partial w}{\partial \tau_0} + U\,\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Fr}}\,\frac{\partial p}{\partial z}\Big) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1}\Big) + (n-1)\,\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{dU}{dy}\Big)^{n-2}\Big);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

со следующими граничными условиями:

$$u = v = w = 0, \qquad y = 0,$$

$$0 = \Big(nu_y\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1} - \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n h\Big) + \varepsilon\Big(nh\,\frac{\partial}{\partial y}\Big[u_y\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1}\Big] + {}$$
$$+ (n-1)\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-2}\Big[n\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]\Big), \qquad y = 1,$$

$$\varepsilon\Big(p + \varepsilon\,\frac{\partial p}{\partial y}\,h - \mathrm{We}\,\varepsilon^2\Delta h\Big) = 2\,\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Re}}\,\varepsilon^2\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad y = 1, \qquad (9)$$

$$0 = \Big(w_y\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1}\Big) + \varepsilon\Big(h\,\frac{\partial}{\partial y}\Big[w_y\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-1}\Big] + (n-1)\Big(\frac{dU}{dy}\Big)^{n-2}\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial y}\Big), \qquad y = 1.$$

В условии (9) $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа. Здесь оставлены члены более высокого порядка по ε, так как для тонких пленок многих жидкостей значения We обычно велики, поэтому полагаем, что $\mathrm{We} \gg 1$, $\mathrm{We}\,\varepsilon^2 \approx 1$.

Кинематическое условие (6) теперь принимает вид

$$v + \varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial y}\,h = h_{\tau_0} + \varepsilon h_{\tau_1} + h_x + \varepsilon u h_x + \varepsilon w h_z, \qquad y = 1. \qquad (10)$$

Решение задачи (8), (9) ищем в виде рядов по ε

$$(u, v, p, h) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m (u^m, v^m, p^m, h^m). \qquad (11)$$

Приравнивая в исходной системе коэффициенты при одинаковых степенях ε к нулю, из уравнений для нулевого порядка нетрудно получить выражения

$$u^0(x, y, z, t) = \frac{n+1}{n}\,(1 - (1-y)^{1/n})h^0,$$
$$v^0(x, y, z, t) = -\frac{n+1}{n}\Big[y + \frac{n}{n+1}\,((1-y)^{(n+1)/n} - 1)\Big]h^0_x, \qquad (12)$$
$$w^0(x, y, z, t) = 0, \qquad p^0\big|_{y=1} = \mathrm{We}\,\varepsilon^2\Delta h^0.$$

Подставляя (12) в (10), получим уравнение, описывающее поведение возмущений в первом приближении, а именно

$$h_{\tau_0} + c_0 h_x = 0, \qquad c_0 = (n+1)/n.$$

Отсюда следует, что в этом приближении все возмущения распространяются с постоянной скоростью, в c_0 раз большей скорости течения на свободной плоской границе, т. е.

$$h = h(\xi), \qquad \xi = x - c_0\tau_0.$$

Рассмотрев очередное приближение, после громоздких, но несложных вычислений получаем выражения для следующих членов рядов (11):

$$u^1(x,y,z,t) = c_0^{1-n}\Big(c_0^n h^1[1-(1-y)^{1/n}] -$$
$$- \frac{\mathrm{Re}}{n}\Big[(1-yz)^{(n+1)/n} - \frac{n}{2(2n+1)}(1-z)^{(2n+2)/n} - \frac{3n+2}{2(2n+2)}\Big]h_x^0 +$$
$$+ \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\frac{\partial p^0}{\partial x}\frac{1}{n+1}[(1-z)^{(n+1)/n}-1] + c_0^n\frac{(h^0)^2}{n}[1-(1-z)^{(1-n)/n}]\Big),$$
$$v^1(x,y,z,t) = -c_0^{1-n}\Big(c_0^n I_1 h_x^1 - \frac{\mathrm{Re}}{n}h_{xx}^0 I_2 + \frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\frac{I_3}{n+1}\frac{\partial^2 p^0}{\partial x^2} + 2c_0^n\frac{I_4}{n} + \frac{n}{n+1}\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\frac{\partial^2 p^0}{\partial y^2}I_3\Big),$$
$$w^1(x,y,z,t) = c_0^{1-n}\frac{n}{n+1}\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\frac{\partial p^0}{\partial y}[(1-y)^{(n+1)/n}-1]. \tag{13}$$

Здесь

$$I_1 = y + \frac{n}{n+1}[(1-y)^{(n+1)/n}-1],$$
$$I_2 = \frac{n}{2n+1}[1-(1-y)^{(2n+1)/n}] - \frac{n^2}{2(2n+1)(3n+2)}[1-(1-y)^{(3n+2)/n}] - \frac{3n+2}{2(2n+1)}y,$$
$$I_3 = \frac{n}{2n+1}[1-(1-y)^{(2n+1)/n}] - y, \qquad I_4 = y + n[(1-y)^{1/n}-1].$$

Подставляя (13) в формулу (10), получаем нелинейное уравнение для определения h

$$h_{\tau_1} + 2\frac{c_0}{n}hh_x + \frac{2(n+1)^2c_0^{1-n}}{n(2n+1)(3n+2)}\mathrm{Re}\,h_{xx} + \frac{c_0^{1-n}}{2n+1}\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Fr}}\mathrm{We}\,\varepsilon^2(\Delta h_{xx} + n\Delta h_{zz}) = 0. \tag{14}$$

Это уравнение описывает эволюцию пространственных возмущений на вертикальной пленке степенной жидкости в системе отсчета, движущейся со скоростью c_0 относительно стенки.

С помощью замен

$$h = aH, \qquad x_1 = bx, \qquad z_1 = bz, \qquad \tau = dt, \tag{15}$$

где

$$a = \frac{4(n+1)^3c_0^{-n}}{(2n+1)(3n+2)}\mathrm{Re}\sqrt{\frac{2\,\mathrm{Fr}}{n(3n+2)\,\mathrm{We}\,\varepsilon^2}},$$
$$b = (n+1)\sqrt{\frac{2\,\mathrm{Fr}}{n(3n+2)\,\mathrm{We}\,\varepsilon^2}}, \qquad d = \frac{4(n+1)^4c_0^{1-n}}{n^2(2n+1)(3n+2)^2}\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Fr}}{\mathrm{We}\,\varepsilon^2},$$

уравнение (14) преобразуется к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)H = 0. \tag{16}$$

Преобразования (15), в частности, означают, что используемый в разложении малый параметр ε равен

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2(n+1)^2}{n(3n+2)c_0^n}\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{We}}} \tag{17}$$

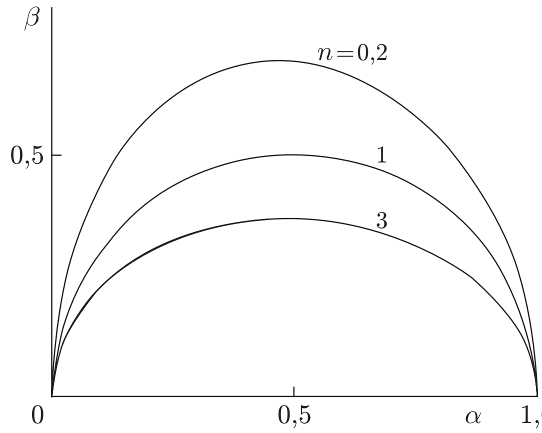

Рис. 2. Нейтральные кривые при различных значениях параметра n

и, соответственно, характерный продольный размер возмущений определяется равенством

$$L = \sqrt{\frac{n(3n+2)c_0^n}{2(n+1)^2} \frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Re}}}\, h_0.$$

Как видно из (17), предположение о длинноволновости рассматриваемых возмущений будет выполняться, как и в случае ньютоновских жидкостей, для больших значений числа Вебера.

Для случая плоских возмущений уравнение (16) совпадает с уравнением, описывающим волны на поверхности пленки ньютоновской жидкости [4]:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0. \tag{18}$$

В настоящее время оно широко известно как уравнение Курамото — Сивашинского (К-С). Уравнение К-С достаточно подробно исследовано, известны многие его решения (см., например, [5, 6]). При $n = 1$ уравнение (16) переходит в уравнение из работы [7], описывающее пространственные волны для ньютоновской жидкости.

Уравнение (16) является типичным примером модельных уравнений, возникающих при исследовании эволюции возмущений в активно-диссипативных средах. Действительно, линейный анализ устойчивости тривиального решения $H = 0$ показывает, что оно неустойчиво относительно возмущений вида $\exp\,[i\alpha(x - c\tau) + i\beta z]$ с компонентами волнового вектора (α, β), лежащими внутри области, ограниченной нейтральной кривой

$$n\beta^4 + (n+1)\alpha^2\beta^2 + \alpha^4 - \alpha^2 = 0. \tag{19}$$

Такие возмущения экспоненциально нарастают (а возмущения с волновыми числами, лежащими вне области, ограниченной кривой (19), затухают). За счет действия нелинейных эффектов дальнейший рост неустойчивых возмущений прекращается, в результате чего могут сформироваться установившиеся стационарно-бегущие режимы. Графики кривых (19) для нескольких n представлены на рис. 2.

2. Аналитические результаты. Очевидно, что уравнение (16) имеет решения, распространяющиеся под углом к направлению течения невозмущенного потока (к оси x). Действительно, с помощью замен

$$\xi_1 = a_1(x + b_1 z), \qquad t_1 = a_1^2\tau, \qquad a_1^4 = 1/((1+b_1^2)(1+nb_1^2)), \qquad H_1 = a_1 H(t_1, \xi_1),$$

уравнение (16) преобразуется в уравнение (18). Отсюда следует, что уравнение (16) имеет решения в виде плоских волн, распространяющихся под углом к оси x, тангенс которого удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg}\psi = b_1$. Таким образом, эти, фактически одномерные, решения получаются простым пересчетом решений уравнения К-С, поэтому в дальнейшем ограничимся исследованием решений уравнения (16), бегущих вдоль потока.

Для стационарно-бегущих решений $H = H(\xi, z)$, $\xi = x - ct$ уравнение (16) переходит в

$$-c\,\frac{\partial H}{\partial \xi} + 4H\,\frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + n\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)H = 0. \tag{20}$$

Будем рассматривать периодические решения уравнения (20) с волновыми числами α, β в ξ- и z-направлениях соответственно.

Так как уравнение (20) инвариантно относительно преобразований

$$H \to H + \mathrm{const}, \qquad c \to c + 4\,\mathrm{const},$$
$$H \to -H, \qquad c \to -c, \qquad \xi \to -\xi,$$

в дальнейшем ограничимся только симметричными по z решениями

$$H(\xi, z) = H(\xi, -z), \tag{21}$$

для которых выполнено следующее условие нормировки:

$$c \geqslant 0, \qquad \int\limits_0^{\lambda_z}\int\limits_0^{\lambda_\xi} H(\xi, z)\,d\xi\,dz = 0, \qquad \lambda_\xi = \frac{2\pi}{\alpha}, \qquad \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta}. \tag{22}$$

На плоскости (α, β) пространственные периодические решения уравнения (20) бесконечно малой амплитуды ответвляются от тривиального решения по кривой (19). Логично предположить, что решения малой, но конечной амплитуды существуют в окрестности этой кривой. Поэтому для волновых чисел из этой окрестности будем искать решение в виде ряда по малому параметру ϵ

$$H = \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2 + \ldots, \qquad c = \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \ldots. \tag{23}$$

Следуя [3], введем набор быстрых и медленных переменных

$$\xi_m = \epsilon^m \xi, \qquad z_m = \epsilon^m z, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда операции дифференцирования в (20) представляются в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \epsilon\,\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \epsilon^2\,\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \ldots,\\
\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2} + 2\epsilon\,\frac{\partial^2}{\partial \xi_0\,\partial \xi_1} + \epsilon^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + 2\,\frac{\partial^2}{\partial \xi_0\,\partial \xi_2}\Big) + \ldots,\\
\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_0} + \epsilon\,\frac{\partial}{\partial z_1} + \epsilon^2\,\frac{\partial}{\partial z_2} + \ldots,\\
\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} + 2\epsilon\,\frac{\partial^2}{\partial z_0\,\partial z_1} + \epsilon^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + 2\,\frac{\partial^2}{\partial z_0\,\partial z_2}\Big) + \ldots,
\end{gathered} \tag{24}$$

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big) = \Big[\frac{\partial^4}{\partial \xi_0^4} + (n+1)\,\frac{\partial^4}{\partial \xi_0^2\,\partial z_0^2} + n\,\frac{\partial^4}{\partial z_0^4}\Big] +$$

$$+\,\epsilon\Big[4\,\frac{\partial^4}{\partial \xi_0^3\,\partial \xi_1} + 4n\,\frac{\partial^4}{\partial z_0^3\,\partial z_1} + (2n+2)\,\frac{\partial^4}{\partial \xi_0^2\,\partial z_0\,\partial z_1} + (2n+2)\,\frac{\partial^4}{\partial z_0^2\,\partial \xi_0\,\partial \xi_1}\Big] +$$

$$
+\epsilon^2\Big[4\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0\,\partial\xi_1}+n\,\frac{\partial^2}{\partial z_0\,\partial z_1}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0\,\partial\xi_1}+\frac{\partial^2}{\partial z_0\,\partial z_1}\Big)+
$$
$$
+\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+n\,\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+2\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_0\,\partial\xi_2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}+2\,\frac{\partial^2}{\partial z_0\,\partial z_2}\Big)+
$$
$$
+\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+2\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_0\,\partial\xi_2}+n\,\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}+2n\,\frac{\partial^2}{\partial z_0\,\partial z_2}\Big)\Big]+\ldots.
$$

Подставляя ряды (23) в (20) и собирая — с учетом (24) — члены при одинаковых степенях ϵ, получаем бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений. Первому порядку в этой системе отвечает уравнение

$$
\frac{\partial^2 H_1}{\partial\xi_0^2}+\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+n\,\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\Big)H_1=0.
$$

Требуя, чтобы решение удовлетворяло условиям (22), получаем

$$
H_1=(A\,\mathrm{e}^{i\alpha\xi_0}+\bar{A}\,\mathrm{e}^{-i\alpha\xi_0})(a\,\mathrm{e}^{i\beta z_0}+\bar{a}\,\mathrm{e}^{-i\beta z_0}), \tag{25}
$$

где A, a — функции медленных координат; черта означает операцию комплексного сопряжения; α, β принадлежат нейтральной кривой (19). Для того чтобы искомое решение удовлетворяло требованию симметрии (21), A должно быть функцией только $\xi_1,\xi_2,\ldots$, а a — зависеть только от $z_1,z_2,\ldots$.

Второму порядку соответствует уравнение

$$
-c_1\,\frac{\partial H_1}{\partial\xi_0}+2\,\frac{\partial H_1^2}{\partial\xi_0}+2\,\frac{\partial^2 H_1}{\partial\xi_0\,\partial\xi_1}+4\Big[\frac{\partial^4 H_1}{\partial^3\xi_0\partial\xi_1}+n\,\frac{\partial^4 H_1}{\partial^3 z_0\,\partial z_1}+\frac{n+1}{2}\,\frac{\partial^4 H_1}{\partial^2\xi_0\,\partial z_0\,\partial z_1}+
$$
$$
+\frac{n+1}{2}\,\frac{\partial^4 H_1}{\partial^2 z_0\,\partial\xi_0\,\partial\xi_1}\Big]+\frac{\partial^2 H_2}{\partial\xi_0^2}+\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}+n\,\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\Big)H_2=0. \tag{26}
$$

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Определение вида A и a из рассмотрения высших приближений позволяет найти связь между поправками к компонентам волнового вектора α и β и значением модуля амплитуды первой гармоники. Но, зная, например, поправку $\Delta\alpha$ к α, можно сказать, что найдено решение вблизи другой точки на нейтральной кривой (19), у которой $\alpha_1=\alpha+\Delta\alpha$. Поэтому можно считать, что в (25) $A=\mathrm{const}$ и включать ее в a. Другими словами, будем искать решения конечной амплитуды, жестко фиксируя значение α-компоненты волнового вектора. Это удается сделать почти всюду за исключением окрестностей некоторых выделенных точек. С учетом этого замечания из условия отсутствия в (26) секулярных членов следуют соотношения

$$
\frac{\partial a}{\partial z_1}=0, \qquad c_1=0,
$$

а решение уравнения (26), удовлетворяющее условиям нормировки (22), имеет вид

$$
H_2=-\frac{i}{3\alpha}\,\mathrm{e}^{i2\alpha\xi_0}(a^2\,\mathrm{e}^{i2\beta z_0}+\bar{a}^2\,\mathrm{e}^{-i2\beta z_0})-\frac{2|a|^2 i}{\alpha(4\alpha^2-1)}\,\mathrm{e}^{i2\alpha\xi_0}+\text{к.с.} \tag{27}
$$

(здесь и ниже к.с. означает операцию комплексного сопряжения).

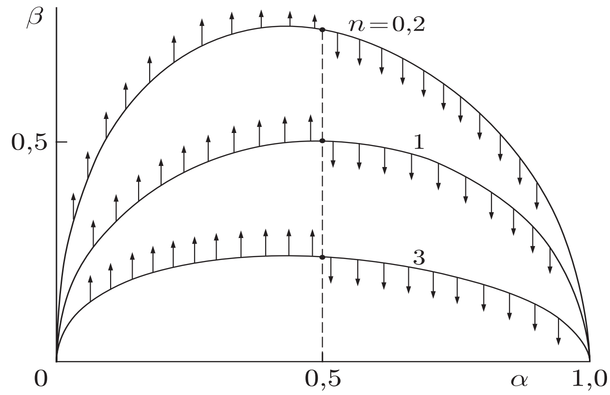

Рис. 3. Характер ветвления

Приближение третьего порядка по ϵ дает уравнение

$$-c_2\,\frac{\partial H_1}{\partial \xi_0}+4\,\frac{\partial H_1 H_2}{\partial \xi_0}+4\Big[n\,\frac{\partial^4 H_1}{\partial^3 z_0\,\partial z_2}+\frac{n+1}{2}\,\frac{\partial^4 H_1}{\partial^2 \xi_0\,\partial z_0\,\partial z_2}\Big]+ \\ +\frac{\partial^2 H_3}{\partial \xi_0^2}+\Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2}+n\,\frac{\partial^2}{\partial z_0^2}\Big)H_3=0. \qquad (28)$$

Выделяя в (28) секулярные члены и приравнивая их к нулю, получим

$$c_2=0, \qquad i\beta(2n\beta^2+(n+1)\alpha^2)\,\frac{\partial a}{\partial z_2}-\frac{2(4\alpha^2+5)}{3(4\alpha^2-1)}\,a|a|^2=0. \qquad (29)$$

Решение уравнения (29) имеет вид $a=a_0\,\mathrm{e}^{i\phi z_2}$.

Из двух последних соотношений следует, что поправка ϕ к компоненте волнового вектора β связана со значением амплитуды a_0 следующим образом:

$$\phi=-\frac{2(4\alpha^2+5)|a_0|^2}{3\alpha^2\beta(4\alpha^2-1)\sqrt{(n-1)^2\alpha^2+4n}}. \qquad (30)$$

Как следует из (25), (27) и (30), в качестве малого параметра ϵ можно использовать само значение модуля амплитуды a_0. Из (30) видно, что для любых значений n при $\alpha>0{,}5$ поправка ϕ отрицательная. Это значит, что решения малой, но конечной амплитуды ответвляются от тривиального решения в область его линейной неустойчивости — мягкий тип ветвления. Для значений $\alpha<0{,}5$ поправка ϕ положительная, т. е. ветвление происходит в область линейной устойчивости тривиального решения, — ветвление жесткого типа. Вышесказанное иллюстрирует рис. 3.

При стремлении β к нулю, а α — к единице решение (27) остается ограниченным, но значение для поправки ϕ неограниченно растет. В этой области решение можно построить, если фиксировать значения β-компоненты волнового вектора и искать поправки к α. В этой ситуации также можно построить равномерно пригодное разложение (23).

При стремлении α к 0,5 значение β стремится к

$$\beta^*=\sqrt{-\frac{n+1}{8n}+\frac{1}{8n}\sqrt{(n-1)^2+16n}}\,.$$

При этом наряду с неограниченным ростом поправки ϕ неограниченно растет и решение (27), и разложение (25), (27), (29) становится несправедливым. Это связано с тем, что для решения с волновым вектором первой гармоники из окрестности $(\alpha=0{,}5,\beta^*)$

волновой вектор одной из гармоник второго приближения ($2\alpha = 1, \beta = 0$) также лежит в окрестности нейтральной кривой (19). Это значит, что окрестность точки ($\alpha = 0{,}5, \beta^*$) требует особого рассмотрения.

В окрестности этой точки вместо (25) следует брать выражение:

$$H_1 = A\,\mathrm{e}^{i\xi_0/2}(a\,\mathrm{e}^{i\beta^* z_0} + \bar{a}\,\mathrm{e}^{-i\beta^* z_0}) + N\,\mathrm{e}^{i\xi_0} + \text{к.с.} \tag{31}$$

Так как здесь выбирается вполне определенная точка на нейтральной кривой (19), то полагать в (31) $A = \text{const}$ нельзя, необходимо считать ее функцией медленных координат ξ_m, $m = 1, 2, \ldots$.

Из приближения второго порядка для H_2 в этом случае имеем выражение

$$H_2 = A_1\,\mathrm{e}^{i\alpha\xi_0}(a^2\,\mathrm{e}^{i2\beta^* z_0} + \bar{a}^2\,\mathrm{e}^{-i2\beta^* z_0}) + \\ + A_2\,\mathrm{e}^{i(3/2)\alpha\xi_0}(a\,\mathrm{e}^{i\beta^* z_0} + \bar{a}\,\mathrm{e}^{-i\beta^* z_0}) + N_1\,\mathrm{e}^{i2\alpha\xi_0} + \text{к.с.}, \tag{32}$$

где

$$A_1 = -\frac{iA^2}{2\beta^{*2}((n+1) + 4n\beta^{*2})}, \quad A_2 = -\frac{6iAN}{45/16 + \beta^{*2}((9/4)(n+1) + n\beta^{*2})}, \quad N_1 = -\frac{i}{3}\,N^2,$$

а требование отсутствия секулярных членов приводит к системе

$$\begin{gathered} a\,\frac{\partial N}{\partial \xi_1} + c_1 N - 4A^2|a|^2 = 0, \\ \beta^*\Big(4n\beta^{*2} + \frac{n+1}{2}\Big)A\,\frac{\partial a}{\partial z_1} - \Big(\frac{1}{2} - (n+1)\beta^{*2}\Big)a\,\frac{\partial A}{\partial \xi_1} + \frac{c_1}{2}\,Aa - 2\bar{A}Na = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Решения системы (33), для которых (31), (32) удовлетворяют условиям симметрии (21) и нормировки (22), имеют вид

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{i\delta\xi_1}, \qquad a = a_0\,\mathrm{e}^{i\phi z_1}, \qquad N = N_0\,\mathrm{e}^{2i\delta\xi_1}. \tag{34}$$

Здесь амплитуды A_0, a_0, N_0 — функции более медленных координат, чем ξ_1 и z_1. Подставляя (34) в (33), получаем систему, связывающую поправки к волновым числам δ и ϕ со значениями амплитуд A_0, a_0, N_0:

$$\begin{gathered} -(c_1 + 4i\delta)N_0 + 4A_0^2|a_0|^2 = 0, \\ A_0 a_0(-c_1 + 4(\bar{A}_0/A_0)N_0 - f(n)i\phi + g(n)i\delta) = 0, \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$f(n) = 2\beta^{*2}(4n\beta^{*2} + (n+1)/2) > 0, \qquad g(n) = 1 - 2(n+1)\beta^{*2} \leqslant 0.$$

Из условия существования нетривиальных решений системы (33), в частности, следует соотношение

$$-c_1^2 + [(g-4)\delta - f\phi]ic_1 + 16|A_0|^2|a_0|^2 + 4f\phi\delta - 4g\delta^2 = 0. \tag{36}$$

В отличие от рассмотренного выше решения (25), (27), (30) уравнение (36) выполняется в двух существенно различных случаях. В первом случае, когда $c_1 = 0$, имеем

$$\phi = (g(n)\delta - 4|A_0 a_0|^2/\delta)/f(n), \qquad N_0 = -iA_0^2|a_0|^2/\delta. \tag{37}$$

Геометрия области существования решений этого типа на плоскости (δ, ϕ) для значений $n \neq 1$ показана на рис. 4 штриховкой. Из (37) следует, что такое решение ответвляется от тривиального решения по линии $\phi = g(n)\delta/f(n)$, являющейся касательной к нейтральной кривой в особой точке ($\alpha = 0{,}5, \beta^*$). Сравнивая (25), (27) и (31), (32), (37), легко

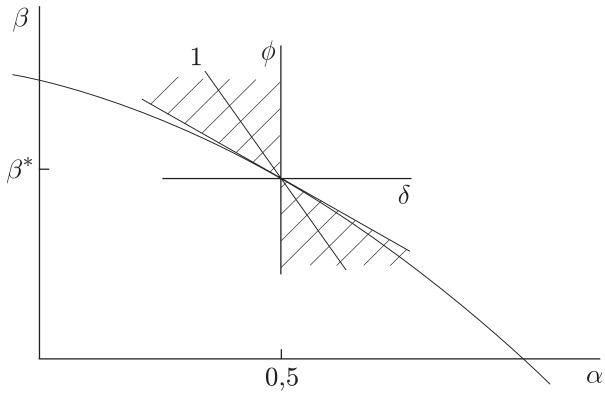

Рис. 4. Область существования решений в особой точке при $n \neq 1$

заметить, что эти решения принадлежат одному и тому же семейству. Аналогично классификации волновых режимов течения пленки ньютоновской жидкости (см., например, [8, 9]), будем называть его первым пространственным семейством.

Интересен второй случай, когда $c_1 \neq 0$, для чего необходимо, чтобы

$$\phi = \frac{g(n) - 4}{f(n)}\,\delta. \tag{38}$$

С учетом (38) из (35) получаем

$$c_1^2 = 16(|A_0|^2|a_0|^2 - \delta^2). \tag{39}$$

Таким образом, как следует из (37)–(39), от первого пространственного семейства (31), (32)–(39) по линии (38) ответвляются два семейства решений со значениями фазовых скоростей $c_1 \neq 0$. Принятому условию нормировки (22) отвечает одно из них — $c_1 > 0$.

В отличие от первого пространственного семейства, где различным значениям амплитуд $|A_0 a_0|$ и $|N_0|$ отвечают различные значения δ и ϕ, семейство решений с $c_1 \neq 0$ бифурцирует, не отклоняясь в этом приближении от линии (38) (на рис. 4 это линия *1*). Для него одним и тем же значениям δ и ϕ отвечают различные решения, у которых с ростом пространственной гармоники $|A_0 a_0|$ увеличивается значение скорости c_1. Из (35) и (38) следует, что при этом модули амплитуд пространственной и плоской гармоник равны $|N_0| = |A_0||a_0|$.

Полученное в работе уравнение (16) можно использовать для моделирования волновых процессов в стекающих пленках нелинейно-вязких жидкостей. Представленные здесь аналитические результаты решения уравнения (16) будут использоваться в качестве начального приближения при численных расчетах режимов, у которых волновые числа лежат достаточно далеко от нейтральной кривой (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шульман З. П., Байков В. И.** Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. Минск: Наука и техника, 1979.
2. **Кутепов А. А., Полянин А. Д., Запрянов З. Д. и др.** Химическая гидродинамика. М.: Бюро Квантум, 1996. С. 248–254.
3. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
4. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 28–34.

5. **Tsvelodub O. Yu., Trifonov Yu. Ya.** On steady-state travelling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. V. 34. P. 255–269.
6. **Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.** О стационарно-бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде. Новосибирск, 1988. (Препр. / Ин-т теплофизики СО АН СССР; № 188-88).
7. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений // Гидродинамика: Сб. науч. тр. Пермь: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1974. Вып. 5. С. 91–104.
8. **Котыченко Л. Н., Цвелодуб О. Ю.** Пространственные волновые режимы на поверхности тонкой вязкой пленки жидкости. Новосибирск, 1991. (Препр. / Ин-т теплофизики СО АН СССР; № 252-91).
9. **Tsvelodub O. Yu., Kotychenko L. N.** Spatial wave regimes on the surface of a thin viscous liquid film // Physica D. 1993. V. 63. P. 361–377.

Поступила в редакцию 29/VI 2004 г.,
в окончательном варианте — 24/VII 2004 г.