УДК 539.374

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ УСЛОВИИ ПЛАСТИЧНОСТИ МИЗЕСА — ШЛЕЙХЕРА

А. М. Коврижных

Новосибирский военный институт, 630117 Новосибирск
E-mail: akovr@sibmail.ru

Для плоского напряженного состояния получены системы уравнений пластичности для напряжений и скоростей, основанные на критерии Мизеса — Шлейхера. Установлены области эллиптичности и гиперболичности этих систем, определены предельные напряжения и направления разрушения, которые отождествляются с характеристиками уравнений для поля скоростей. Получено хорошее согласование с результатами экспериментов на пластичных и хрупких материалах.

Ключевые слова: пластичность, разрушение, гиперболичность, критерий прочности Мизеса — Шлейхера.

В теории пластичности металлов наиболее распространенным является критерий Губера — Мизеса, согласно которому при достижении предела текучести интенсивность касательных напряжений в материале принимает постоянное значение. Простота математической формулировки, последующее энергетическое обоснование и опытная проверка показали преимущество этого критерия перед другими для пластичных металлов [1, 2]. Однако для хрупких металлов и горных пород наибольшее распространение получил критерий прочности Кулона — Мора [2–8].

Для хрупких материалов обобщение этого критерия, предложенное Шлейхером и получившее дальнейшее развитие в работах Надаи, утверждает, что при пластическом течении или разрушении твердых тел интенсивность касательных напряжений в материале является определенной функцией среднего нормального напряжения [1, 2]. Пластические деформации для критерия Мизеса — Шлейхера можно определять на основе ассоциированной и неассоциированной моделей [3–6].

Для произвольного напряженного состояния критерий Мизеса — Шлейхера имеет вид

$$T + \beta\sigma = k, \tag{1}$$

где k — сцепление; β — коэффициент внутреннего трения; $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ — среднее нормальное напряжение; $T = [(\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2]^{1/2}/\sqrt{6}$ — интенсивность касательных напряжений.

В пространстве главных нормальных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 условие пластичности (прочности) Мизеса — Шлейхера представляет собой круговой конус с вершиной на гидростатической оси. Обозначим σ_0 координату вершины конуса ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$). Если в пластической области k и β являются постоянными величинами, то они могут быть определены по результатам двух экспериментов, например на растяжение и сжатие. Обозначим σ_t, σ_c и τ_0 пределы пластичности (прочности) при растяжении, сжатии и сдвиге соответственно. Если экспериментально определены σ_t и σ_c, то из (1) имеем

$$\beta = \sqrt{3}\,\frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}, \qquad k = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t}, \qquad \tau_0 = k, \qquad \sigma_0 = \frac{2}{3}\,\frac{\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t}. \tag{2}$$

Для более точного прогноза направлений разрушения следует учитывать, что характеристики материала k и β на пределе прочности могут отличаться от их значений в пластической области и зависеть от величины нормального напряжения σ.

Для плоского напряженного состояния при $\sigma_2 = \sigma_y = 0$ критерий Мизеса — Шлейхера в главных осях напряжений имеет вид

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 = (\sqrt{3}k - \beta(\sigma_1 + \sigma_3)/\sqrt{3}\,)^2. \tag{3}$$

Введем для удобства вспомогательную систему координат s, t (рис. 1), связанную с биссектрисами первого и второго квадрантов:

$$s = (\sigma_1 + \sigma_3)/\sqrt{2}, \qquad t = (\sigma_3 - \sigma_1)/\sqrt{2}.$$

В этой системе координат условие (3) существенно упрощается:

$$(1 - 4\beta^2/3)s^2 + 3\,t^2 + 4\sqrt{2}\,k\beta s = 6k^2. \tag{4}$$

Сцепление k можно определять на основе (2) через пределы прочности при растяжении σ_t и сжатии σ_c либо через σ_t и коэффициент трения β. В дальнейшем будем определять все прочностные параметры через σ_t и β:

$$k = \tau_0 = \frac{\sqrt{3} + \beta}{3}\,\sigma_t, \qquad \sigma_c = \frac{\sqrt{3} + \beta}{\sqrt{3} - \beta}\,\sigma_t.$$

Уравнение (4) представляет собой кривую второго порядка, координаты правой вершины которой определяются значениями

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{\sqrt{3} + \beta}{\sqrt{3} + 2\beta}\,\sigma_t.$$

Вид кривой (4) определяется значением коэффициента внутреннего трения β. Если $\beta \leqslant \sqrt{3}/2$, то имеем уравнение эллипса

$$(s - s_0)/a^2 + t^2/b^2 = 1, \tag{5}$$

наклоненного под углом 45° к осям координат σ_1, σ_3 (см. рис. 1). Центр эллипса и его полуоси определяются соотношениями

$$s_0 = -\frac{2\sqrt{2}\beta(\sqrt{3} + \beta)}{3 - 4\beta^2}\,\sigma_t, \qquad a = \frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{3} + \beta)}{3 - 4\beta^2}\,\sigma_t, \qquad b = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt{3} + \beta}{\sqrt{3 - 4\beta^2}}\,\sigma_t.$$

При $\beta = 0$ получаем известный эллипс Губера — Мизеса с центром в начале координат и полуосями $a = \sqrt{2}\,\sigma_t$, $b = \sqrt{2/3}\,\sigma_t$ [9]. На рис. 1 эллипсы Мизеса и Мизеса — Шлейхера обозначены сплошными линиями *2* и *3* соответственно, пунктирной линией *1* здесь и далее на рисунках показан шестиугольник Кулона — Мора.

Пусть теперь $\beta = \sqrt{3}/2$, тогда из (3) имеем $\sigma_c = 3\sigma_t$. В этом случае (4) представляет собой уравнение параболы

$$t^2 + \sqrt{2}\,\sigma_t\,s = 3\sigma_t^2/2. \tag{6}$$

Координаты вершины параболы определяются при $t = 0$ и имеют значения: $\sigma_1 = \sigma_3 = 3\sigma_t/4$. Очевидно, что вершина этой параболы находится ближе к началу координат, чем вершина эллипса, что не согласуется с условием Кулона — Мора (рис. 2).

Если $\beta > \sqrt{3}/2$, то уравнение (4) представляет гиперболу

$$(s - s_0)/a^2 - t^2/b^2 = 1, \tag{7}$$

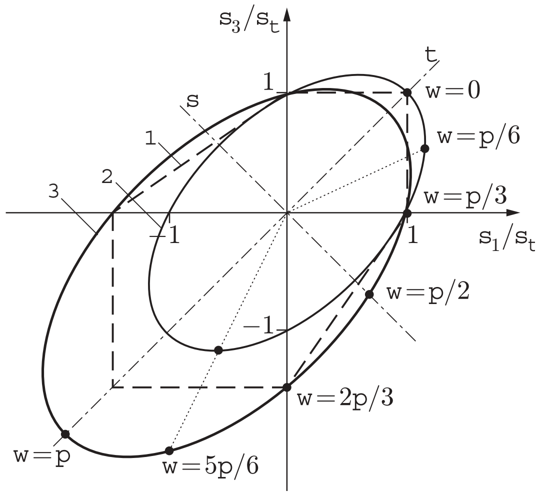

Рис. 1

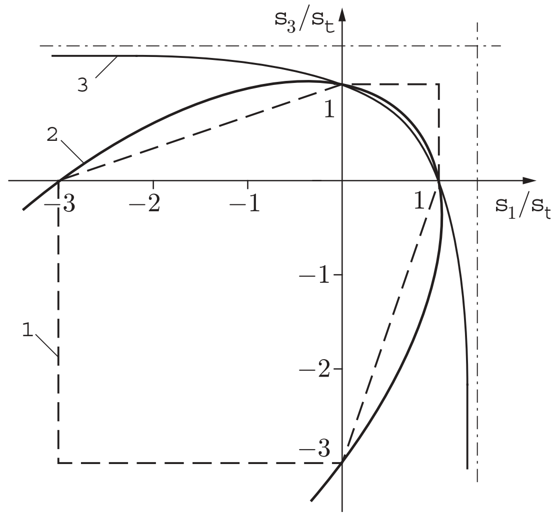

Рис. 2

Рис. 1. Эллипс Мизеса — Шлейхера в плоскости напряжений σ_1, σ_3

Рис. 2. Парабола и гипербола Мизеса — Шлейхера в плоскости σ_1, σ_3

где

$$s_0 = \frac{2\sqrt{2}\,\beta(\sqrt{3}+\beta)}{4\beta^2-3}\,\sigma_t, \qquad a = \frac{\sqrt{6}\,(\sqrt{3}+\beta)}{4\beta^2-3}\,\sigma_t, \qquad b = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt{3}+\beta}{\sqrt{4\beta^2-3}}\,\sigma_t.$$

Гипербола (7) имеет следующие уравнения асимптот:

$$t = \pm(2/3)\sqrt{\beta^2-3/4}\,(s-s_0).$$

Пусть $\beta = \sqrt{3}$, тогда координаты вершины гиперболы определяются значениями $\sigma_1 = \sigma_3 = 2\sigma_t/3$, полуоси $a = b = 2\sqrt{2}\sigma_t/3$, а центр гиперболы находится в точке $\sigma_1 = \sigma_3 = 4\sigma_t/3$. Уравнения асимптот в этом случае принимают вид $\sigma_1 = 4\sigma_t/3$ и $\sigma_3 = 4\sigma_t/3$. На рис. 2 парабола и гипербола Мизеса — Шлейхера показаны сплошными линиями *2* и *3* соответственно.

Рассмотрим теперь данные опытов Коффина [2] по серому чугуну (рис. 3), а также Корне и Грасси [2] по модифицированному чугуну (рис. 4). На рис. 3 светлыми кружками представлены результаты опытов Коффина, сплошными линиями — критерий Мизеса — Шлейхера, причем в первом, втором и четвертом квадрантах условие (4) представляет собой параболу (линия *2*) при $\beta = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}866$; $\sigma_c = 3\sigma_t$, а в третьем квадранте — эллипс (линия *3*) при $\beta = 0{,}373$. Основываясь на данных опытов Коффина, примем при одноосном сжатии величину β равной среднему значению для третьего и четвертого квадрантов, тогда $\beta = 0{,}62$. Это значение β будет использоваться в дальнейшем для определения направления плоскости разрушения при сжатии.

Опыты Корне и Грасси проводились на образцах из серого и модифицированного чугуна. Результаты для серого чугуна близки к данным опытов Коффина и поэтому здесь не приводятся. Результаты экспериментов для модифицированного чугуна представлены на рис. 4 и также хорошо согласуются с условием (4) при значении $\beta = 0{,}742$.

Вышеизложенное позволяет заключить, что критерий Мизеса — Шлейхера лучше, чем критерий Кулона — Мора, согласуется с результатами опытов в определении напряженного состояния, при котором происходит разрушение чугуна. Особенно наглядно это

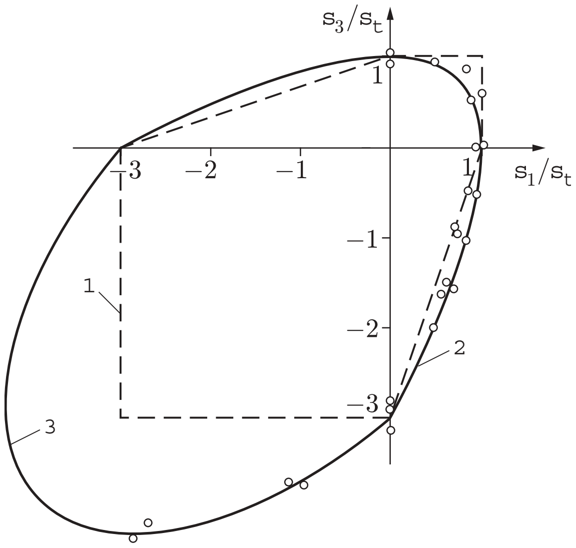

Рис. 3

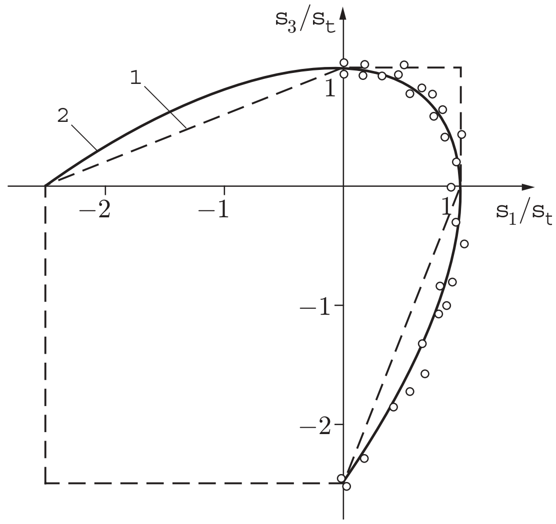

Рис. 4

Рис. 3. Сравнение результатов расчета с данными опытов Коффина для серого чугуна

Рис. 4. Сравнение результатов расчета с данными опытов Корне и Грасси для модифицированного чугуна

видно на рис. 3, где приводятся данные экспериментов для третьего квадранта. Этот важный результат не нашел отражения в существующей литературе, и поэтому наибольшее обоснование и распространение в работах по пластическому деформированию и разрушению хрупких материалов получил критерий прочности Кулона — Мора в его различных модификациях [2].

Следуя работе [9], введем угол ω, который характеризует вид напряженного состояния. Тогда для главных нормальных напряжений можно записать:

$$\sigma_1 = \sigma + \frac{2}{\sqrt{3}}T\cos\Big(\omega - \frac{\pi}{3}\Big), \quad \sigma_2 = \sigma - \frac{2}{\sqrt{3}}T\cos\omega, \quad \sigma_3 = \sigma + \frac{2}{\sqrt{3}}T\cos\Big(\omega + \frac{\pi}{3}\Big), \tag{8}$$

где ω определяется по формуле

$$\cos 3\omega = -(3\sqrt{3}\,I_3)/(2T^3), \qquad I_3 = s_x s_y s_z - s_x\tau_{yz}^2 - s_y\tau_{xz}^2 - s_y\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}.$$

Здесь s_x, s_y, s_z — диагональные компоненты девиатора напряжений; $s_i = \sigma_i - \sigma$, $i = x, y, z$. Рассмотрим некоторые виды напряженных состояний. Например, для двухосного растяжения $2\sigma_1 = \sigma_3$ (обобщенный сдвиг) угол $\omega = \pi/6$, при растяжении $\omega = \pi/3$, для чистого сдвига $\sigma_1 = -\sigma_3$ и угол $\omega = \pi/2$, а при сжатии $\omega = 2\pi/3$.

Для плоского напряженного состояния (в направлении *2*) из (8) можно найти σ и далее из (1) определим T:

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}T\cos\omega, \qquad T = \frac{\sqrt{3}\,k}{\sqrt{3} + 2\beta\cos\omega}. \tag{9}$$

При использовании (9) формулы (8) принимают вид

$$\sigma_1 = 2T\cos(\omega - \pi/6), \qquad \sigma_3 = 2T\cos(\omega + \pi/6). \tag{10}$$

Будем считать, что ось y совпадает со вторым главным направлением тензора напряжений, а ось x образует с первым главным направлением угол θ, для которого

$\operatorname{tg} 2\theta = 2\tau_{xz}/(\sigma_x - \sigma_z)$. Далее с помощью известных формул, используя (10), выразим компоненты напряжения в произвольной системе координат через функции ω и θ:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{pmatrix} = T(\sqrt{3}\cos\omega \pm \sin\omega\cos 2\theta), \qquad \tau_{xz} = T\sin\omega\sin 2\theta. \tag{11}$$

Заменяя в (11) выражение для T его значением из (9), найдем

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}\,k(\sqrt{3}\,\cos\omega \pm \sin\omega\cos 2\theta)}{\sqrt{3} + 2\beta\cos\omega}, \qquad \tau_{xz} = \frac{\sqrt{3}\,k\sin\omega\sin 2\theta}{\sqrt{3} + 2\beta\cos\omega}.$$

Подставляя σ_x, σ_z, τ_{xz} в уравнение равновесия и выполняя дифференцирование, получим

$$\begin{gathered} \Big(\sqrt{3}\,\sin\omega\cos 2\theta - \cos\omega - \frac{2\beta}{\sqrt{3}}\Big)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \sqrt{3}\sin\omega\sin 2\theta\,\frac{\partial\omega}{\partial z} - 2\sin\omega\Big(1 + \frac{2\beta}{\sqrt{3}}\,\cos\omega\Big)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0, \\ \sqrt{3}\,\sin\omega\sin 2\theta\,\frac{\partial\omega}{\partial x} - \Big(\sqrt{3}\,\sin\omega\cos 2\theta + \cos\omega + \frac{2\beta}{\sqrt{3}}\Big)\frac{\partial\omega}{\partial z} + 2\sin\omega\Big(1 + \frac{2\beta}{\sqrt{3}}\,\cos\omega\Big)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Данная система дифференциальных уравнений в частных производных при $\beta = 0$ совпадает с аналогичной системой для пластичных металлов [9] и в области гиперболичности имеет следующие уравнения характеристических линий:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \psi), \qquad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \psi), \tag{13}$$

где ψ — угол, который составляет первая характеристика с осью σ_1:

$$\psi = \psi_\sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\arccos\Big(\frac{\operatorname{ctg}\omega}{\sqrt{3}} + \frac{2\beta}{3\sin\omega}\Big). \tag{14}$$

При введении обозначения $\sin\varphi = \beta/\sqrt{3}$ условие гиперболичности системы (12) имеет вид

$$\cos^2\omega + \sin\varphi\cos\omega + \sin^2\varphi - 3/4 < 0. \tag{15}$$

Решая это неравенство, получим

$$-\cos(\varphi - \pi/6) < \cos\omega < \cos(\varphi + \pi/6). \tag{16}$$

В общем случае угол φ в зависимости от хрупкости материала принимает значения от 0 до $\pi/2$. Для пластичных металлов $\varphi = \beta = 0$, для хрупких материалов $\varphi \geqslant \pi/6$, при разрушении отрывом $\varphi = \pi/2$. Наиболее просто условие гиперболичности (16) можно представить, если рассмотреть два случая: $\varphi \leqslant \pi/6$ и $\varphi \geqslant \pi/6$.

В случае $\varphi \leqslant \pi/6$ из (16) следует

$$\varphi + \pi/6 < \omega < \varphi + 5\pi/6. \tag{17}$$

Пусть $\varphi = \beta = 0$, тогда из (17) следует условие гиперболичности [9], которое имеет вид

$$\pi/6 < \omega < 5\pi/6.$$

Если угол внутреннего трения φ увеличивается от 0 до $\pi/6$, то правая граница области гиперболичности увеличивается до π, а левая — до $\pi/3$. В результате при $\varphi = \pi/6$ ($\beta = \sqrt{3}/2$) условие гиперболичности принимает другой вид:

$$\pi/3 \leqslant \omega < \pi.$$

Рассмотрим теперь хрупкие материалы, для которых $\varphi \geqslant \pi/6$. В этом случае из (16) следует неравенство

$$\varphi + \pi/6 < \omega < 7\pi/6 - \varphi.$$

При увеличении угла φ от $\pi/6$ до $\pi/2$ правая граница этого неравенства уменьшается, а левая увеличивается до значения $\varphi = 2\pi/3$ и при $\varphi = \pi/2$ ($\beta = \sqrt{3}$) для всех углов ω система дифференциальных уравнений (12) имеет эллиптический тип.

Пусть вдоль некоторой линии $x = x(s)$, $y = y(s)$ заданы функции $\omega = \omega(s)$, $\theta = \theta(s)$. Решения дифференциальных уравнений $\omega = \omega(x, z)$, $\theta = \theta(x, z)$ образуют некоторую поверхность (интегральную поверхность). Основным является вопрос о возможности проведения через заданную линию L определенной интегральной поверхности (задача Коши). Для интегральной поверхности, проходящей через линию L, имеем очевидные соотношения

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\omega}{\partial z}\,dz = d\omega, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\theta}{\partial z}\,dz = d\theta. \tag{18}$$

Вдоль L уравнения (12) и (18) образуют систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно первых частных производных функций $\omega = \omega(x, z)$, $\theta = \theta(x, z)$. Если линия L является характеристикой уравнений (12), то вдоль нее производные определяются неоднозначно, следовательно, определитель упомянутой алгебраической системы и надлежащие числители в формулах Крамера обращаются в нуль. Приравнивая к нулю определитель системы, находим дифференциальные уравнения характеристических линий (13). Приравнивая к нулю числители в формуле Крамера, получим дифференциальные соотношения между неизвестными функциями ω и θ, выполняющиеся вдоль характеристик

$$\pm\frac{\sqrt{3}\,\Sigma(\omega)}{2\sin\omega(\sqrt{3} + 2\beta\cos\omega)}\,d\omega - d\theta = 0, \tag{19}$$

где $\Sigma(\omega) = \sqrt{3\sin^2\omega - (\cos\omega + 2\beta/\sqrt{3})^2}$.

Введем новую функцию λ при помощи уравнений

$$d\lambda = -\frac{\sqrt{3}\,\Sigma(\omega)}{2\sin\omega(\sqrt{3} + 2\beta\cos\omega)}\,d\omega, \qquad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}\int\limits_{\omega_\beta}^{\omega}\frac{\Sigma(\omega)}{2\sin\omega(\sqrt{3} + 2\beta\cos\omega)}\,d\omega. \tag{20}$$

В этих соотношениях $\omega_\beta = \varphi + \pi/6$, $\varphi = \arcsin(\beta/\sqrt{3})$. Если $\beta = 0$, то $\omega_\beta = \pi/6$, что соответствует [9], при $\beta = \sqrt{3}/2$ имеем $\omega_\beta = \pi/3$. Таким образом, система уравнений (12) имеет два семейства характеристик, для которых справедливы следующие соотношения:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \psi), \qquad \theta - \lambda = \text{const} = \xi \qquad \text{вдоль первой линии,}$$

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \psi), \qquad \theta + \lambda = \text{const} = \eta \qquad \text{вдоль второй линии.}$$

При выводе и исследовании уравнений для поля скоростей рассмотрим дилатансионную пластическую модель [5, 6], определяющие соотношения которой в [10] представлены как результат сдвигов по конечному числу систем скольжения. Ниже воспользуемся соотношениями этой модели для плоского напряженного состояния [10]:

$$\dot e_x = \Big(\frac{\Lambda}{3} + \frac{s_x}{2T}\Big)\dot\Gamma_p, \qquad \dot e_z = \Big(\frac{\Lambda}{3} + \frac{s_z}{2T}\Big)\dot\Gamma_p, \qquad \dot\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{T}\,\dot\Gamma_p, \qquad \dot e_y = \Big(\frac{\Lambda}{3} + \frac{s_y}{2T}\Big)\dot\Gamma_p,$$

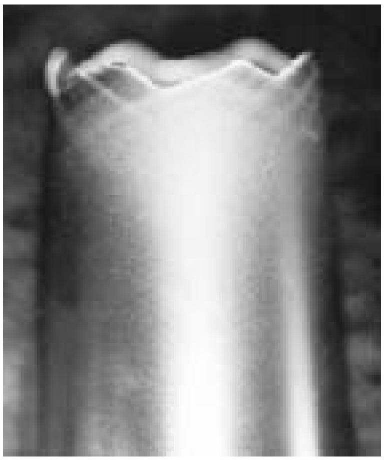

Рис. 5. Направления разрушения на образцах из стали 12ХН3А

где Λ — коэффициент дилатансии; $\dot{\Gamma}_p$ — интенсивность скоростей пластической деформации сдвига. Исключая из этих соотношений параметр $\dot{\Gamma}_p$ и подставляя в них полученные на основе (11) значения для компонент девиатора напряжений $s_x = T(\cos\omega/\sqrt{3} + \sin\omega\cos 2\theta)$, $s_z = T(\cos\omega/\sqrt{3} - \sin\omega\cos 2\theta)$, получим уравнения для компонент вектора скорости v_x и v_z

$$\begin{gathered}\operatorname{tg} 2\theta\,\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} - \operatorname{tg} 2\theta\,\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,\\ (a\cos 2\theta - b)\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + (a\cos 2\theta + b)\,\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,\end{gathered} \tag{21}$$

где $a = \sin\omega$, $b = 2\Lambda/3 + \cos\omega/\sqrt{3}$.

При введении обозначения $\sin\varphi_v = \Lambda/\sqrt{3}$, где φ_v — угол дилатансии, условие гиперболичности системы (21) имеет вид

$$\cos^2\omega + \sin\varphi_v\cos\omega + \sin^2\varphi_v - 3/4 < 0. \tag{22}$$

Как видно из (22), условие гиперболичности для поля скоростей совпадает с условием (15) для напряжений и со всеми последующими неравенствами при $\varphi_v = \varphi$.

Уравнения характеристик системы дифференциальных уравнений (21) по виду совпадают с уравнениями (13), в которых следует принять $2\psi = 2\psi_v = \pi - \arccos(b/a)$. Учитывая полученные ранее результаты, запишем выражения для углов ψ_σ и ψ_v, которые определяют направления характеристик для полей напряжений и скоростей:

$$\psi_\sigma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\Big(\frac{\operatorname{ctg}\omega}{\sqrt{3}} + \frac{2\beta}{3\sin\omega}\Big), \qquad \psi_v = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\Big(\frac{\operatorname{ctg}\omega}{\sqrt{3}} + \frac{2\Lambda}{3\sin\omega}\Big). \tag{23}$$

Как видно из этих формул, при $\Lambda = \beta$ (в случае закона пластического течения, ассоциированного с поверхностью Мизеса — Шлейхера), характеристики системы уравнений для скоростей совпадают с характеристиками для напряжений, так как $\psi_\sigma = \psi_v$. При $\Lambda = \beta = 0$ приходим к результатам для пластичных металлов [9]. Так как для одноосного растяжения $\omega = \pi/3$, то, подставляя это значение в (23), получим $\psi_\sigma = \psi_v \approx 54{,}7^\circ$, что согласуется с результатами опытов на плоских образцах [1] и на тонкостенных цилиндрах из стали 12ХН3А (рис. 5), данные испытаний которых приводятся в [11].

При заданных значениях v_x, v_z на линии L, как и для системы уравнений в напряжениях, дополним уравнения (21) дифференциальными соотношениями

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v_x}{\partial z}\,dz = dv_x, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,dz = dv_z. \tag{24}$$

Вдоль L уравнения (21) и (24) образуют систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно первых частных производных функций $v_x = v_x(x, z)$, $v_z = v_z(x, z)$. Если линия L является характеристикой уравнений (21), то вдоль нее производные определяются неоднозначно, следовательно, определитель упомянутой алгебраической системы и надлежащие числители в формулах Крамера обращаются в нуль. Приравнивая к нулю определитель системы, находим дифференциальные уравнения характеристик, которые совпадают с (13) при $\psi = \psi_v$. Приравнивая к нулю числители, получим дифференциальные зависимости между неизвестными функциями v_x и v_z, выполняющиеся вдоль каждой из характеристик:

$$dv_x\,dx + dv_z\,dz = 0. \tag{25}$$

Подставляя в эту зависимость уравнения характеристик, получим два соотношения для скоростей вдоль каждой из характеристик. Выведем эти соотношения для проекций вектора скорости u и v на направления касательных к характеристическим линиям первого и второго семейств. Обозначим u_n и v_n проекции вектора скорости на направления нормалей соответственно к первой и второй характеристикам. Учитывая вышеизложенное, выразим v_x и v_z через u и u_n:

$$v_x = u\cos\theta_\alpha - u_n\sin\theta_\alpha, \qquad v_z = u\sin\theta_\alpha + u_n\cos\theta_\alpha, \tag{26}$$

где $\theta_\alpha = \theta - \psi_v$ — угол, который образует характеристика первого семейства с осью x. Аналогичным образом определим v_x и v_z через v и v_n:

$$v_x = v_n\sin\theta_\beta + v\cos\theta_\beta, \qquad v_z = -v_n\cos\theta_\beta + v\sin\theta_\beta, \tag{27}$$

где $\theta_\beta = \theta_\alpha + 2\psi_v = \theta + \psi_v$ — угол, который образует характеристика второго семейства с осью x. Применяя формулы (25)–(27) вдоль каждой характеристики, получим

$$du - u_n\,d\theta_\alpha = 0, \qquad dv + v_n\,d\theta_\alpha = 0. \tag{28}$$

Приравнивая правые части формул (26) и (27), получим систему уравнений для определения u_n и v_n, после решения которой имеем

$$u_n = v\,\mathrm{cosec}\,2\psi - u\,\mathrm{ctg}\,2\psi, \qquad v_n = u\,\mathrm{cosec}\,2\psi - v\,\mathrm{ctg}\,2\psi. \tag{29}$$

Подстановка найденных значений в (28) дает соотношения для поля скоростей на характеристиках:

$$\begin{aligned} &du - (v\,\mathrm{cosec}\,2\psi - u\,\mathrm{ctg}\,2\psi)\,d\theta_\alpha = 0 \qquad \text{вдоль линии } \alpha,\\ &dv + (u\,\mathrm{cosec}\,2\psi - v\,\mathrm{ctg}\,2\psi)\,d\theta_\alpha = 0 \qquad \text{вдоль линии } \beta. \end{aligned} \tag{30}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи: пусть $2\psi = \pi/2$, тогда (30) переходят в соотношения Гейрингер для плоской деформации жесткопластической среды [9]; при $2\psi = \pi/2 + \varphi$, где φ — угол внутреннего трения, уравнения для компонент скорости на характеристиках (30) принимают вид

$$\begin{aligned} &du - (v\sec\varphi + u\,\mathrm{tg}\,\varphi)\,d\theta_\alpha = 0 \qquad \text{вдоль линии } \alpha,\\ &dv + (u\sec\varphi + v\,\mathrm{tg}\,\varphi)\,d\theta_\alpha = 0 \qquad \text{вдоль линии } \beta. \end{aligned}$$

Эти соотношения для поля скоростей были получены в [12] для идеального жесткопластического грунта Кулона — Мора при его деформировании в условиях плоской деформации. Частным случаем уравнений на характеристиках (30) являются и соотношения для плоского напряженного состояния жесткопластического несжимаемого материала Леви — Мизеса [13].

Как отмечалось выше, для одноосного сжатия $\omega = 2\pi/3$. В этом случае по данным опытов Коффина определим $\beta = 0{,}62$. Принимая $\Lambda = \beta$ и подставляя эти значения в (23),

Рис. 6. Направления разрушения на образцах известняка

получим $\psi_\sigma = \psi_v \approx 49^\circ$. Эти результаты хорошо согласуются с данными опытов [14], в которых цилиндрические образцы из серого чугуна разрушались примерно под углом 45°.

Экспериментально установлено [2, 15], что разрушение хрупких горных пород при сжатии и отсутствии трения на торцах происходит по плоскостям, параллельным направлению сжатия, т. е. когда $\psi_v = \pi/2$. Этот результат следует из (23), если принять $\Lambda = \sqrt{3}$. На рис. 6 представлены результаты опытов, проведенных автором в Институте горного дела СО РАН на цилиндрических образцах известняка, торцы которых были смазаны парафином.

Приведенное выше сравнение теоретических и экспериментальных результатов для пластичных и хрупких твердых тел показывает, что применение критерия Мизеса — Шлейхера позволяет правильно определять и предельные напряжения, и направления разрушения, которые отождествляются с характеристиками поля скоростей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954.
2. **Разрушение.** М.: Мир, 1975. Т. 2: Математические основы теории разрушения. С. 336–520.
3. **Друккер Д., Прагер В.** Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Механика. Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир, 1975. С. 166–177.
4. **Новожилов В. В.** О пластическом разрыхлении // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 681–689.
5. **Николаевский В. Н.** Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984.
6. **Райс Дж. Р.** Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика: Труды XIV Международного конгресса IUTAM. М.: Мир, 1979. С. 439–471.
7. **Коврижных А. М.** Об условиях локализации пластической деформации в металлах // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 5. С. 630–632.
8. **Коврижных А. М.** Об условиях гиперболичности уравнений теории пластического сдвига // Докл. РАН. 1999. Т. 365, № 4. С. 485–487.
9. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969.
10. **Коврижных А. М.** К теории пластичности, учитывающей вид напряженного состояния при сложном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. № 6. С. 98–106.

11. **Аннин Б. Д., Жигалкин В. М.** Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
12. **Шилд Р. Т.** Смешанные граничные задачи механики грунтов // Механика. Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир, 1975. С. 178–194.
13. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
14. **Губкин С. И.** Пластическая деформация металлов. М.: Металлургиздат, 1961. Т. 2.
15. **Тимошенко С. П.** Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 17/II 2004 г.