

УДК 536.3

**Определение истинной температуры  
непрозрачных материалов  
по спектральному распределению  
интенсивностей теплового излучения:  
использование закона смещения Вина**

**С.П. Русин**

*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва*

E-mail: sprusin@yandex.ru

Получено уравнение для производной, связывающее спектральную излучательную способность поверхности, длину волны и термодинамическую (истинную) температуру непрозрачного нагретого тела в точке спектрального максимума теплового излучения. Задачу определения истинной температуры непрозрачной поверхности предлагается решать в два этапа. На первом этапе с помощью специальной функции — относительной излучательной способности — выделяется спектральный интервал, наиболее удобный для аппроксимации излучательной способности тела, и определяется величина истинной температуры. На втором этапе, с помощью полученного уравнения для производной истинная температура определяется повторно. Найден безразмерный параметр, который связывает излучательные свойства материала с длиной волны максимума излучения и характеризует отклонение от закона смещения Вина. Если абсолютная величина этого параметра мала, то значение истинной температуры, полученной на первом этапе, может быть уточнено на втором этапе. Данный подход иллюстрируется с помощью экспериментальных данных, полученных в процессе сличения яркостей температурных ламп.

**Ключевые слова:** закон смещения Вина, излучательная способность, истинная температура.

**Введение**

Как известно, термодинамическая (истинная) температура  $T$  является важным теплофизическим параметром материалов, технологических процессов. Зависимость температуры от времени дает также важную информацию о функционировании той или иной технической или технологической системы. При воздействии интенсивных потоков энергии и высоких давлений агрегатное состояние материала может измениться за субсекундные интервалы времени. В отличие от контактных датчиков радиационные термометры обладают высоким быстродействием и не требуют непосредственного контакта с измеряемым объектом. Кроме того, радиационные термометры могут быть использованы и тогда, когда контакт с объектом либо недоступен (например, объект движется, находится на значительном расстоянии), либо нежелателен (например, объект радиоактивен, химически агрессивен, находится под высоким электрическим напряжением, размеры объекта соизмеримы с размерами контактного датчика). В связи с этим приборы и методы радиационной термометрии получают все большее распространение как при теплофизических исследованиях, так и в технологических процессах [1, 2].

Для того чтобы определить искомую температуру  $T$ , необходимо знать спектральную излучательную способность  $\varepsilon(\lambda, T)$  места визирования, которая зависит от длины волны  $\lambda$  регистрируемого излучения, температуры  $T$ , направления излучения, геометрии и состояния поверхности и ряда других факторов. Во всех этих случаях величина  $\varepsilon(\lambda, T)$  с необходимой точностью, как правило, неизвестна. В связи с этим получили распространения методы определения температуры непрозрачных свободно излучающих нагретых тел в конденсированном состоянии по зарегистрированному спектральному распределению интенсивностей  $I_c(\lambda)$  свободно излучающих тел [3–7].

В работах [3–7] преимущественно рассматривается непрозрачный свободно излучающий объект в конденсированном состоянии. Спектральная интенсивность собственного теплового излучения этого объекта непрерывно зависит от длины волны  $\lambda$  и температуры  $T$ . Среда, в которой находится объект, прозрачна для излучения. Тогда для фиксированных длин волн  $\lambda_i$  и температуры  $T$  имеет место система из  $m$  уравнений:

$$\varepsilon(\lambda_i, T) I_0(\lambda_i, T) = I_c(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

где  $I_0(\lambda, T) = C_1 \pi^{-1} \lambda^{-5} \{ \exp[c_2/(\lambda T)] - 1 \}^{-1}$ , Вт/(м<sup>3</sup> ср) — спектральная интенсивность абсолютно черного тела (АЧТ),  $C_1 = 3,74177118 \cdot 10^{-16}$  Вт·м<sup>2</sup> и  $c_2 = 1,4387752 \cdot 10^{-2}$  м·К — постоянные излучения формулы Планка [1].

В связи с тем, что зависимость  $\varepsilon$  от  $\lambda$  неизвестна, система (1) из  $m$  уравнений имеет  $m + 1$  неизвестных. Эта система недоопределена и задача определения температуры  $T$  поставлена некорректно [8]. Чтобы доопределить задачу, обычно используется соотношение связи в виде зависимости излучательной способности от вектора параметров  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , то есть полагается, что  $\varepsilon(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T, \mathbf{a})$ . При этом необходимо иметь не какую-либо частную параметрическую модель  $\varepsilon$ , а иерархию моделей, начиная от самых простейших, когда на данном спектральном интервале функция  $\varepsilon = \text{const}$  (“серая” модель) или линейно зависит от  $\lambda$ . При  $m > n + 1$  задача становится корректно поставленной и система (1) может быть решена каким-либо численным методом, например, методом наименьших квадратов (МНК). Иерархия параметрических моделей может быть построена, например, с помощью алгебраических полиномов. Однако, как показано в [9], увеличение числа  $n$  неизвестных параметров приводит к тому, что соответствующая матрица становится плохо обусловленной и значения искомой температуры становятся нереалистичными. Кроме того, для искомой зависимости  $\varepsilon$  от  $\lambda$  полиномиальная аппроксимация не всегда возможна. В связи с этим необходимо сочетать два взаимоисключающих требования: высокую точность аппроксимации  $\varepsilon$  при малом числе параметров.

В работе [10] предлагалось предварительно осуществить поиск участка спектра, в пределах которого функция  $\varepsilon(\lambda, T)$  (или  $\ln \varepsilon(\lambda, T)$ ) близка к линейной зависимости от  $\lambda$ . Для поиска данного спектрального участка используется относительная излучательная способность  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$ , которая при фиксированных значениях длины волны  $\lambda_i$  и температуры представляет собой отношение спектральной интенсивности площадки визирования к спектральной интенсивности АЧТ при некоторой температуре  $T_f$ . Такой подход обладает рядом преимуществ. Так, задавая малый шаг по температуре отнесения, при  $T_f \cong T$  можно получить спектральную зависимость  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$ , близкую к искомой зависимости  $\varepsilon(\lambda, T)$ , и отобразить ее на графике. Это дает возможность интерпретировать

множество решений графически и для выбора искомого решения применить методы аналитической геометрии. Так, например, при линейной зависимости  $\varepsilon$  (или  $\ln \varepsilon$ ) от  $\lambda$  соответствующая линия меняет свою выпуклость (вогнутость) при изменении величины  $T_f$  от значений меньших  $T$  до значений больших  $T$ . Поскольку все линии на графике зависимости  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$  представляют собой произведение одной и той же зависимости  $\varepsilon(\lambda, T)$  на функцию  $f$  известного параметрического вида, то может быть выбрана та зависимость  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$ , аппроксимировать которую наиболее удобно.

В работе [11] предполагалось определять температуру  $T$  по длине волны  $\lambda_{\max}$ , при которой имеет место максимум теплового излучения объекта, и закону смещения Вина, т.е. фактически приравнивая спектральный максимум излучения реального объекта спектральному максимуму излучения АЧТ. Метод не требует тарировки спектрометра по спектральной интенсивности, однако оптические свойства реального объекта игнорируются, что приводит, как будет показано, к значительным ошибкам при определении температуры.

В настоящей работе рассматриваются два метода определения истинной температуры непрозрачного свободно излучающего нагретого тела с неизвестной излучательной способностью: с помощью относительной излучательной способности и путем использования закона смещения Вина. Для спектрального максимума теплового излучения получено соотношение, связывающее излучательную способность визируемой поверхности с температурой тела и длиной волны максимума излучения. Задачу определения термодинамической температуры материала предлагается решать в два этапа. На первом этапе с помощью относительной излучательной способности выделяется спектральный интервал, наиболее удобный для аппроксимации излучательной способности тела, и проводится численное определение искомой температуры. На втором этапе производится повторное численное определение температуры в точке максимума излучения с помощью полученного ранее соотношения. Выделен безразмерный параметр, который связывает излучательные свойства материала с длиной волны максимума излучения. Показано, что при малой абсолютной величине этого параметра для уточнения величины истинной температуры материала после первого этапа целесообразно использовать второй этап обработки экспериментальных данных. Причем при повышении температуры и сохранении прочих параметров точность определения искомой температуры повышается. Данный подход иллюстрируется на примере обработки экспериментальных данных, полученных в процессе сличения яркостей температурных ламп.

### 1. Анализ и основные расчетные соотношения

При решении задачи на заданном спектральном интервале было сделано ряд допущений, которые, как правило, выполняются на практике. Полагалось, что спектральная интенсивность  $I_c(\lambda)$  собственного излучения, следовательно, и излучательная способность  $\varepsilon(\lambda, T)$ , есть непрерывные функции по переменным  $\lambda$  и  $T$ , причем вторая производная  $\varepsilon(\lambda, T)$  по  $\lambda$  также непрерывна. Среда, в которой находится измеряемый объект, прозрачна для излучения; излучение извне отсутствует. Полагалось также, что при постоянной искомой температуре  $T$  задан набор зарегистрированных спектральных интенсивностей  $I_c(\lambda_i)$  при фиксированных длинах волн  $\lambda_i$  из некоторого интервала. При этом спектральный максимум излучения объекта принадлежит данному спектральному

интервалу и соответствующая длина волны  $\lambda_{\max}$  может быть определена с требуемой точностью либо экспериментально, либо путем аппроксимации экспериментальных данных.

Искомая температура  $T$  определялась в два этапа: на первом этапе использовалась относительная излучательная способность  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  и решалась соответствующая система уравнений, на втором этапе на основании полученных данных об оптических свойствах объекта при  $\lambda = \lambda_{\max}$  с помощью закона смещения Вина искомая температура определялась повторно. Затем проводился анализ неопределенностей значений температуры, полученных на каждом этапе. В итоге выбиралось то значение искомой температуры, которое имело меньшую неопределенность.

**1.1. Использование относительной излучательной способности  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  для определения искомой температуры объекта (первый этап).**

Исходная система имеет вид:

$$\varepsilon_f(\lambda_i, T_f) = I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_f), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_f(\lambda_i, T_f) = \varepsilon(\lambda_i, T) f_i = \varepsilon(\lambda_i, T) \exp(p/\lambda_i) \alpha_i$ ,  $p = c_2(1/T_f - 1/T)$ ,

$\alpha_i = \{1 - \exp[-c_2/(\lambda_i T_f)]\} / \{1 - \exp[-c_2/(\lambda_i T)]\}$ . Эта система получена из системы уравнений (1) путем почленного деления каждого  $i$ -го уравнения на  $I_0(\lambda_i, T_f)$  соответственно. Из (2) следует, что при  $T_f \rightarrow T$  функции  $\alpha_i \rightarrow 1$ ,  $f_i \rightarrow 1$  и  $\varepsilon_f(\lambda_i, T_f) \rightarrow \varepsilon(\lambda_i, T)$ . В работе [10] показано, что, как правило, можно считать  $\alpha_i \cong 1$  при всех длинах волн из заданного спектрального интервала.

Сначала система (2) использовалась для графической интерпретации множества возможных зависимостей  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$ . Затем на основании анализа выпуклости (вогнутости) соответствующих кривых выбирались интервал возможных температур, к которому принадлежит искомая температура  $T$ , и участок спектра, наилучший для простейшей аппроксимации [10]. Окончательные величины искоемых параметров вычислялись по МНК [10].

Невязка  $\delta$  системы (2) определялась по формуле

$$\delta = \left\{ \sum_{i=1}^m [\varepsilon_{f,i} - I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_f)]^2 \right\}^{1/2} / \left\{ \sum_{i=1}^m [I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_f)]^2 \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{f,i} \equiv \varepsilon_{f,i}(\lambda_i, T_f) \cong \varepsilon(\lambda_i, a) f_i$ . Полагалось, что температура отнесения  $T_f$  принадлежит тому же температурному интервалу  $[T_f^a, T_f^b]$ , что и искомая температура  $T$ . Задавая  $T_f$  с определенным шагом, находилось значение  $T_f = T_{f,\min}$  при котором невязка  $\delta$  имеет минимальное значение  $\delta_{\min}$ . Величина  $\delta$  характеризует точность аппроксимации излучательной способности места визирования. Параметр  $\delta_{\text{exp}}$ , характеризующий точность экспериментальных данных, определялся по формуле

$$\delta_{\text{exp}} = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ \gamma(\lambda_i) I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_{f, \min}) \right]^2 \right\}^{1/2} / \left\{ \sum_{i=1}^m \left[ I_c(\lambda_i) / I_0(\lambda_i, T_{f, \min}) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

где  $\gamma(\lambda_i)$  — стандартная относительная неопределенность (среднеквадратичная погрешность) величины  $I_c(\lambda_i)$ , измеренной экспериментально при заданной длине волны  $\lambda_i$ .

Интервал температур, к которому принадлежит искомая температура  $T$ , определялся интервалом значений  $T_f$ , при которых выполняется условие  $\delta \leq \delta_{\text{exp}}$ .

### 1.2. Использование характеристик теплового излучения объекта при спектральном максимуме излучения (второй этап)

В этом случае в точке максимума при  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$  производная  $I_c(\lambda)$  по  $\lambda$  равна нулю, и в дополнение к системе исходных уравнений имеем соотношение:

$$(I_c)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} = (\varepsilon I_0)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} = (\varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} I_0 + \varepsilon (I_0)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} = 0. \quad (5)$$

Из (5) следует, что это соотношение имеет место только в том случае, если производные имеют разные знаки, т.к. все остальные величины существенно положительны.

Как известно, для АЧТ зависимость интенсивности  $I_0 = I_0(\lambda, T)$  от  $\lambda$  при той же температуре  $T$  объекта имеет максимум при  $\lambda = \lambda_{\text{max}}^b$ . При этом, если  $\lambda < \lambda_{\text{max}}^b$ , то  $(I_0)'_{\lambda} > 0$ , если  $\lambda > \lambda_{\text{max}}^b$ , то  $(I_0)'_{\lambda} < 0$ . Тогда при  $(\varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} < 0$  производная  $(I_0)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} > 0$  и  $\lambda_{\text{max}} < \lambda_{\text{max}}^b$ , при  $(\varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} > 0$  производная  $(I_0)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} < 0$  и  $\lambda_{\text{max}} > \lambda_{\text{max}}^b$ , т.е. максимум излучения реального объекта сдвигается в коротковолновую или длинноволновую части спектра соответственно.

Почленно разделив (5) на  $\varepsilon I_0$  при фиксированных значениях  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$  и  $T$ , получим

$$(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} + (\ln I_0)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} = 0. \quad (6)$$

Обозначаем  $x = c_2/(\lambda T)$ . Тогда в соответствии с формулой Планка получим

$$(\ln I_0)'_{\lambda} = \frac{[I_0(x)]'_x (x)'_{\lambda}}{I_0(x)} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{x \exp(x)}{\exp(x) - 1} - 5 \right) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{x}{1 - \exp(-x)} - 5 \right). \quad (7)$$

На основании (6) и (7) имеем

$$\lambda (\ln \varepsilon)'_{\lambda} + \frac{x}{1 - \exp(-x)} - 5 = 0. \quad (8)$$

Соотношение (8) связывает величины  $\lambda_{\text{max}}$ ,  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}}$  и  $T$ , каждая из которых может быть определена при известных двух остальных. В частности, из уравнения (8) следует, что для того, чтобы определить искомую температуру  $T$ , необходимо знать величину  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda} = \varepsilon'_{\lambda} / \varepsilon$  при экспериментально найденной длине волны  $\lambda_{\text{max}}$ . Из (8) также следует, что решение уравнения существует только при выполнении неравенства  $\lambda_{\text{max}} (\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\text{max}}} < 5$ , т.к.  $x$  не может быть отрицательной величиной. При известной

температуре  $T$  объекта и  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}}$  величина  $\lambda_{\max}$  может быть определена из соотношения  $\lambda_{\max} = c_2 / (x_{\max} T)$ , где  $x_{\max} = c_2 / (\lambda_{\max} T)$  находится из уравнения (8) итерационным методом.

Обозначим

$$\rho = \lambda (\ln \varepsilon)'_{\lambda} = c_2 (\ln \varepsilon)'_{\lambda} / (Tx) \quad (9)$$

и запишем (8) в виде, удобном для численного решения методом простой итерации:

$$x = (5 - \rho) [1 - \exp(-x)]. \quad (10)$$

Для черного и серого излучения  $\varepsilon'_{\lambda} \equiv 0$ ,  $\rho \equiv 0$  и уравнения (8) и (10) сводятся к известному соотношению для определения константы  $c_3$  закона смещения Вина. При увеличении температуры объекта и  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda} = \text{const}$  величина  $\rho$  также уменьшается. В соответствии с физическими соображениями это объясняется тем, что при увеличении температуры  $T$  величина  $\lambda_{\max}$  уменьшается и оптические свойства материала объекта играют все меньшую роль.

Как показал вычислительный эксперимент, во многих случаях, имеющих место при теплофизических исследованиях, величина  $\rho$  может быть оценена на основании дополнительных экспериментов или по данным, известным из литературных источников.

При  $\lambda = \lambda_{\max}$  величина  $x_{\max} = c_2 / (\lambda_{\max} T)$  и  $\rho = \rho_{\max}$ . Тогда можно записать

$$\rho_{\max} = \lambda_{\max} (\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}} = c_2 (\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}} / (x_{\max} T). \quad (11)$$

Пусть величины  $\lambda_{\max}$  и  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}}$  предварительно известны. В соответствии с (11) это означает, что известна величина  $\rho_{\max}$ . В этом случае соответствующее значение  $x_{\max}$  находится из уравнения (10), а искомая температура  $T$  по соотношению

$$T = c_2 / (\lambda_{\max} x_{\max}). \quad (12)$$

Поскольку величина определяется по экспериментальным данным, она известна с некоторой неопределенностью  $\Delta \rho_{\max}$ . Согласно (11), стандартная относительная неопределенность  $\Delta \rho_{\max} / \rho_{\max}$  определяется по формуле

$$\Delta \rho_{\max} / \rho_{\max} = \left[ (\Delta \lambda_{\max} / \lambda_{\max})^2 + \left\{ \Delta (\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}} / (\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}} \right\}^2 \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Неопределенность  $\Delta \rho_{\max}$ , в свою очередь, вызывает неопределенность  $\Delta x_{\max}$  величины  $x_{\max}$ . Тогда на основании (10), после дифференцирования  $x_{\max}$  по  $\rho_{\max}$  и ряда преобразований, имеем

$$\Delta x_{\max} = (x_{\max})'_{\rho} \Delta \rho_{\max} = -\Delta \rho_{\max} [1 - \exp(-x_{\max})] / [1 - (5 - \rho_{\max}) \exp(-x_{\max})]. \quad (14)$$

Разделив (14) на величину  $x_{\max}$ , записанную согласно (10), получим соотношение для относительной неопределенности  $x_{\max}$ :

$$\Delta x_{\max} / x_{\max} = -\frac{\Delta \rho_{\max}}{\rho_{\max}} / s, \quad (15)$$

где  $s = [1 - (5 - \rho_{\max}) \exp(-x_{\max})] (5 / \rho_{\max} - 1)$ .

При  $-0,7 \leq \rho_{\max} \leq 0$  величина  $(5 - \rho_{\max}) \exp(-x_{\max}) < 5,7 \exp(-c_2 / c_3) < 0,04$  и по сравнению с единицей ею можно пренебречь. Тогда можно записать

$$\Delta x_{\max} / x_{\max} \approx -\frac{\Delta \rho_{\max}}{\rho_{\max}} / \left( \frac{5}{\rho_{\max}} - 1 \right). \quad (16)$$

Аналогично

$$\Delta x_{\max} \approx -\Delta \rho_{\max}. \quad (17)$$

Как следует из соотношений (15) и (16), в зависимости от величины и знака  $\rho_{\max}$  относительная неопределенность  $\Delta x_{\max} / x_{\max}$  может быть в несколько раз меньше относительной неопределенности  $\Delta \rho_{\max} / \rho_{\max}$ . Стандартная относительная неопределенность  $\Delta T / T$  в соответствии с (12) определялась как

$$\Delta T / T = \left[ (\Delta c_2 / c_2)^2 + (\Delta \lambda_{\max} / \lambda_{\max})^2 + (\Delta x_{\max} / x_{\max})^2 \right]^{1/2}. \quad (18)$$

На рис. 1 показана зависимость  $x_{\max}$  от  $\rho_{\max}$  в интервале изменения  $\rho_{\max}$  от  $-0,8$  до  $0,8$ . При  $\rho_{\max} = 0$  и  $\Delta \rho_{\max} = 0$  значение  $x_{\max} = x_b = c_2 / c_3$ , где индекс  $b$  означает излучение АЧТ, константа излучения закона смещения Вина  $c_3 = 2,8977685 \cdot 10^{-3} \text{ К} \cdot \text{м}$  [1]. На рис. 1 видно, что зависимость  $x_{\max}$  от  $\rho_{\max}$  близка к прямолинейной. С помощью МНК она может быть представлена соотношением  $x_{\max} = b_1 + b_2 \rho_{\max}$ , где  $b_1 = 4,963$ ,  $b_2 = -1,030$ , стандартная неопределенность  $\sigma = 0,0023$ . Как и следовало ожидать, для данного случая  $\Delta x_{\max} = (x_{\max})'_{\rho_{\max}} \Delta \rho_{\max} = b_2 \Delta \rho_{\max} \approx -\Delta \rho_{\max}$ , т.е. в пределах точности вычислений полученный результат совпадает с (17).

При известных значениях  $\lambda_{\max}$  и  $\rho_{\max}$  с помощью зависимости, представленной на рис. 1, и соотношения (12) может быть предварительно оценена величина искомой температуры  $T$ . Как следует из (10), при  $\rho_{\max} \ll 5$  величиной  $\rho_{\max}$  можно пренебречь и температуру  $T$  определять на основании закона смещения Вина как  $T = c_3 / \lambda_{\max}$ , т.е. только по экспериментально найденной величине  $\lambda_{\max}$ .

Для анализа правомерности отождествления длины волны  $\lambda_{\max}$ , найденной экспериментально, с длиной

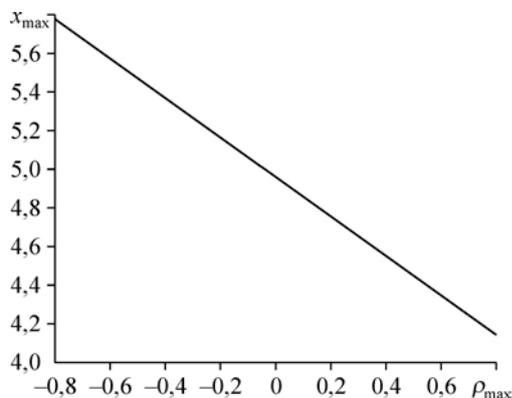


Рис. 1. Зависимость  $x_{\max} = c_2 / (\lambda_{\max} T)$  от

$$\rho_{\max} = \lambda_{\max} (\ln \varepsilon)'_{\lambda = \lambda_{\max}}.$$

волны  $\lambda_{\max}^b$  АЧТ использовался безразмерный параметр

$$\xi = x_{\max} / x_{\max}^b = c_3 / (\lambda_{\max} T) = \lambda_{\max}^b T_b / (\lambda_{\max} T). \quad (19)$$

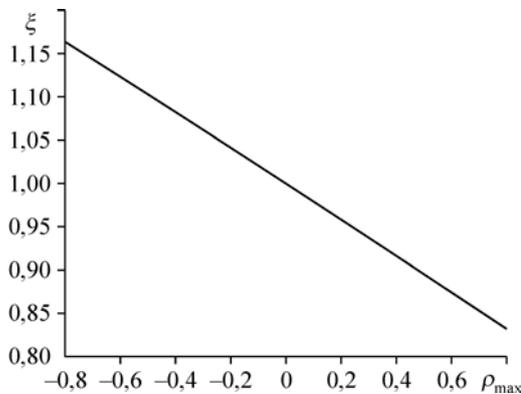
Можно показать, что при  $-0,8 \leq \rho_{\max} \leq 0$   $\xi \approx 1 - \rho_{\max} / 5$ .

На рис. 2 представлена зависимость  $\xi$  от  $\rho_{\max}$ . Как следует из (19), при условии  $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}^b$  полученная температура  $T_b$  будет отличаться от термодинамической температуры  $T$  реального объекта и параметр  $\xi = T_b / T$ . Разумеется, чем меньше  $|\rho_{\max}|$ , тем меньше будет отличие. Именно этот частный случай рассматривался в работе [11]. Действительно, как следует из численных экспериментов, представленных в [11], например, для зависимости  $\varepsilon(\lambda) = 0,7 - 0,016 \cdot 10^{-3} \lambda$  (здесь  $\lambda$  в нанометрах) при искомой термодинамической температуре  $T = 3000$  К объекта максимум излучения имеет место при  $\lambda_{\max} = 961,45$  нм и параметр  $\rho_{\max} = -0,016 \cdot 10^{-3} \lambda_{\max} / (0,7 - 0,016 \cdot 10^{-3} \lambda_{\max}) = -0,02247$ . В [11] фактически полагается, что  $\rho_{\max} = 0$ , тогда температура  $T_b = c_3 / \lambda_{\max} = 3013,9$  К. Эта величина отличается от искомой температуры на 13,9 К. При этом параметр  $\xi = 1,00465$ . В действительности для реального объекта температура  $T$  и термодинамическая температура, подставляемая в формулу Планка, должны иметь одну и ту же величину. В этом случае параметр  $\xi$  имеет то же значение, но характеризует уже отношение длин волн, т.е.  $\xi = \lambda_{\max}^b / \lambda_{\max} = 1,00465$ .

В отличие от [11], решая уравнение (10) относительно  $x_{\max}$  при данном значении  $\rho_{\max}$  и используя соотношение (12), получим значение  $T = 3000$  К искомой температуры, т.е. в пределах компьютерных неопределенностей точное решение.

Отметим, что, как следует из (15), при малых значениях  $|\rho_{\max}|$  и  $\rho_{\max} < 0$  требования к точности определения этой величины могут быть значительно снижены. Так, с помощью вычислительного эксперимента показано, что при точном задании  $\lambda_{\max}$  изменение величины  $\rho_{\max} = -0,02247$  на  $\pm 30\%$  ведет к изменению искомой температуры  $T$  от 2996 до 3004 К соответственно, т.е.  $\Delta T / T \cong \pm 0,13\%$ . В этом случае могут быть использованы грубые оценки производной  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}}$  как по экспериментальным данным, так и по данным литературных источников.

Как следует из рис. 2, при  $\rho_{\max} = 0$  положение спектрального максимума объекта совпадает с  $\lambda_{\max}^b$  АЧТ, при  $\rho_{\max} = -0,8$  длина волны максимума АЧТ более чем на 15 %



больше, чем  $\lambda_{\max}$  реального объекта.

Это означает, что при  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}} < 0$  и фиксированной температуре  $T$  спектральный максимум реального объекта сдвигается в коротковолновую область больше, чем спектральный максимум АЧТ.

Рис. 2. Зависимость  $\xi = x_{\max} / x_b = c_3 / (\lambda_{\max} T)$  от  $\rho_{\max}$ .

## 2. Результаты обработки экспериментальных данных

В качестве зарегистрированного спектра излучения использовался набор спектральных интенсивностей  $I_c(\lambda_i)$ , полученный экспериментально в процессе международного сличения яркостей температурных ламп и опубликованный в приложении к журналу «Metrologia» [12] (в метрологии спектральную интенсивность в заданном направлении принято называть спектральной плотностью энергетической яркости [13]). В частности, была выбрана температурная лампа № 1101, протарированная по спектральной интенсивности (спектральной плотности энергетической яркости) АЧТ в спектральном интервале от 220 до 2500 нм. Тарировка проводилась сначала (первый раунд) в Физико-техническом институте (РТВ, Берлин, Германия), затем во Всероссийском научно-исследовательском институте оптико-физических измерений (ВНИИОФИ, пилотный режим) и затем снова в РТВ (второй раунд). Сама температурная лампа в качестве источника теплового излучения имеет плоскую вольфрамовую ленту, которая заключена в стеклянный баллон со смотровым окном из кварца.

На рис. 3 представлена зависимость  $\ln I_c(\lambda)$  от  $\lambda$ , построенная по экспериментальным точкам с помощью интерполяции кубическими сплайнами.

Как известно, при высоких температурах зависимость  $\varepsilon(\lambda)$  вольфрама близка к прямолинейной на значительном спектральном интервале [14]. На рис. 4 представлена зависимость относительной излучательной способности  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  температурной лампы № 1101 при различных температурах отнесения  $T_f$ . Как следует из рис. 4, на спектральном участке от 500 до 1200 нм при  $T_f = 2541$  К зависимость  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  близка к прямолинейной. Причем при  $T_f = 2525$  К спектральная зависимость  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  выпукла вверх, а при  $T_f = 2550$  К — вниз.

Для температурной лампы № 1101 на рис. 5 представлена зависимость невязки  $\delta$  системы уравнений (2) от величины  $T_f$ . Так же как в [9], при каждом заданном значении  $T_f$  система (2) решалась по линейным МНК. Предполагалось, что зависимость  $\varepsilon(\lambda)$  температурной лампы № 1101 в спектральном диапазоне от 500 до 1200 нм изменяется по линейному закону. Шаг по  $T_f$  составлял 0,1 К. Величины  $\delta$  и  $\delta_{\text{exp}}$  вычислялись

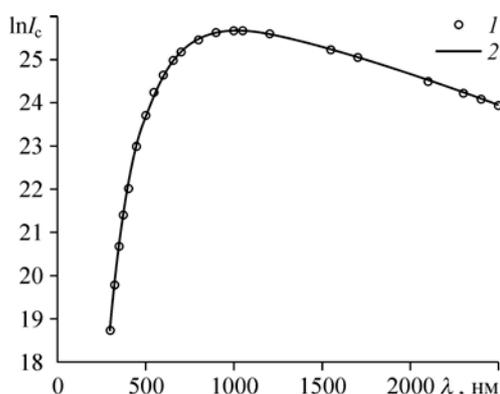


Рис. 3. Зависимость  $\ln I_c(\lambda)$  от длины волны для температурной лампы № 1101.

1 — экспериментальные данные [12], 2 — интерполяция кубическими сплайнами.

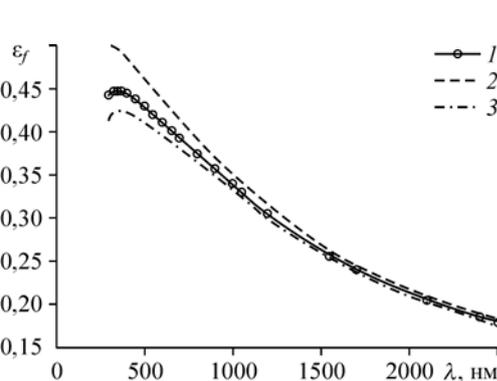


Рис. 4. Зависимость  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$  при различных температурах отнесения  $T_f$  для температурной лампы № 1101 [12].

$T_f = 2541$  (1), 2525 (2), 2550 (3) К.

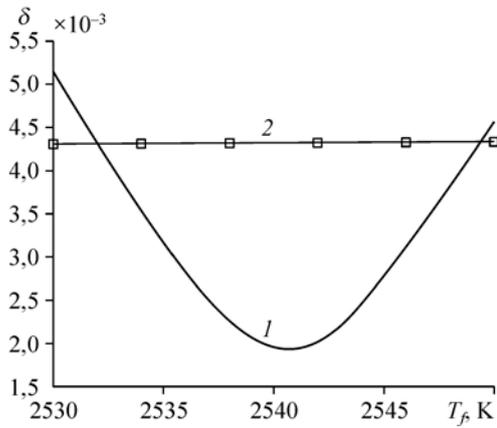


Рис. 5. Зависимость  $\delta$  от  $T_f$  для температурной лампы № 1101 [12].

1 —  $\delta$ , 2 —  $\delta_{\text{exp}}$ .

по соотношениям (3) и (4) соответственно. Как следует из рис. 5 и результатов расчета, невязка имеет минимум  $\delta_{\text{min}} = 1,9326 \cdot 10^{-3}$  при  $T_f^{\text{min}} = 2540,6$  К. В соответствии с принятой методикой значение искомой  $T$  принадлежит отрезку [2532, 2549 К]. При этом  $\varepsilon(\lambda) = a_1 + a_2\lambda$ , где  $a_1 = 0,51777$ ,  $a_2 = 1,7819 \cdot 10^{-4}$ , 1/нм. По результатам расчета была проведена проверка сделанных допущений. Во-первых, была найдена стандартная неопределенность отклонения значений  $\varepsilon(\lambda_i) = a_1 + a_2\lambda_i$  от  $I_c(\lambda_i)/I_0(\lambda_i, T_f^{\text{min}})$  в экспериментальных точках. Эта неопределенность составляла  $\sigma_\varepsilon = 7,8617 \cdot 10^{-4}$ . Во-вторых, на основании экспериментальных данных по  $I_c(\lambda_i)$  и полученной параметрической зависимости  $\varepsilon(\lambda_i) = a_1 + a_2\lambda_i$  была определена искомая температура для каждой длины волны  $\lambda_i$ . Среднее значение полученной температуры совпадало со значением  $T_f^{\text{min}}$  в пределах стандартной неопределенности 0,73 К.

Для того чтобы продолжить обработку экспериментальных данных на втором этапе, необходимо было определить длину волны, при которой имеет место максимум излучения объекта. Эта величина определялась путем интерполяции экспериментальных данных  $I_c(\lambda_i)$  кубическими сплайнами с последующим выбором максимального элемента. Шаг по  $\lambda$  составлял 0,25 нм. Было получено  $\lambda_{\text{max}} \cong 1027$  нм. Отметим, что расчет  $\lambda_{\text{max}}$  по уравнению типа (10) дает близкий результат — 1025,4 нм.

На втором этапе при решении уравнения (10) для задания величины  $\rho_{\text{max}}$  использовались значения  $a_1$  и  $a_2$ , найденные на первом этапе, и значение  $\lambda_{\text{max}} = 1027$  нм, полученное на основании интерполяции экспериментальных данных. После определения  $x_{\text{max}}$  искомая расчетная температура  $T_p$  вычислялась по соотношению (12). В результате вычислений для указанных входных данных получили  $T_p = 2535,9$  К, что близко к значению  $T_f^{\text{min}} = 2540,6$  К, полученному на первом этапе. Отметим, при непосредственном использовании закона смещения Вина, как это предполагается в [11], получаем неприемлемый результат:  $c_3/\lambda_{\text{max}} = 2822$  К.

Стандартная неопределенность искомой температуры определялась по формуле (18). В соответствии с данными [1] неопределенность  $\Delta c_2/c_2 = 1,7 \cdot 10^{-4} \%$  и ею можно пренебречь. На основании анализа данных о максимуме излучения и результатов, полученных на первом этапе, полагалось, что  $\Delta \lambda_{\text{max}}/\lambda_{\text{max}}$  не больше 0,5 %. Неопределенность  $\Delta x_{\text{max}}/x_{\text{max}}$  рассчитывалась по формулам (15), (16). Кроме того, путем вычислительного эксперимента было оценено влияние относительной неопределенности  $\Delta \rho_{\text{max}}/\rho_{\text{max}}$  на относительную неопределенность  $\Delta x_{\text{max}}/x_{\text{max}}$ . Как показал вычислительный эксперимент, несколько лучшую оценку относительной неопределенности  $\Delta x_{\text{max}}/x_{\text{max}}$  дает

формула (15). Однако для этого необходимо предварительно знать величину  $x_{\max}$ . Поэтому формулу (15) целесообразно использовать для апостериорной оценки. На основании анализа изменения величины  $\rho_{\max}$  на первом этапе в интервале температур от 2532 до 2549 К полагалось, что для рассматриваемого случая изменения  $\Delta\rho_{\max}/\rho_{\max}$  находятся в пределах  $\pm 10\%$ . Тогда, согласно (15) и (16), величина  $\Delta x_{\max}/x_{\max}$  изменяется в пределах  $\mp 1\%$ . В соответствии с (18) относительная неопределенность искомой температуры  $\Delta T/T = 1,125\%$  и  $T_p = 2536 \pm 29$  К. Эта неопределенность больше, чем та, которая была получена на первом этапе. После сравнения результатов первого и второго этапов полагалось, что искомая температура находится в интервале от 2532 до 2549 К, т.е. были приняты данные первого этапа.

### 3. Обсуждение и выводы

1. Использование относительной излучательной способности  $\varepsilon_f$  позволяет осуществить выбор спектрального интервала, на котором зависимость излучательной способности  $\varepsilon$  (или  $\ln \varepsilon$ ) от  $\lambda$  выглядит наиболее просто для аппроксимации. Причем в случае линейной зависимости предварительный выбор  $\varepsilon_f(\lambda, T_f = T) = \varepsilon(\lambda, T)$  может быть осуществлен на основании анализа графической информации. Кроме того, для численного решения исходная система уравнений также может быть записана с помощью относительной излучательной способности.

2. Рассмотрен альтернативный подход определения температуры, основанный на использовании уравнения, полученного путем приравнивании нулю производной  $I_c(\lambda)$  по  $\lambda$  в точке максимума излучения объекта. Выявлен безразмерный параметр  $\rho_{\max} = \lambda_{\max} (\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}}$ , от величины которого зависит выбор одного из двух указанных подходов. Показано, что при  $-0,02 \leq \rho_{\max} < 0$  неопределенность производной  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}}$  может достигать  $\pm 30\%$ . При этом значение  $\lambda_{\max}$  должно быть определено с высокой точностью. Для многих материалов параметр  $\rho_{\max}$  находится в интервале от  $-0,5$  до  $-0,2$  и зависимости  $\varepsilon$  от  $\lambda$  монотонно убывают [14]. Однако для изотермических переизлучающих систем величина параметра  $\rho_{\max}$  может быть весьма малой (приближение к модели “серого” излучения). В этом случае предварительную оценку производной  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}}$  целесообразно осуществлять по известным методикам (см., например, [1, 15, 16]). Поскольку в параметр  $\rho_{\max}$  входит длина волны  $\lambda_{\max}$ , то при увеличении температуры величина  $\lambda_{\max}$  уменьшается, и, как правило, положение максимума спектрального излучения приближается к длине волны максимума излучения АЧТ. При  $\rho_{\max} = 0$  полученное уравнение тождественно уравнению, решением которого является константа закона смещения Вина  $c_3$ . Найден безразмерный параметр  $\xi$ , который представляет собой отношение  $c_3$  к произведению  $\lambda_{\max} T$  при фиксированном значении  $\rho_{\max}$  и показывает отклонение от закона смещения Вина в зависимости от  $\rho_{\max}$ . Этот параметр удобен при оценке отождествления максимума излучения реального объекта с максимумом АЧТ по длине волны или температуре.

3. Полагалось, что среда, разделяющая измерительный прибор и объект, прозрачна для излучения. Можно показать, что для неизлучающей среды с пропускательной способностью  $\tau(\lambda)$  полученные соотношения можно использовать, если излучательную

способность материала объекта представить в виде произведения  $\varepsilon(\lambda)\tau(\lambda)$ . В этом случае оптический параметр  $\varepsilon(\lambda)\tau(\lambda)$  характеризует уже систему “излучающее тело — окружающая среда”. Для серой среды величина производной  $(\ln[\varepsilon\tau])'_{\lambda=\lambda_{\max}} = (\ln \varepsilon - \ln \tau)'_{\lambda=\lambda_{\max}} = (\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}}$ , т.е. не зависит от  $\tau$ . Поскольку излучение вольфрамовой ленты проводилось через кварцевое окно, то фактически была найдена спектральная зависимость  $\varepsilon(\lambda)\tau_{gs}(\lambda)$ , где  $\tau_{gs}(\lambda)$  — пропускательная способность кварцевого окна.

4. Показано, что при малых по абсолютной величине значениях  $\rho_{\max}$  задачу определения температуры целесообразно решать в два этапа. На первом этапе с помощью параметрической аппроксимации  $\varepsilon(\lambda)$  определить величину производной  $(\ln \varepsilon)'_{\lambda=\lambda_{\max}}$ . На втором этапе, используя эту величину, уточнить значение искомой температуры с помощью полученного уравнения (10).

5. Если в области спектрального максимума материал излучает как серое тело, то для этого случая выполняется закон Вина и для определения истинной температуры достаточно знать величину  $\lambda_{\max}$ .

Выражаю благодарность заведующему лабораторией радиационной пирометрии ВНИИОФИ Б.Б. Хлевному за ряд разъяснений по отчету [12] и полезные советы, а также профессору В.Н. Адрианову за обсуждение возможности использования оптико-геометрических функций теплопереноса излучением в качестве теплофизических параметров.

### Список литературы

1. **Radiometric Temperature Measurements. I. Fundamentals** / Eds. By Zhang Z.M, Tsai B.K, Mashin G. // *Experimental Methods in the Physical Sci.* Elsevier, 2009. Vol. 42. 343 p.
2. **Radiometric Temperature Measurements. II. Applications** / Eds. By Zhang Z.M, Tsai B.K, Mashin G. // *Experimental Methods in the Physical Sci.* Elsevier, 2010. Vol. 43. 458 p.
3. **Свет Д.Я.** Оптические методы измерения истинных температур. М.: Наука, 1982. 296 с.
4. **Снопко В.Н.** Основы методов пирометрии по спектру теплового излучения. Минск: Ин-т физики им. Б.И. Степанова, 1999. 224 с.
5. **Латыев Л.Н., Чеховской В.Я., Шестаков Е.Н.** Определение истинной температуры веществ со сплошным спектром излучения // *Метрология.* 1982. № 1. С. 35–41.
6. **Плотниченко В.Г., Пырклов Ю.Н., Свет Д.Я.** Бесконтактное измерение истинной температуры и спектральной излучательной способности веществ в конденсированной фазе // *Теплофизика высоких температур.* 1999. Т. 37, № 3. С. 469–474.
7. **Леонов А.С., Русин С.П.** О решении обратной задачи определения температуры по спектру теплового излучения нагретых тел // *Теплофизика и аэромеханика.* 2001. Т. 8, № 3. С. 475–486.
8. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач: очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: Книжный дом «Либроком», 2010. 336 с.
9. **Русин С.П.** Восстановление истинной температуры нагретого тела по интегральному спектру теплового излучения // *Теплофизика и аэромеханика.* 2006. Т. 13, № 1. С. 129–139.
10. **Русин С.П.** Определение температуры и излучательной способности непрозрачных нагретых тел по спектру теплового излучения: моделирование измерений в спектральном окне // *Теплофизика и аэромеханика.* 2011. Т. 18, № 4. С. 629–641.
11. **Dai J., Wang X., Liu X.** Peak-Wavelength Method for Temperature Measurement // *Int. J. Thermophys.* 2008. Vol. 29. P. 1116–1122.
12. **Khlevnoy V.B.** Supplementary comparison // *Final Report: Spectral Radiance 220 to 2500 nm., 24 July 2008.* Metrologia. 2008. Vol. 45, No. 1A. P. 02001. doi: 10.1088/0026-1394/02001. 81 p.
13. **Хлевной Б.Б., Саприцкий В.И., Колесникова С.С.** Международные сличения ССР-1 единиц спектральной плотности энергетической яркости в диапазоне длин волн 220–2500 нм // *Измерительная техника.* 2010. № 7. С. 16–22.
14. **Латыев Л.Н., Петров В.А., Чеховской В.Я., Шестаков Е.Н.** Излучательные свойства твердых материалов: справочник / под ред. А. Е. Шейндлина. М.: Энергия, 1974. 471 с.
15. **Русин С.П., Пелецкий В.Э.** Тепловое излучение полостей. М.: Энергоатомиздат, 1987. 152 с.
16. **Адрианов В.Н.** Основы радиационного и сложного теплообмена. М.: Энергия, 1972. 464 с.

*Статья поступила в редакцию 27 мая 2013 г.*