$\mathcal{AMS}$ subject classification: 39A10

Численное решение одномерного гиперболического уравнения второго порядка методом коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов

Суорн Сингх[1], Суручи Сингх[2], Р. Арора[3]

[1]Department of Mathematics, Sri Venkateswara College, University of Delhi, New Delhi, 110021, India

[2]Department of Mathematics, University of Delhi, New Delhi, 110007, India

[3]Department of Mathematics, Aditi Mahavidyalaya, University of Delhi, Delhi, 110039, India

E-mails: ssingh@svc.ac.in (Сингх Суорн), ssuruchi2005@yahoo.co.in (Сингх Суручи), rrajni19@gmail.com (Арора Р.)

Сингх Суорн, Сингх Суручи, Арора Р. Численное решение одномерного гиперболического уравнения второго порядка методом коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 2. — С. 201–213.

В данной статье предлагается метод, основанный на коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов, для получения численного решения нелинейного одномерного гиперболического уравнения второго порядка, подчиняющегося соответствующим начальным условиям и граничным условиям Дирихле. Метод представляет собой комбинацию метода коллокации B-сплайнов в пространстве и состоящего из двух стадий метода Рунге–Кутты с сохранением сильной устойчивости во времени. Показано, что предлагаемый метод является безусловно устойчивым. Эффективность и точность метода успешно демонстрируется применением метода к нескольким тестовым задачам.

DOI: 10.15372/SJNM20170207

Ключевые слова: уравнение затухающей волны, SSPRK(2,2), метод экспоненциальных B-сплайнов, телеграфное уравнение, трехдиагональный решатель, безусловно устойчивый метод.

Singh Swarn, Singh Suruchi, Arora R. Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic equation by exponential B-spline collocation method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 2. — P. 201–213.

In this paper, we propose a method based on collocation of exponential B-splines to obtain numerical solution of nonlinear second order one dimensional hyperbolic equation subject to appropriate initial and Dirichlet boundary conditions. The method is a combination of B-spline collocation method in space and two stage, second order strong-stability-preserving Runge-Kutta method in time. The proposed method is shown to be unconditionally stable. The efficiency and accuracy of the method are successfully described by applying the method to a few test problems.

Keywords: Damped wave equation, exponential B-spline method, SSPRK(2,2), telegraphic equation, tri-diagonal solver, unconditionally stable method.

1. Введение

Рассмотрим следующее нелинейное одномерное гиперболическое уравнение:

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u = u_{xx} + g(x,t) + f(u), \quad a < x < b, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

подчиняющееся начальным условиям:

$$u(x,0) = \phi_1(x), \quad u_t(x,0) = \phi_2(x), \quad a \le x \le b, \tag{1.2}$$

и граничным условиям Дирихле:

$$u(a,t) = \psi_1(t), \quad u(b,t) = \psi_2(t), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

где $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$ — постоянные. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то уравнение (1.1) — телеграфное уравнение, а $g(x,t)$ — произвольная внешняя вынуждающая функция. Однако для $\alpha > 0$, $\beta = 0$ оно представляет уравнение затухающей волны. Численное решение уравнения затухающей волны имеет огромную важность для волновых явлений. Для $f(u) = 0$ уравнение (1.1) является линейным гиперболическим уравнением второго порядка.

За последние несколько лет было разработано несколько методов [1–12] для решения одномерных гиперболических уравнений второго порядка, подчиняющихся начальным условиям и граничным условиям Дирихле. В [1] обсуждается безусловно устойчивая явная разностная схема для решения телеграфного уравнения. Р.К. Моханти с соавторами [2–5] представили множество конечно-разностных методов для решения одномерных гиперболических уравнений. Р.С. Миттал с соавторами предложили дифференциальный квадратурный метод и метод коллокации с использованием базисных функций на основе кубических B-сплайнов для решения телеграфного уравнения [6, 7]. В [8] авторы используют точки коллокации и радиальную базисную функцию. Параметры сплайновых методов для решения телеграфного уравнения обсуждаются в [11]. В [9, 10] М. Дости и А. Наземи рассматривали метод коллокации с помощью B-сплайнов четвертого порядка и метод квази-интерполяции с помощью B-сплайнов для решения линейного телеграфного уравнения. В [13] Д. Харенко с соавторами предложили несколько методов, включая методы коллокации и наименьших квадратов, для получения численного решения нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

До настоящего времени были разработаны сплайны некоторого типа, причем особое внимание уделялось использованию полиномиальных сплайнов. В данной статье обсуждается метод коллокации с помощью B-сплайнов. Экспоненциальные сплайны и экспоненциальные B-сплайны определяются В.Ж. Маккартином [17, 18] как более общие сплайны и B-сплайны. В.Ж. Маккартин утверждает, что в некоторых случаях полиномиальные сплайны могут производить и производят паразитные колебания в интерполянте. Например, при расчетах горения это может привести к нереалистичной детонации, а в вычислительной аэродинамике — к генерации нефизической ударной волны. Для преодоления этих трудностей были введены экспоненциальные сплайны [19]. Экспоненциальные сплайны обычно не используются для нахождения численных решений дифференциальных уравнений. Совсем недавно Р. Мохаммади [14] и О. Ерсой с соавторами [15] использовали экспоненциальные B-сплайны для получения решения уравнений конвекции–диффузии и Кортевега–де Фриза.

В данной статье уравнение (1.1) сначала преобразуется в систему дифференциальных уравнений в частных производных. Затем используется коллокация экспоненциальных B-сплайнов для аппроксимации пространственных производных. Полученная в результате система обыкновенных дифференциальных уравнений решается с использованием хорошо известного двухстадийного метода Рунге–Кутты второго порядка с сохранением сильной устойчивости (SSPRK(2,2)) [16].

Статья организована следующим образом. В пункте 2 подробно рассматривается метод коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов. В п. 3 обсуждается численный метод для решения (1.1). В п. 4 показано, что этот метод является безусловно устойчивым. В п. 5 даны численные примеры для иллюстрации пригодности предлагаемого метода. Заключительные замечания представлены в п. 6.

2. Метод коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов

Рассмотрим множество узлов $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ как равномерное разбиение области решения $a \le x \le b$ с шагом $h = x_l - x_{l-1} = (b-a)/N$ для $l = 1, 2, \ldots, N-1, N$. Экспоненциальные B-сплайны $B_l(x)$ в указанных выше узлах и дополнительных узлах x_{-1} и x_{N+1} можно определить следующим образом:

$$B_l(x) = \begin{cases} a\left((x_{l-2} - x) - \dfrac{1}{p}(\sin h(p(x_{l-2} - x)))\right), & x \in [x_{l-2}, x_{l-1}), \\ b_1 + b_2(x_l - x) + b_3\exp(p(x_l - x)) + b_4\exp(-p(x_l - x)), & x \in [x_{l-1}, x_l), \\ b_1 + b_2(x - x_l) + b_3\exp(p(x - x_l)) + b_4\exp(-p(x - x_l)), & x \in [x_l, x_{l+1}), \\ a\left((x - x_{l+2}) - \dfrac{1}{p}(\sin h(p(x - x_{l+2})))\right), & x \in [x_{l+1}, x_{l+2}), \\ 0, & \text{противном случае}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$a = \frac{p}{2(phc - s)}, \qquad b_1 = \frac{phc}{(phc - s)}, \qquad b_2 = \frac{p}{2}\left[\frac{c(c-1) + s^2}{(phc - s)(1 - c)}\right],$$

$$b_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{\exp(-ph)(1 - c) + s(\exp(-ph) - 1)}{(phc - s)(1 - c)}\right], \quad b_4 = \frac{1}{4}\left[\frac{\exp(ph)(c - 1) + s(\exp(ph) - 1)}{(phc - s)(1 - c)}\right],$$

$$s = \sin h(ph), \qquad c = \cos h(ph),$$

где p — свободный параметр. Наличие параметра p дает различные формы сплайновых функций. Множество функций $\{B_{-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{N-1}, B_N, B_{N+1}\}$ создает базис для функций, определяемых в области $[a, b]$. Дополнительные узлы за пределами области задачи необходимы для определения всех экспоненциальных сплайнов.

Решение $U(x,t)$, приближенное к аналитическому решению $u(x,t)$ с использованием метода коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов, можно записать следующим образом:

$$U(x,t) = \sum_{l=-1}^{l=N+1} c_l(t) B_l(x), \tag{2.2}$$

где $c_l(t)$ — зависящие от времени параметры, которые должны быть определены из граничных условий и метода коллокации. Первую и вторую пространственные производные можно записать следующим образом:

$$U_x(x,t) = \sum_{l=-1}^{l=N+1} c_l(t) B_{xx_l}(x), \tag{2.3}$$

$$U_{xx}(x,t) = \sum_{l=-1}^{l=N+1} c_l(t) B_{xx_l}(x). \tag{2.4}$$

Значения $B_l(x)$ и его первой и второй производных в различных узлах приведены в таблице 1.

С использованием уравнений (2.2)–(2.4) и табл. 1 мы получим приближенные значения $U(x,t)$ и его пространственных производных через временные параметры c_l следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} U(x_l,\cdot) &= m_1 c_{l-1} + c_l + m_1 c_{l+1}, \\ U_x(x_l,\cdot) &= m_2(c_{l+1} - c_{l-1}), \\ U_{xx}(x_l,\cdot) &= m_3(c_{l-1} - 2c_l + c_{l+1}), \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

где

$$m_1 = \frac{s - ph}{2(phc - s)}, \qquad m_2 = \frac{p(c-1)}{2(phc - s)}, \qquad m_3 = \frac{p^2 s}{2(phc - s)}.$$

Таблица 1. Значения экспоненциального B-сплайна и его производных

x	x_{l-2}	x_{l-1}	x_l	x_{l+1}	x_{l+2}
$B_l(x)$	0	$\frac{s-ph}{2(phc-s)}$	1	$\frac{s-ph}{2(phc-s)}$	0
$B_{x_l}(x)$	0	$\frac{p(c-1)}{2(phc-s)}$	0	$-\frac{p(c-1)}{2(phc-s)}$	0
$B_{xx_l}(x)$	0	$\frac{p^2 s}{2(phc-s)}$	$-\frac{p^2 s}{(phc-s)}$	$\frac{p^2 s}{2(phc-s)}$	0

3. Численный метод

Уравнение (1.1) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= v, \\ v_t &= u_{xx} - 2\alpha v - \beta^2 u + g + f(u). \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

С использованием (2.2) приближенное значение $U_t(x,t)$ можно записать таким образом:

$$U_t(x,t) = \sum_{l=-1}^{l=N+1} \dot{c}_l(t) B_l(x), \tag{3.2}$$

где $\dot{c}_l(t)$ — производная $c_l(t)$ по t.

Используя базисные функции (2.1) и данные из табл. 1 в (3.2), мы получим значения $U_t(x,t)$ следующего вида:

$$U_t(x_l,t) = m_1 \dot{c}_{l-1} + \dot{c}_l + m_1 \dot{c}_{l+1}, \quad l = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.3}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{v}_l = \sum_{i=-1}^{N+1} c_i(t) B_{xx_i}(x_l) - 2\alpha v_l - \\ \beta^2 \sum_{i=-1}^{N+1} c_i(t) B_i(x_l) + g_l + f\left(\sum_{i=-1}^{N+1} c_i(t) B_i(x_l)\right), \quad l = 0, 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где v_l обозначает $v(x_l,t)$ для $l = 0, 1 \ldots, N$. И, наконец, используя уравнения (3.3), (3.4) и табл. 1, мы получим

$$m_1\dot{c}_{l-1} + \dot{c}_l + m_1\dot{c}_{l+1} = v_l, \quad l = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_l = m_3(c_{l-1} - 2c_l + c_{l+1}) - 2\alpha v_l - \beta^2(m_1 c_{l-1} + c_l + m_1 c_{l+1}) + g_l +\\ f(m_1 c_{l-1} + c_l + m_1 c_{l+1}), \quad l = 0, 1, \ldots, N.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Имеем $2(N+1)$ уравнений для $2(N+3)$ неизвестных. Для исключения дополнительных неизвестных используем граничные условия

$$U(x_0, t) = \psi_1(t), \qquad U(x_N, t) = \psi_2(t)$$

и (2.5) для получения

$$c_{-1} = \frac{\psi_1 - c_0 - m_1 c_1}{m_1}, \tag{3.7}$$

$$c_{N+1} = \frac{\psi_2 - c_N - m_1 c_{N-1}}{m_1}. \tag{3.8}$$

Исключив c_{-1} и c_{N+1} из уравнений (3.6)–(3.8) для $l = 0, N$, мы получим

$$c_0 = \frac{m_1}{m_3(1+2m_1)}\left(\left(\frac{m_3}{m_1} - \beta^2\right)\psi_1 - 2\alpha\dot{\psi}_1 - \ddot{\psi}_1 + g_0 + f(\psi_1)\right) = w_0 \tag{3.9}$$

и

$$c_N = \frac{m_1}{m_3(1+2m_1)}\left(\left(\frac{m_3}{m_1} - \beta_N^2\right)\psi_2 - 2\alpha\dot{\psi}_2 - \ddot{\psi}_2 + g_N + f(\psi_2)\right) = w_N. \tag{3.10}$$

Следовательно, теперь задача сводится к решению

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{F}, \tag{3.11}$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 & \ldots & \ldots & 0 \\ m_1 & 1 & m_1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & m_1 & 1 & m_1 \\ 0 & \ldots & \ldots & m_1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \vdots \\ \dot{c}_{N-2} \\ \dot{c}_{N-1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} v_1 - m_1\dot{w}_0 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} - m_1\dot{w}_N \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_{N-2} \\ \dot{v}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_{N-2} \\ G_{N-1} \end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

где

$$\begin{aligned}G_l = m_3(c_{l-1} - 2c_l + c_{l+1}) - 2\alpha v_l - \beta^2(m_1 c_{l-1} + c_l + m_1 c_{l+1}) + g_l +\\ f(m_1 c_{l-1} + c_l + m_1 c_{l+1}), \quad l = 1, 2, \ldots, N-1.\end{aligned}$$

Вектор $\dot{\boldsymbol{c}}$ вычисляется с использованием трехдиагонального решателя на каждом временном уровне для получения системы N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Затем эти уравнения, наряду с уравнениями в (3.12), решаются с использованием оптимального двухстадийного метода второго порядка SSPRK(2,2). Величины c_0, c_N и, следовательно, c_{-1}, c_{N+1} получаются из (3.7)–(3.10). Таким образом, приближенное решение $U(x,t)$ полностью известно.

Чтобы начать вычисление, нам нужны начальные векторы $\boldsymbol{c}^0$ и $\boldsymbol{v}^0$, которые могут быть определены с использованием начальных условий (1.2):

$$U(x_l, 0) = \phi_1(x_l), \quad l = 0, 1, \ldots, N, \tag{3.13}$$

и

$$v(x_l, 0) = \phi_2(x_l), \quad l = 0, 1, \ldots, N. \tag{3.14}$$

Использование (2.5) в (3.13) дает $(N+1)$ уравнений для $(N+1)$ неизвестных, что можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2m_1 & \ldots & \ldots & 0 \\ m_1 & 1 & m_1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & m_1 & 1 & m_1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 2m_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_0) + \frac{m_1}{m_2}\phi_{1x}(x_0) \\ \phi_1(x_1) \\ \vdots \\ \phi_1(x_{N-1}) \\ \phi_1(x_N) - \frac{m_1}{m_2}\phi_{1x}(x_N) \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

а использование (3.14) дает $(N+1)$ уравнений для $(N+1)$ неизвестных:

$$\begin{bmatrix} v_0^0 \\ v_1^0 \\ \vdots \\ v_{N-1}^0 \\ v_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2(x_0) \\ \phi_2(x_1) \\ \vdots \\ \phi_2(x_{N-1}) \\ \phi_2(x_N) \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

4. Анализ устойчивости

В данном пункте обсудим устойчивость метода, рассмотренного в предыдущем пункте с использованием матричного метода. Для исследования устойчивости возьмем $f(u) = 0$ и объединим уравнения (3.11), (3.12) следующим образом:

$$\mathcal{A}\dot{\boldsymbol{C}} = \mathcal{B}\boldsymbol{C} + \mathcal{F}, \tag{4.1}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{P} & -2\alpha\boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = [c_1, \ldots, c_{N-1}, v_1, \ldots, v_{N-1}]',$$

а $\mathcal{F}$ — известный вектор порядка $2(N-1)$, $\boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{I}$ — соответственно нулевая и единичная матрицы порядка $N-1$ и

$$\boldsymbol{P} = m_3\boldsymbol{P}_1 - \beta^2\boldsymbol{A},$$

где

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Используя разложение $\sin h(ph)$, $\cos h(ph)$, мы получим $0 < m_1 < \frac{1}{2}$ и $m_3 > 0 \; \forall p, h > 0$. Мы видим, что $\boldsymbol{A}$ — матрица со строгим диагональным преобладанием и, значит, она обратима. Таким образом, мы имеем

$$\dot{\boldsymbol{C}} = (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})\boldsymbol{C} + \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}, \tag{4.2}$$

где

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{P} & -2\alpha \boldsymbol{I} \end{bmatrix}.$$

Для обеспечения устойчивости системы (4.1) нам нужно доказать, что собственные значения Λ матрицы коэффициентов $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ имеют отрицательную вещественную часть.

Теперь матрицы $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{A}$ имеют один и тот же базис собственных векторов. Матрица $\boldsymbol{A}$ является эрмитовой, все диагональные элементы которой положительны. Следовательно, все собственные значения $\boldsymbol{A}$ вещественны и положительны. Матрица $\boldsymbol{P}_1$, будучи вещественной симметричной отрицательной определенной матрицей, имеет отрицательные собственные значения. Значит, собственные значения матрицы $\boldsymbol{P}$ вещественны и отрицательны.

Пусть $X = [X_1, X_2]'$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению Λ. Тогда имеем

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{P} & -2\alpha \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Из (4.3) мы можем записать

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{A}^{-1} X_2 = \Lambda X_1, \\ \boldsymbol{P} X_1 - 2\alpha X_2 = \Lambda X_2. \end{array} \right\} \tag{4.4}$$

Тогда получим

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1} X_2 = \Lambda(\Lambda + 2\alpha) X_2, \tag{4.5}$$

что означает, что $\Lambda(\Lambda + 2\alpha)$ — собственное значение $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{-1}$. Пусть $\Lambda = x + iy$, где x и y — вещественные числа. Тогда $(x+iy)(x+iy+2\alpha)$ является вещественным и отрицательным, что дает

$$y(x + \alpha) = 0, \qquad x(x + 2\alpha) - y^2 < 0.$$

Из приведенных выше уравнений мы получим следующие решения:

(i) y — произвольное вещественное число и $x + \alpha = 0 \Rightarrow x$ есть отрицательное вещественное число, поскольку α вещественно и положительно;

(ii) $y = 0 \Rightarrow x(x+2\alpha) < 0 \Rightarrow (x+\alpha)^2 < \alpha^2 \Rightarrow x$ отрицательно, поскольку α положительно.

Значит, поскольку вещественная часть собственных значений матрицы коэффициентов $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ отрицательна, предлагаемый метод является безусловно устойчивым.

5. Численные эксперименты

В данном пункте мы представляем численные результаты рассматриваемого метода в применении к нескольким тестовым задачам. Мы также сравниваем наши результаты с результатами, полученными при помощи других имеющихся методов. Точность метода определяется с использованием L_∞-ошибок:

$$L_\infty = \|u - U\|_\infty = \max_i |u_i - U_i|,$$

где u и U — аналитическое и приближенное решения соответственно. Порядок сходимости метода получим по формуле

$$\frac{\log\left(\frac{e_{h1}}{e_{h2}}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)},$$

где e_{h1} и e_{h2} — L_∞-ошибки для шагов сетки h_1 и h_2 соответственно. Вычисления выполнялись с использованием программного обеспечения MATLAB 12 на портативном компьютере с процессором Интел Пентиум 2.0 ГГц ЦПУ и 2 Гбайт оперативной памяти.

Пример 1. Рассмотрим следующее телеграфное уравнение:

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u = u_{xx} + \left(2 - 4t + t^2 + 4\alpha t - 2\alpha t^2 + \beta^2 t^2\right)\left(x - x^2\right)e^{-t} + 2t^2 e^{-t},$$

подчиняющееся начальным условиям:

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

и граничным условиям:

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Аналитическое решение этого примера задается как $u(x,t) = (x - x^2)t^2 e^{-t}$. В этом примере мы решаем телеграфное уравнение для $\Delta t = 0.001$, $h = 0.01$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $p = 2$, и L_∞-ошибки сравниваются с ошибками, полученными в [7] (см. табл. 2). Видно, что численные решения, полученные нашим методом, более точны, чем в [7]. Затем для $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ мы вычисляем ошибки для различных значений p при $t = 2$ (табл. 3). Мы видим, что наименьшая ошибка получается при $p = 1$, однако нет значительного изменения порядка точности.

Таблица 2. L_∞-ошибки, $\Delta t = 0.001$, $h = 0.01$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$

t, c	Предлагаемый метод	Метод Миттала и Бхатиа [7]
1	7.6936e−06	5.9153e−05
2	2.0453e−06	1.7864e−05
3	9.3772e−06	1.4309e−05
4	2.4189e−06	1.3529e−05
5	4.8353e−06	5.2032e−06

Таблица 3. L_∞-ошибки, $\Delta t = 0.4h$ и $t = 2$ для различных значений p

h	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
1/8	1.3234e−04	9.2671e−05	3.1116e−05	5.2352e−04	1.4200e−02
1/16	3.2447e−05	2.2483e−05	8.6799e−06	1.3298e−04	4.0000e−03
1/32	7.8474e−06	5.3496e−06	2.4553e−06	3.3664e−05	1.0000e−03
1/64	1.9250e−06	1.2996e−06	6.5468e−07	8.9042e−06	2.5803e−04

Пример 2. Рассмотрим следующее телеграфное уравнение:

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u = u_{xx} + (2 - 2\alpha + \beta^2)e^{-t}\sin(x),$$

подчиняющееся начальным условиям:

$$u(x, 0) = \sin(x), \qquad u_t(x, 0) = -\sin(x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

и граничным условиям:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Аналитическое решение этого примера задается как $u(x,t) = e^{-t}\sin(x)$. L_∞-ошибки приведены в табл. 4 для $h = 0.02$, $\Delta t = 0.0001$, а также для $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $p = 1$ на различных временных уровнях. Сравним эти результаты с результатами, полученными М. Дости и А. Наземи [9]. Также сравним наши результаты с результатами, полученными М. Дости и А. Наземи в [10] для $h = 0.02$, $\Delta t = 0.001$ на различных временны́х уровнях (табл. 5). Наши результаты лучше тех, которые получены в [9] и [10].

Таблица 4. L_∞-ошибки, $h = 0.02$, $\Delta t = 0.0001$ для $\alpha = 4$, $\beta = 2$

t, с	Предлагаемый метод	Метод Дости и Наземи [9]
0.4	2.3010e−05	2.9000e−03
0.8	6.7857e−06	3.2000e−03
1.2	3.1884e−06	2.8000e−03
1.6	1.1679e−06	2.3000e−03
2	2.3203e−07	1.8000e−03

Таблица 5. L_∞-ошибки при $h = 0.02$ и $\Delta t = 0.001$ для $\alpha = 4$, $\beta = 2$

t, с	Предлагаемый метод	Метод Дости и Наземи [10]
0.5	9.7967e−05	1.0676e−03
1	6.8394e−05	7.1563e−04
1.5	4.6283e−05	4.8126e−04
2	3.1320e−05	2.8398e−04

Пример 3. Рассмотрим следующую нелинейную задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} - 2\alpha u_t - \beta^2 u - \exp(u) + \cos h(x)(\beta^2 t^2 - t^2 + 4\alpha t + 2) + \exp(t^2 \cos h(x)), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

подчиняющуюся начальным условиям:

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

и граничным условиям:

$$u(0,t) = t^2, \qquad u(1,t) = t^2 \cos h(1), \quad t \geq 0.$$

Аналитическое решение этого примера задается как $u(x,t) = t^2 \cos h(x)$. В этом примере мы рассматриваем нелинейное телеграфное уравнение. Вычислим L_∞-ошибки при $t = 1$ для $p = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и возьмем $\Delta t = 0.4h$. Результаты приведены в табл. 6. В табл. 7 для $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ приведены ошибки для различных значений p при $t = 1$. Мы видим, что на точность не очень влияет различный выбор p.

Таблица 6. L_∞-ошибки, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ для $p = 1$

h	L_∞	Порядок сходимости
1/8	1.1300e−02	—
1/16	3.3000e−03	1.8
1/32	9.0441e−04	1.9
1/64	2.1867e−04	2.0

Таблица 7. L_∞-ошибки, $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $t = 1$ для различных значений p

h	$p = 0.1$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
1/8	1.2300e−02	1.2300e−02	1.2300e−02	1.2400e−02	1.5900e−02
1/16	3.5000e−03	3.6000e−03	3.6000e−03	3.6000e−03	4.4000e−03
1/32	9.6083e−04	9.6113e−04	9.6208e−04	9.6589e−04	1.1000e−03
1/64	2.4922e−04	2.4927e−04	2.4940e−04	2.4995e−04	2.7713e−04

Пример 4. Рассмотрим следующее телеграфное уравнение общего вида [4]:

$$u_{tt} + (\alpha+\beta)u_t + \alpha\beta u = c^2 u_{xx} + (1 - \alpha - \beta + \alpha\beta - c^2)(e^{-t}\sin h(x)), \quad 0 \le x \le 1,$$

подчиняющееся начальным условиям:

$$u(x, 0) = \sin h(x), \qquad u_t(x, 0) = -\sin h(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

и граничным условиям:

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = e^{-t}\sin h(1), \quad t \ge 0.$$

Аналитическое решение этого примера задается как $u(x,t) = e^{-t}\sin h(x)$. В этой задаче возьмем различные значения α, β и примем p, c равными 1. L_∞-ошибки приведены в табл. 8 при $t = 5$ и $\Delta t = 0.4h$. На рис. 1 приводятся кривые ошибок для различных шагов сетки при $t = 5$ для $\alpha = \pi$, $\beta = \pi$.

Таблица 8. L_∞-ошибки, $t = 5$

h	$\alpha = 3\pi$, $\beta = \pi$	$\alpha = \pi$, $\beta = \pi$	Порядок сходимости
1/16	3.0127e−05	1.6741e−05	—
1/32	9.0791e−06	4.6353e−06	1.9
1/64	2.5120e−06	1.2241e−06	1.9
1/128	6.6200e−07	3.1151e−07	2.0

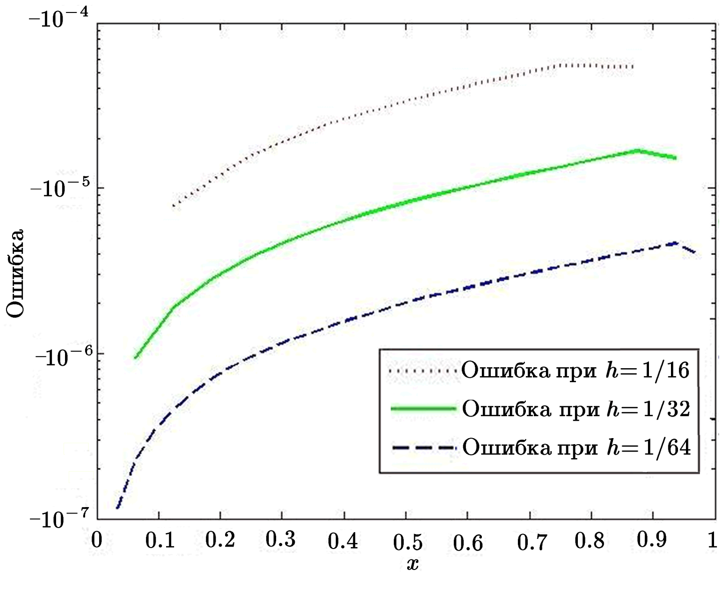

Рис. 1. Кривые ошибок для различных шагов сетки при $t = 5$ для $\alpha = \pi$, $\beta = \pi$

Пример 5. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} - 2\alpha u_t - \beta^2 u + (\beta^2 - 2\alpha)e^{x-t}, \quad 0 \le x \le 1,$$

подчиняющуюся начальным условиям:

$$u(x,0) = e^x, \quad u_t(x,0) = -e^x, \quad 0 \le x \le 1,$$

и граничным условиям:

$$u(0,t) = e^{-t}, \quad u(1,t) = e^{1-t}, \quad t \ge 0.$$

Аналитическое решение этого примера задается как $u(x,t) = e^{x-t}$. В данной задаче мы получим L_∞-ошибки при $t = 5$ для $p = 0.1$, $\Delta t = 0.4h$ и приведем их в табл. 9. В табл. 10 показаны результаты экспериментов с различными значениями p. Мы видим, что L_∞-ошибки и, следовательно, выбор различного p не влияет на порядок точности метода. На рис. 2 приведены кривые ошибок для различных шагов сетки при $t = 5$ для $\alpha = 10$, $\beta = 5$.

Таблица 9. L_∞-ошибки, $t = 5$, $\alpha = 12$, $\beta = 6$ для $p = 0.1$

h	L_∞	Порядок сходимости
1/8	8.0006e−04	—
1/16	1.7892e−04	2.2
1/32	4.6840e−05	1.9
1/64	1.2211e−05	1.9

Таблица 10. L_∞-ошибки, $t = 5$, $\alpha = 10$, $\beta = 5$ при различных значениях p

h	$p = 0.1$	$p = .5$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 10$
1/8	7.3086e−04	7.3045e−04	7.2919e−04	7.2417e−04	5.7892e−04
1/16	1.6646e−04	1.6641e−04	1.6626e−04	1.6564e−04	1.4637e−04
1/32	4.1624e−05	4.1617e−05	4.1598e−05	4.1522e−04	3.9092e−05
1/64	1.0508e−05	1.0507e−05	1.0505e−05	1.0495e−05	1.0194e−05

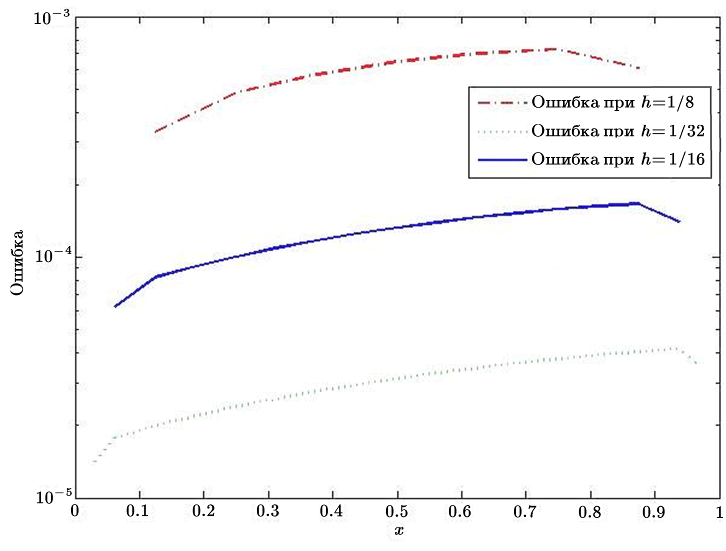

Рис. 2. Кривые ошибок для различных шагов сетки при $t = 5$ для $\alpha = 10$, $\beta = 5$

6. Заключение

В данной статье был разработан метод коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов для решения нелинейного одномерного гиперболического уравнения второго порядка. Сначала это уравнение преобразуется в систему дифференциальных уравнений в частных производных. Затем используется метод коллокации с помощью экспоненциальных B-сплайнов для получения системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которая решается методом SSPRK(2,2). С использованием матричного анализа устойчивости показано, что метод является безусловно устойчивым. Чтобы показать эффективность и точность метода, он был применен к нескольким тестовым задачам, и результаты оказались лучше, чем полученные в других известных работах. Предлагаемый метод является эффективным и может легко применяться для решения различных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Благодарности. Авторы хотели бы поблагодарить рецензентов за ценные комментарии и предложения, которые помогли значительно усовершенствовать рукопись.

Литература

1. **Gao F., Chi C.** Unconditionally stable difference schemes for a one-space-dimensional linear hyperbolic equation // Appl. Math. and Comput. — 2007. — Vol. 187, iss. 2. — P. 1272–1276.
2. **Mohanty R.K.** An unconditionally stable finite difference formula for a linear second order one space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients // Appl. Math. and Comput. — 2005. — Vol. 165, iss. 1. — P. 229–236.
3. **Mohanty R.K., Singh S.** High accuracy Numerov type discretization for the solution of one-space dimensional non-linear wave equations with variable coefficients // J. of Advanced Research in Scientific Computing. — 2011. — Vol. 3. — P. 53–66.
4. **Mohanty R.K., Gopal V.** A fourth-order finite difference method based on spline in tension approximation for the solution of one-space dimensional second-order quasi-linear hyperbolic equations // Advances in Difference Equations. — 2013. — Vol. 70, № 1. — P. 1–20. — DOI: 10.1186/1687-1847-2013-70.
5. **Mohanty R.K.** An unconditionally stable difference scheme for the one-space-dimensional linear hyperbolic equation // Appl. Math. Letters. — 2004. — Vol. 17. — P. 101–105.
6. **Mittal R.C., Bhatia R.** Numerical solution of some nonlinear wave equations using modified cubic B-spline differential quadrature method // Proc. Int. Conf. on Advances in Computing, Communications and Informatics. — 2014. — P. 433–439. — DOI: 10.1109/ICACCI.2014.6968549.
7. **Mittal R.C., Bhatia R.** Numerical solution of second order one dimensional hyperbolic telegraph equation by cubic B-spline collocation method // Appl. Math. and Comput. — 2013. — Vol. 220. — P. 496–506.
8. **Dehghan M., Shokri A.** A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation // Numerical Methods for Partial Differential Equations. — 2008. — Vol. 24, iss. 4. — P. 1080–1093.
9. **Dosti M., Nazemi A.** Quartic B-spline collocation method for solving one-dimensional hyperbolic telegraph equation // J. of Information and Computing Science. — 2012. — Vol. 7, № 2. — P. 83–90.
10. **Dosti M., Nazemi A.** Solving one-dimensional hyperbolic telegraph equation using cubic B-spline quasi-interpolation // Inter. J. of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering — 2011. — Vol. 5, № 4. — P. 674–679.

11. **Ding H., Zhang Y.** Parameters spline methods for the solution of hyperbolic equations // Appl. Math. and Comput. — 2008. — Vol. 204, iss. 2. — P. 938–941.

12. **Liu Li-Bin, Liu Huan-Wen** Compact difference schemes for solving telegraphic equations with Neumann boundary conditions // Appl. Math. and Comput. — 2013. — Vol. 219, iss. 19. — P. 10112–10121.

13. **Kharenko D., Padovani C., Pagni A., Pasquinelli G., and Semin L.** Free longitudinal vibrations of bimodular beams: a comparative study // Int. J. of Structural Stability and Dynamics. — 2011. — Vol. 11, № 1. — P. 23–56.

14. **Mohammadi R.** Exponential B-spline solution of convection-diffusion equations // Appl. Math. — 2013. — Vol. 4, № 6. — P. 933–944.

15. **Ersoy O., Dag I.** The exponential cubic B-spline algorithm for Korteweg-de Vries equation // Advances in Numerical Analysis. — 2015. — http://dx.doi.org/10.1155/2015/367056.

16. **Spiteri R., Ruuth S.** A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods // SIAM J. on Numerical Analysis. — 2002. — Vol. 40, iss. 2. — P. 469–491.

17. **McCartin B.J.** Theory of exponential splines // J. of Approximation Theory. — 1991. — Vol. 66, iss. 1. — P. 1–23.

18. **McCartin B.J.** Computation of exponential splines // SIAM J. on Scientific and Statistical Computing. — 1990. — Vol. 2. — P. 242–262.

19. **Späth H.** Exponential spline interpolation // Computing. — 1969. — Vol. 4. — P. 225–233.

20. **Smith G.D.** Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, 2nd ed. — Oxford: Oxford University Press, 1978.

Поступила в редакцию 20 апреля 2016 г.,
в окончательном варианте 10 ноября 2016 г.