УДК 539.4

ТРЕЩИНА НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА В ОДНОНАПРАВЛЕННОМ КОМПОЗИТЕ

А. М. Михайлов

Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск

Решается плоская статическая упругая задача о концентрации напряжений в однонаправленном дискретном неограниченном композите, ослабленном разрывами волокон на линии, перпендикулярной направлению армирования (аналог задачи Гриффитса в теории упругости). К берегам трещины симметрично приложено нормальное напряжение, на бесконечности — постоянное напряжение. Задача сводится к построению полинома, значения которого в точках разрыва волокон известны. Получено распределение напряжений на линии разрывов в виде дробно-рациональной функции номера волокна.

Ключевые слова: композит, разрыв волокон, трещина, концентрация напряжений.

1. Пусть на бесконечности к армирующим волокнам приложено напряжение σ, а разрывы симметрично нагружены напряжением P_j (j — номер волокна). Предполагается, что волокна работают только на растяжение-сжатие как одномерные стержни, а связующее — только на сдвиг на площадках, параллельных направлению армирования. Если обозначить смещение j-го волокна в направлении армирования через v_j, то уравнения равновесия запишутся в безразмерном виде

$$\frac{d^2 v_j}{d\,y^2} + \beta^2 (v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}) = 0, \qquad -\infty < j < \infty. \tag{1.1}$$

Здесь $\beta^2 = \mu H/(Eh)$ — отношение жесткости связующего на сдвиг к жесткости волокна на растяжение; μ — модуль сдвига связующего; E — модуль Юнга волокна; h — ширина волокна; величины, имеющие размерность длины (смещения v_j и координата y вдоль волокна) отнесены к ширине связующего H.

Трещина представляет собой совокупность разрывов M волокон при $y = 0$, $L + 1 \leqslant j \leqslant L + M$. На продолжении трещины смещения равны нулю, на самой трещине и на бесконечности заданы напряжения:

$$v_j(0) = 0, \qquad -\infty < j \leqslant L, \quad L + M + 1 \leqslant j < \infty,$$

$$E\,\frac{dv_j}{dy}(0) = P_j, \quad L + 1 \leqslant j \leqslant L + M, \qquad E\,\frac{dv_j}{dy}(\infty) = \sigma.$$

Такая задача, по-видимому впервые, исследована в работе [1] для случая свободной трещины ($P_j = 0$). Сначала было получено решение для трещины, состоящей из одного разрыва. С помощью этого фундаментального решения задача о трещине из M волокон свелась к системе уравнений

$$\sum_{s=L+1}^{L+M} \frac{b_s}{(j-s)^2 - 1/4} = -1, \qquad L + 1 \leqslant j \leqslant L + M, \tag{1.2}$$

где $L + 1 \leqslant s \leqslant L + M$ — номера разорванных волокон. (Здесь и далее обозначения работы [1] несущественно изменены для единообразия всех формул.) Единица в правой части (1.2) — безразмерное напряжение на бесконечности. Смещения верхнего берега трещины (т. е. половина раскрытия) выражаются через b_s в виде $v_s(0) = \sigma\pi\beta b_s/\mu$. Все напряжения отнесены к σ. Зная b_s, можно вычислить концентрацию напряжения в j-м волокне на линии разрывов в целых волокнах:

$$Q_j = 1 + \sum_{s=L+1}^{L+M} \frac{b_s}{(j-s)^2 - 1/4}, \tag{1.3}$$

причем напряжения отнесены к напряжению на бесконечности.

Примеры с малым числом разорванных волокон ($-n \leqslant s \leqslant n$, $n = 0, 1, 2$), приведенные в [1], позволили авторам, не решая в общем случае систему (1.2), заметить закономерность для концентрации напряжений в первом неразорванном волокне:

$$Q_{n+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2n+3)}{\Gamma(2n+5/2)} \tag{1.4}$$

(Γ — гамма-функция). Для любого числа разорванных волокон решение системы (1.2) получено в виде [2]

$$b_j = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(n-j+3/2)\Gamma(n+j+3/2)}{\Gamma(n-j+1)\Gamma(n+j+1)}. \tag{1.5}$$

В [2] доказана формула (1.4) и получены выражения для концентрации напряжений в двух последующих волокнах (как и в [1] в случае однородного растяжения):

$$Q_{n+2} = (n+2)\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2n+3)}{\Gamma(2n+7/2)}, \qquad Q_{n+3} = (n+3)\frac{3\sqrt{\pi}}{2^3} \frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(2n+9/2)}.$$

По трем значениям Q_{n+1}, Q_{n+2}, Q_{n+3} удалось записать формулу для напряжения в любом волокне

$$Q_{n+k} = (n+k)\frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(k)} \frac{\Gamma(2n+1+k)}{\Gamma(2n+1+k+1/2)}, \qquad k \geqslant 1. \tag{1.6}$$

В работе [2] формула (1.6) не доказана, но любая численная проверка с использованием (1.2), (1.3) подтверждает ее справедливость.

Решение системы (1.2) и получение формул для Q_{n+1}, Q_{n+2}, Q_{n+3} в [2] основаны на том, что последовательные множители в знаменателях каждой строки матрицы (1.2) образуют арифметическую прогрессию, а правые части постоянны. Решить задачу при переменных P_j не удалось. Ниже при решении задачи (1.2), (1.3) используется то обстоятельство, что дробно-рациональная функция от j в правой части (1.3) разлагается на не слишком много простейших дробей. То есть если количество простейших дробей меньше удвоенного числа разорванных волокон, задача сводится к системе меньшего порядка, чем (1.2). В случае, когда интерес представляют только напряжения (1.3), можно не решать систему (1.2) для предварительного нахождения смещений берегов трещины b_s (см., например, [1]). Далее случаи растяжения на бесконечности и нагружения разорванных волокон в месте разрыва рассматриваются отдельно.

2. Будем считать, что трещина свободна, а напряжение приложено на бесконечности. Правую часть (1.3) рассмотрим как функцию индекса j. После приведения всех дробей к общему знаменателю выясняется, что эта функция является отношением полиномов, причем корни знаменателя равны $L + 1/2, \ldots, L + M + 1/2$. На бесконечности концентрация напряжений Q_j стремится к единице, вследствие чего старшие члены полиномов в числителе и знаменателе одинаковы. Часть корней числителя известна, так как Q_j обращается в нуль в точках $L+1 \leqslant j \leqslant L+M$ (свободная трещина). Поэтому можно с точностью до множителя $j-a$ записать концентрацию напряжений в j-м волокне в виде

$$Q_j = \frac{j-a}{j-L-1/2} \prod_{s=L+1}^{L+M} \frac{j-s}{j-s-1/2} \tag{2.1}$$

(a — неизвестная пока константа). Представление (2.1) позволяет упростить систему (1.2). Разлагая на простейшие дроби сумму по разорванным волокнам в правой части (1.3), получаем

$$Q_j - 1 = \frac{-b_{L+1}}{j-L-1/2} + \frac{b_{L+1}-b_{L+2}}{j-L-3/2} + \ldots + \frac{b_{L+M-1}-b_{L+M}}{j-L-3/2} + \frac{b_{L+M}}{j-L-M-1/2}. \tag{2.2}$$

После разложения (2.1) на простейшие дроби для той же величины $Q_j - 1$ имеем

$$Q_j - 1 = \sum_{s=L}^{L+M} \frac{A_s}{j-s-1/2}. \tag{2.3}$$

Поскольку корни знаменателя в (2.1) простые, коэффициенты разложения (2.3) вычисляются по формулам

$$A_s = \lim_{j\to s+1/2} \frac{(j-s-1/2)(j-a)}{j-L-1/2} \prod_{r=L+1}^{L+M} \frac{j-r}{j-r-1/2} =$$

$$= (s+1/2-a) \prod_{r=L+1}^{L+M} (s+1/2-r) \Big/ \prod_{r=L, r\neq s}^{L+M} (s-r). \tag{2.4}$$

Сравнение коэффициентов в (2.2) и (2.3) приводит к двухдиагональной системе для нахождения величин b_j, определяющих раскрытие трещины:

$$\begin{aligned} -b_{L+1} &= A_L, \\ b_{L+1} - b_{L+2} &= A_{L+1}, \\ b_{L+2} - b_{L+3} &= A_{L+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{L+M-1} - b_{L+M} &= A_{L+M-1}, \\ b_{L+M} &= A_{L+M}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В правую часть (2.5) входит неизвестный пока параметр a. Сложив все уравнения (2.5), исключаем раскрытие трещины и получаем линейное уравнение для определения a. Определив константу a, подставим ее в формулу (2.1) и получим распределение напряжений на линии разрывов. Правая часть (2.5) становится известной, и величины b_s последовательно вычисляются. После необходимых вычислений имеем

$$a = L + \frac{M+1}{2}, \qquad Q_j = \frac{j-L-1/2-M/2}{j-L-1/2} \prod_{s=L+1}^{L+M} \frac{j-s}{j-s-1/2}. \tag{2.6}$$

Выражение для a в (2.6) свидетельствует о симметрии напряжений относительно центра трещины. Пусть $L = -n-1$, $M = 2n+1$, $j = n+k$ (трещина образована разорванными волокнами от $-n$ до n). Тогда получим формулу (1.6), которую теперь можно считать доказанной. Подстановка (1.5), (1.6) в (1.3) приводит к числовому тождеству

$$\sum_{s=-n}^{n} \frac{\Gamma(n-s+3/2)\Gamma(n+s+3/2)}{\Gamma(n-s+1)\Gamma(n+s+1)} \frac{1/\pi}{(j-s)^2-1/4} = -1 + j\, \frac{\Gamma(j-n-1/2)}{\Gamma(j-n)} \frac{\Gamma(j+n+1)}{\Gamma(j+n+3/2)}.$$

3. Рассмотрим случай $\sigma = 0$. Вместо (1.2), (2.3) получим равенства

$$\sum_{s=L+1}^{L+M} \frac{b_s}{(j-s)^2-1/4} = P_j, \quad L+1 \leqslant j \leqslant L+M, \qquad Q_j = \sum_{s=L+1}^{L+M} \frac{b_s}{(j-s)^2-1/4}. \tag{3.1}$$

При этом считается, что напряжения отнесены к $\max\limits_j |P_j|$, где $L+1 \leqslant j \leqslant L+M$.

Так же как в п. **2**, правая часть (3.1) — дробно-рациональная функция j, в знаменателе которой стоит полином степени $M+1$, тот же, что и в (2.6), а в числителе — полином степени $M-1$, так как правая часть (3.1) при $j \to \infty$ убывает асимптотически пропорционально $\sum\limits_{s=L+1}^{L+M} b_s \,/ j^2$. Последнее утверждение справедливо, если $\sum\limits_{s=L+1}^{L+M} b_s \neq 0$ (иначе убывание будет более быстрым). Порядок убывания определяется нагрузками P_j на трещине. Например, если нагрузки антисимметричны относительно центра трещины, то смещения также антисимметричны и указанная сумма равна нулю. Если нагрузка постоянна, то эта сумма пропорциональна работе внешних сил, которая равна упругой энергии среды, описываемой уравнениями (1.1), и поэтому отлична от нуля. Достаточно ясно, что если нагрузка на трещине не меняет знака, то асимптотическое поведение Q_j при $j \to \infty$ будет таким же, как в случае одного разрыва, нагруженного суммарной силой. В (1.6) положим $n = 0$ (что соответствует одному разрыву) и из полученного результата вычтем единицу (для того чтобы перейти от случая нагрузки на бесконечности к нагрузке на разрыве нулевого волокна). Тогда $Q_j = 1/(4j^2-1)$, т. е. асимптотически выполняется закон обратных квадратов. Следовательно, если напряжения P_j одного знака, то $\sum\limits_{s=L+1}^{L+M} b_s \neq 0$. В дальнейшем будем полагать это условие выполненным.

Таким образом,

$$Q_j = \sum_{s=0}^{M-1} a_s j^s \Big/ \prod_{s=L}^{L+M} (j-s-1/2), \tag{3.2}$$

где a_s — неизвестные пока коэффициенты. Для их нахождения имеем систему M равенств

$$\sum_{s=0}^{M-1} a_s j^s \big|_{j=L+l} = P_{L+l} \prod_{s=L}^{L+M} (L+l-s-1/2), \qquad l = 1, \ldots, M. \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует, что полином в числителе (3.2) является интерполяционным полиномом с узлами $L+1, \ldots, L+M$, в которых он принимает значения (3.3). Следовательно, числитель можно записать в явном виде, например в форме Лагранжа [3, с. 35].

Пусть на трещине единичным напряжением нагружено только одно r-е волокно $(L+1 \leqslant r \leqslant L+M)$, а остальные волокна свободны: $P_j = \delta_{jr}$ (δ_{jr} — символ Кронекера). В этом случае все нагрузки одного знака. Как показано выше, сумма $\sum\limits_{s=L+1}^{L+M} b_s \neq 0$ и представление (3.2) справедливо. В интерполяционном многочлене остается одно слагаемое, а распределение напряжений принимает вид

$$Q_j = \prod_{l=L}^{L+M} \frac{r-l-1/2}{j-l-1/2} \prod_{k=L+1,\, k\neq r}^{L+M} \frac{j-k}{r-k}. \tag{3.4}$$

Для произвольной нагрузки решение получается линейной комбинацией таких решений с различными r.

В (3.4) положим $L=-n-1$, $M=2n+1$, $r=0$, $n\geqslant 0$ (симметричная трещина расположена от $-n$-го до n-го волокна, и нагружено центральное волокно). Тогда получим следующее распределение напряжений:

$$Q_j = -\prod_{l=0}^{n} \frac{(l+1/2)^2}{j^2-(l+1/2)^2} \prod_{l=1}^{n} \frac{j^2-l^2}{l^2} = -\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}\Big)^2 \frac{\Gamma(j+n+1)\,\Gamma(j-n-1/2)}{j\Gamma(j+n+3/2)\,\Gamma(j-n)}.$$

В частности, в первом целом волокне ($j=n+1$) имеем

$$Q_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}\Big)^2 \frac{\Gamma(2n+2)}{(n+1)\,\Gamma(2n+5/2)}.$$

Легко проверить, что $Q_{n+2}/Q_{n+1}<1$, и, следовательно, Q_{n+1} является убывающей функцией n, т. е. с увеличением длины трещины при фиксированной нагрузке напряжение в первом целом волокне падает. Для разрыва очередного волокна нагрузку приходится увеличивать. Это означает, что трещина в данном случае является устойчивой в отличие от случая равномерного нагружения (в (1.4) Q_{n+1} увеличивается с ростом n).

Для определения раскрытий получается та же система (2.5), но с другими правыми частями. В этом случае для нахождения A_s нужно заменить в формуле (2.4) выражение под знаком предела на правую часть (3.4). Тогда получим

$$A_s = \prod_{l=L}^{L+M} (r-l-1/2) \prod_{k=L+1,\, k\neq r}^{L+M} \frac{s-k+1/2}{r-k} \Big/ \prod_{l=L,\, l\neq s}^{L+M} (s-l).$$

В данном случае, в отличие от п. **2**, коэффициенты A_s не содержат неопределенных элементов.

4. Допустим, что разрывы сгруппированы в несколько трещин, при этом ограничимся случаем $P_j=0$, $\sigma\neq 0$. Рассуждения такие же, как в п. **2**. Однако следует отметить, что при появлении каждой новой трещины степень полинома в знаменателе (2.1) увеличивается на единицу. Соответственно должна расти и степень полинома в числителе. Выражение для концентрации напряжений аналогично (2.1), но в числителе вместо одного множителя $j-a$ нужно взять произведение нескольких множителей вида $(j-a_1), (j-a_2), (j-a_3), \ldots$, содержащих неопределенные параметры $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Введение этих множителей обеспечивает необходимое увеличение степени полинома в числителе. Вместо (2.5) будем иметь несколько аналогичных систем. Сложив уравнения в каждой из них, получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \ldots$. В результате получим столько же уравнений для нахождения решения, сколько имеется трещин (число разорванных волокон не имеет значения). В частности, если все разрывы расположены изолированно, то получаем систему того же порядка M, что исходная система (1.2).

Рассмотрим две трещины, расположенные симметрично относительно нулевого волокна. Правая трещина охватывает волокна $j=L+1,\ldots,L+M$. Тогда вместо (2.1) будем иметь

$$Q_j = (j^2-a^2) \prod_{s=L+1}^{L+M} (j^2-s^2) \Big/ \prod_{s=L}^{L+M} (j^2-(s+1/2)^2), \tag{4.1}$$

а вместо системы (2.5) — аналогичную ей систему. Симметрия приводит к тому, что вместо двух неизвестных чисел a_1, a_2 в решение входит единственный параметр a^2. В результате получим явное выражение

$$a^2 = \sum_{s=L}^{L+M} (s+1/2)^2 R_s \Big/ \sum_{s=L}^{L+M} R_s,$$

$$R_s = \prod_{k=L+1}^{L+M} ((s+1/2)^2 - k^2) \Big/ (2s+1) \prod_{k=L,\, k\neq s}^{L+M} (s-k)(s+k+1). \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что величина a^2 получается путем усреднения с весами R_s квадратов полуцелых чисел $s+1/2$ ($L \leqslant s \leqslant L+M$). Согласно общим свойствам средних величина a лежит в пределах $L+1/2 \leqslant a \leqslant L+M+1/2$.

Рассмотрим частный случай $M=1$ (разорваны волокна с номерами $\pm(L+1)$). Тогда из формулы (4.2) получаем

$$a^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(2L+1)(2L+3/2)+(2L+3)(2L+5/2)}{2+1/((2L+1)(2L+3))}.$$

Наконец, если $L=0$, $M=1$ (разорваны волокна справа и слева по соседству с нулевым), то $a^2=27/28$. Запишем (4.1) для этого случая

$$Q_j = (j^2-27/28)(j^2-1)/[(j^2-1/4)(j^2-9/4)] \tag{4.3}$$

и сравним (4.3) с произведением распределений напряжений, создаваемых каждым разрывом без учета их взаимодействия (нужно перемножить Q_j из (2.6), взяв сначала $L=-2$, $M=1$, затем $L=0$, $M=1$):

$$Q_j = (j^2-1)(j^2-1)/[(j^2-1/4)(j^2-9/4)]. \tag{4.4}$$

В месте наибольшей концентрации ($j=0$) из (4.3) и (4.4) получаем соответственно значения 12/7 и 16/9, которые различаются на 3,7 %. С увеличением L взаимодействие разрывов ослабевает и погрешность такого приближенного вычисления уменьшается. По-видимому, в общем случае также можно с приемлемой точностью заменить концентрацию напряжений от нескольких изолированных разрывов произведением концентраций, создаваемых каждым разрывом независимо.

Приведем еще один пример. Пусть разорваны волокна с номерами $j=-2,-1,1,2$. Тогда в (4.1) $L=0$, $M=2$, $a^2=2{,}12$. В этом случае влияние трещин друг на друга существенно: погрешность формулы, не учитывающей взаимодействия, равна 6,14 %.

Из (2.6), (4.1) следует, что отношение точного и приближенного решений равно $(j^2-a^2)/(j^2-(L+(M+1)/2)^2)$ и тем ближе к единице, чем ближе среднеквадратичное a к координате средней точки трещины, расположенной справа от нулевого волокна. Последнее справедливо и при достаточно больших по модулю номерах волокон.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hedgepeth I. M., Van Dyke P.** Local stress concentration in imperfect filamentary composite materials // J. Compos. Mater. 1967. V. 1, N 3. P. 294–309.
2. **Михайлов А. М.** О разрушении однонаправленного стеклопластика // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. № 5. С. 131–139.
3. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 22/VIII 2003 г.