

УДК 539.375

ОБ ОДНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛЕНИЯ

В. В. Глаголев, А. А. Маркин

Тульский государственный университет, 300600 Тула

E-mails: vadim@tsu.tula.ru, markin@uic.tula.ru

Рассмотрена задача о начале движения разреза в плоскости под действием внешней симметричной нагрузки. Материал, лежащий на продолжении разреза, образует слой (слой взаимодействия). Предполагается возможным переход в пластическое состояние в пределах слоя. Поведение слоя описывается в рамках идеально упругопластической модели, плоскость вне слоя считается линейно-упругой. Получена система граничных интегральных уравнений для определения напряженно-деформированного состояния. На основе этой системы строится дискретная модель разделения материала слоя в предположении постоянства напряженно-деформированного состояния в элементе слоя взаимодействия. Определено распределение напряжений в зоне предразрушения.

Ключевые слова: характерный размер, граничное интегральное уравнение, линейная упругость, идеально упругопластическая модель.

В механике разрушения можно выделить две модели образования материальных поверхностей. Первой, наиболее полно изученной, является модель движения математического разреза в сплошной среде [1]. Вторая модель рассматривает движение физического разреза на определенном масштабном уровне [2, 3]. В большинстве тел процесс возникновения новых материальных поверхностей сопровождается образованием пластических зон в области предразрушения. Одной из моделей с областью пластического деформирования является модель Дагдейла [4]. В этом случае зона пластической деформации ассоциируется с узкой полосой нулевой толщины, расположенной на продолжении трещины. На берегах полосы действуют постоянные напряжения, равные пределу текучести материала. В этом случае согласно критерию Треска для плоской деформации и плоского напряженного состояния формально имеет место один и тот же механизм пластического течения, а именно: в системе координат, показанной на рис. 1, растягивающее напряжение равно пределу текучести ($\sigma_{11} = 2\tau_s$). Отметим, что имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о существенном различии форм пластической области для плоского напряженного состояния и плоской деформации. Это объясняется влиянием напряжения σ_{22} , распределенного вдоль оси разреза [5]. Согласно [5] для состояния плоской деформации в концевой области трещины имеем $\sigma_{11} > \sigma_{33} > \sigma_{22}$, для плоского напряженного состояния — $\sigma_{11} > \sigma_{22} > \sigma_{33} = 0$. В плоском деформированном состоянии $\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2\tau_s$, в плоском напряженном состоянии $\sigma_{11} = 2\tau_s$.

В данной работе процесс образования новых материальных поверхностей рассматривается как движение физического разреза в сплошной среде. Материал, лежащий на продолжении физического разреза, образует слой взаимодействия. Напряженно-

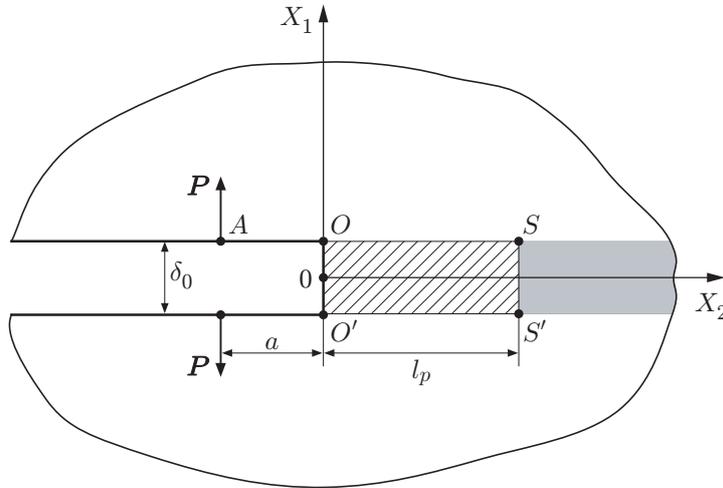


Рис. 1. Схема разрушения

деформированное состояние считается однородным по толщине слоя [6, 7]. В рамках гипотезы сплошности [6, 7] толщина слоя взаимодействия δ_0 полагается минимально допустимой. Будем считать, что материал слоя может переходить в пластическое состояние.

Постановка задачи. Рассмотрим условия начала движения физического разреза (см. рис. 1). Предполагается возможным переход материала в пластическое состояние в части слоя взаимодействия ($OSS'O'$ на рис. 1) длиной l_p . Наряду с напряжением $\sigma_{11}(x_2)$ в слое учитывается напряжение $\sigma_{22}(x_2)$ вдоль оси разреза. Полагается, что связь между напряжениями и деформациями вне слоя взаимодействия описывается соотношениями линейной теории упругости для случая плоского деформирования ($\epsilon_{33} = 0$). Поведение материала слоя рассматривается в рамках идеально упругопластической модели [8].

Критерием перехода из упругого состояния в пластическое будем считать достижение максимальным касательным напряжением критического значения:

$$\max |\sigma_{ii} - \sigma_{jj}| = 2\tau_s. \tag{1}$$

Здесь τ_s — предел текучести; $i, j = 1, 2, 3$.

В силу симметрии задачи рассмотрим только верхнюю полуплоскость $x_1 \geq \delta_0/2$ (рис. 2), а действие слоя на полуплоскость заменим нагрузкой на нее:

$$\mathbf{q}(x) = -(\hat{\sigma}_{11}\mathbf{e}_1 + \hat{\sigma}_{21}\mathbf{e}_2)$$

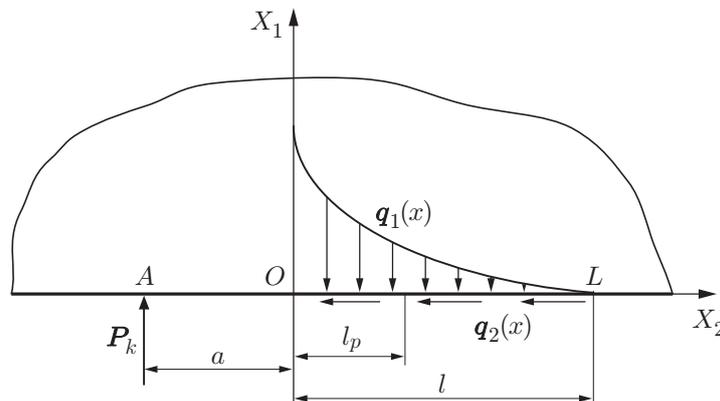


Рис. 2. Распределение нагрузок на разрезе

($x \equiv x_2/\delta_0$ — безразмерная координата; $\hat{\sigma}_{ij} = \beta\sigma_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) — безразмерные напряжения; $\beta = 2(1 - \nu^2)/(\pi E)$ — параметр материала для задачи Фламана [9] при плоской деформации; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона).

Соотношения Фламана [9] связывают внешние нагрузки $\hat{\sigma}_{11}$ и $\hat{\sigma}_{12}$ с перемещениями границы полуплоскости:

$$\hat{u}_1(x) = -\hat{P} \ln \frac{x+a}{l+a} + \int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{l-\xi} d\xi; \quad (2)$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{l-\xi} d\xi. \quad (3)$$

Здесь $\hat{u}_i = u_i/\delta_0$ ($i = 1, 2$) — безразмерные перемещения; $\hat{P} = P\beta/\delta_0$ — безразмерная сила на единицу толщины; l — расстояние от начала координат до точки L , в которой перемещение равно нулю.

Основным постулатом модели слоя взаимодействия [6] является положение об однородности напряженно-деформированного состояния по толщине слоя. Поэтому из условия равновесия следует

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}. \quad (4)$$

Перемещения границ слоя определяются из условий

$$\hat{u}_1(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{11}(x); \quad (5)$$

$$\hat{u}_2(x) = \int_l^x \varepsilon_{22}(x) dx. \quad (6)$$

Напряжения (до момента достижения предела текучести) связаны с деформациями законом Гука

$$\varepsilon_{11} = A\hat{\sigma}_{11} - B\hat{\sigma}_{22}; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{22} = A\hat{\sigma}_{22} - B\hat{\sigma}_{11}, \quad (8)$$

где $A = \pi/2$, $B = \nu\pi/(2(1 - \nu))$ — безразмерные постоянные.

В условиях плоского деформирования в зоне предразрушения имеем $\sigma_{11} > \sigma_{33} \geq \sigma_{22}$ [5]. Следовательно, критерий текучести Треска (1) для данной схемы нагружения определяется выражением

$$\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = 2\hat{\tau}_s, \quad (9)$$

где $\hat{\tau}_s = \beta\tau_s$ — безразмерный предел текучести.

Продифференцируем по x выражение (3):

$$\varepsilon_{22} = \frac{d\hat{u}_2}{dx} = \int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi. \quad (10)$$

С учетом (5) выражение (2) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_{11} = -2\hat{P} \ln \frac{x+a}{l+a} + 2 \int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{l-\xi} d\xi. \quad (11)$$

В силу того что граница слоя разделяет области упругого и пластического деформирования, соотношения (10), (11) определяют полные деформации слоя взаимодействия на стадии как упругого, так и упругопластического деформирования. Будем полагать деформации малыми и при упругопластическом деформировании считать справедливым следующее разложение:

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e + \varepsilon_{ii}^p, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\varepsilon_{ii}^e, \varepsilon_{ii}^p$ — упругая и пластическая составляющие полной деформации.

В момент перехода из упругого состояния в пластическое выполняется критерий (9). С учетом (7), (8) выражения для упругих составляющих полной деформации в слое принимают вид

$$\varepsilon_{11}^e = A\hat{\sigma}_{11}^e - B\hat{\sigma}_{22}^e, \quad \varepsilon_{22}^e = A\hat{\sigma}_{22}^e - B\hat{\sigma}_{11}^e,$$

где $\hat{\sigma}_{11}^e, \hat{\sigma}_{22}^e$ — напряжения, соответствующие переходу в пластическое состояние.

Будем полагать, что упругая и пластическая составляющие поперечной деформации равны нулю: $\varepsilon_{33}^e = 0, \varepsilon_{33}^p = 0$, и считать, что материал пластически несжимаем:

$$\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p = 0.$$

С учетом формул (10), (11), а также условия $\varepsilon_{33} = 0$ определим изменение объема вдоль слоя за счет движения “стенок” ограничивающего его упругого пространства:

$$\int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi + 2 \int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{l-\xi} d\xi - 2\hat{P} \ln \frac{x+a}{l+a} = \varepsilon_{11}(x) + \varepsilon_{22}(x) = \theta(x). \quad (12)$$

Отметим, что представление (12) справедливо как при упругом, так и при упругопластическом деформировании слоя. Закон изменения объема слоя можно представить в виде

$$\theta(x) = \begin{cases} \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p, & 0 \leq x \leq l_p, \\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, & x > l_p. \end{cases}$$

В силу пластической несжимаемости получаем

$$\theta(x) = \begin{cases} \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e, & 0 \leq x \leq l_p, \\ \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, & x > l_p. \end{cases}$$

Используя закон Гука (7), (8), закон изменения объема представим в виде

$$\theta(x) = (A - B)(\hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22}). \quad (13)$$

Из условий равенства изменений объема в выражениях (12), (13) и условия равновесия элемента слоя (4) получим следующую систему уравнений:

$$\int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi + 2 \int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{l-\xi} d\xi - 2\hat{P} \ln \frac{x+a}{l+a} = \theta(x),$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}. \quad (14)$$

В упругопластической области на отрезке $0 \leq x \leq l_p$ к системе (14) добавляется условие текучести Треска (9). В результате система интегральных и дифференциальных уравнений (14), (9) становится замкнутой и принимает вид

$$\int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi + 2 \int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{l-\xi} d\xi - 2\hat{P} \ln \frac{x+a}{l+a} = \frac{\pi(\hat{\tau}_s + \hat{\sigma}_{22}(x))(1-2\nu)}{1-\nu},$$

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{21}, \quad \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = 2\hat{\tau}_s. \quad (15)$$

В упругой области, где $x > l_p$ и $\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} < 2\hat{\tau}_s$, к системе (14) добавляется условие равенства деформаций ε_{22} вдоль слоя, вычисляемых из выражения (10) и непосредственно из закона Гука (8). В результате система разрешающих уравнений имеет вид

$$\int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi + 2 \int_0^l \hat{\sigma}_{11}(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{l-\xi} d\xi - 2\hat{P} \ln \frac{x+a}{l+a} = \frac{\pi(\hat{\sigma}_{11}(x) + \hat{\sigma}_{22}(x))(1-2\nu)}{2(1-\nu)},$$

$$\hat{A}\hat{\sigma}_{22} - \hat{B}\hat{\sigma}_{11} = \int_0^l \hat{\sigma}_{12}(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi, \quad \frac{\partial \hat{\sigma}_{22}}{\partial x} = -2\hat{\sigma}_{12}. \quad (16)$$

Основными неизвестными систем (15), (16) являются компоненты тензора напряжения, а также длина пластической области. Предполагается, что торцевая плоскость начального разреза не нагружена:

$$\hat{\sigma}_{22}|_{x=0} = 0. \quad (17)$$

Дискретная модель деформирования слоя взаимодействия. Следуя [10], при решении задачи будем считать, что разрушение твердого тела — дискретный процесс, поэтому в элементе слоя взаимодействия длиной δ_0 или единичной безразмерной длины напряженное состояние будем полагать однородным.

Для построения решения задачи с использованием дискретной модели разобьем границу полуплоскости OL на N единичных элементов. Каждый элемент границы k с координатами ξ_{k-1}, ξ_k , где $k = 1, \dots, N$, характеризуется постоянным (средним по элементу) значением напряжений $\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}$, определяемым следующим образом:

$$\sigma_{ij}^{(k)}(x_{(k)}) = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} \hat{\sigma}_{ij}(\xi) d\xi, \quad x_{(k)} = \frac{\xi_k + \xi_{k-1}}{2}.$$

В результате интегралы в уравнениях систем (15), (16) будут представлены в виде соответствующих сумм. Для дискретизации уравнения равновесия (4) проинтегрируем его по k -му элементу. В результате получаем $\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}$, а для первого элемента с учетом (17) имеем $\sigma_{22}^{(1)} = -2\sigma_{21}^{(1)}$. Следует отметить, что данный подход имеет сходство с методом граничных элементов [9] с постоянной аппроксимацией. Основное отличие данного подхода заключается в том, что разбиение границы полуплоскости OL на элементы меньшего размера не имеет смысла. На размер δ_0 накладывает ограничение гипотеза сплошности.

Таким образом, на основе систем уравнений (15), (16) получаем дискретную модель упругопластического деформирования слоя взаимодействия, в которой первые l элементов

находятся в пластическом состоянии, $(l+1)$ -й элемент переходит в пластическое состояние, а остальные элементы деформируются упруго. Данная модель состоит из трех систем:

1) уравнения, описывающие пластическую область:

$$\sum_{i=1}^N \sigma_{12}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x(i) - \xi} d\xi + 2 \sum_{i=1}^N \sigma_{11}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x(i) - \xi|}{n - \xi} d\xi - 2P_{l+1} \ln \frac{x+a}{n+a} =$$

$$= \frac{\pi(\hat{\tau}_s + \hat{\sigma}_{22}^{(k)})(1 - 2\nu)}{1 - \nu}, \quad (18)$$

$$\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} = 2\hat{\tau}_s, \quad k = 1, \dots, l, \quad \sigma_{22}^{(0)} = 0;$$

2) уравнения, описывающие переход $(l+1)$ -го элемента из упругого состояния в пластическое:

$$\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} = 2\hat{\tau}_s,$$

$$\sum_{i=1}^N \sigma_{12}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x(i) - \xi} d\xi + 2 \sum_{i=1}^N \sigma_{11}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x(i) - \xi|}{l - \xi} d\xi - 2P_{l+1} \ln \frac{x+a}{n+a} =$$

$$= \frac{\pi(\sigma_{11}^{(k)}(x(k)) + \sigma_{22}^{(k)}(x(k)))(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)}, \quad (19)$$

$$A\sigma_{22}^{(k)}(x(k)) - B\sigma_{11}^{(k)}(x(k)) = \sum_{i=1}^N \sigma_{12}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x(i) - \xi} d\xi,$$

$$\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = l + 1;$$

3) уравнения, описывающие упругую область:

$$\sum_{i=1}^N \sigma_{12}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x(i) - \xi} d\xi + 2 \sum_{i=1}^N \sigma_{11}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \ln \frac{|x(i) - \xi|}{l - \xi} d\xi - 2P_{l+1} \ln \frac{x+a}{n+a} =$$

$$= \frac{\pi(\sigma_{11}^{(k)}(x(k)) + \sigma_{22}^{(k)}(x(k)))(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)}, \quad (20)$$

$$A\sigma_{22}^{(k)}(x(k)) - B\sigma_{11}^{(k)}(x(k)) = \sum_{i=1}^N \sigma_{12}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x(i) - \xi} d\xi,$$

$$\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k-1)} = -2\sigma_{21}^{(k)}, \quad k = l + 2, \dots, N.$$

Отметим, что система (19) содержит как условие равенства продольных упругих деформаций

$$A\sigma_{22}^{(l+1)}(x(k)) - B\sigma_{11}^{(l+1)}(x(k)) = \sum_{i=1}^N \sigma_{12}^{(i)}(x(i)) \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \frac{1}{x(i) - \xi} d\xi,$$

так и условие достижения пластического состояния

$$\sigma_{11}^{(l+1)} - \sigma_{22}^{(l+1)} = 2\hat{\tau}_s.$$

Кроме того, при развитом пластическом течении учитывалось перераспределение напряжений, и если для элемента среды оказывалось, что $\sigma_{22}^{(l)} > \sigma_{33}^{(l)}$, то для этого элемента критерий (1) принимался в виде $\sigma_{11}^{(l)} - \sigma_{33}^{(l)} = 2\hat{\tau}_s$.

Полная система дискретного деформирования, состоящая из подсистем (18)–(20), содержит $3N + 1$ уравнение. Неизвестными являются $3N$ обобщенных напряжений и критическая сила P_{l+1} , обеспечивающая существование данного напряженного состояния.

Решать полученную систему линейных уравнений относительно $3N$ обобщенных напряжений и критической силы P_{l+1} в силу существенной физической нелинейности задачи предлагается итерациями. При построении итерационного процесса для зоны $l + 1$ и критической нагрузки P_{l+1} используем известное решение для зоны l и нагрузки P_l . В этом случае в качестве итерационного параметра используем значение напряжения σ_{22} в первом уравнении системы (18) на первом элементе. В нулевом приближении напряжение $\sigma_{22}^{(1)}(P_{l+1})$ в правой части первого уравнения системы (18) равно напряжению $\sigma_{22}^{(1)}(P_l)$. Напомним, что $\sigma_{22}^{(1)}(P_l)$ есть напряжение на первом элементе, соответствующее нагрузке P_l . Решая систему (18)–(20) при условии $\sigma_{22}^{(1)}(P_{l+1}) = \sigma_{22}^{(1)}(P_l)$ для первого уравнения системы (18), находим распределения напряжений ${}^{(0)}\sigma_{ij}^k$, $k = 1, \dots, N$ и внешней нагрузки ${}^{(0)}P_{l+1}$ в нулевом приближении. По найденному значению ${}^{(0)}\sigma_{22}^{(1)}({}^{(0)}P_{l+1})$ построим первое приближение решения системы (18)–(20) при условии ${}^{(1)}\sigma_{22}^{(1)}(P_{l+1}) = {}^{(0)}\sigma_{22}^{(1)}({}^{(0)}P_{l+1})$ и определим распределения напряжений ${}^{(1)}\sigma_{ij}^k$, $k = 1, \dots, N$ и внешней нагрузки ${}^{(1)}P_{l+1}$. Последующие приближения строятся по той же схеме.

Отметим, что в приведенном варианте итерации строились с использованием условия $\sigma_{22}^{(1)}(P_{l+1}) = \sigma_{22}^{(1)}(P_l)$ только для одного элемента. Для остальных k элементов значения напряжений ${}^{(i)}\sigma_{22}^{(k)}(P_{l+1})$ (i — номер итерации) находились из решения соответствующей системы линейных уравнений. Иными словами, распределение напряжений $\sigma_{22}^{(k)}(P_{l+1})$ в нулевом приближении не предполагалось совпадающим с распределением этих напряжений, соответствующим длине зоны пластичности l . Результаты расчета показывают, что на каждом шаге достаточно шести итераций для достижения сходимости итерационного процесса, при котором поле напряжений на j -м шаге будет отличаться от напряжений, полученных на $(j - 1)$ -м шаге, менее чем на 0,1 %. Выполнение соответствующего критерия [1–3, 6, 9, 11] в первом элементе слоя определяет начало процесса образования новых материальных поверхностей. Расчет показывает, что при количестве элементов более 1000 напряженное состояние практически не меняется, что косвенно свидетельствует о сходимости процесса счета.

На рис. 3 показано распределение напряжений, отнесенных к значению напряжения $\sigma_{11}^{(1)}$ в первом элементе, при критической нагрузке P_1 , соответствующей началу текучести в первом элементе, для $n = 1000$, $\nu = 0,25$, $a = 5$.

Отметим, что при $\nu = 0$ $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, а для остальных допустимых значений коэффициента Пуассона выполняется неравенство $\sigma_{22} < \sigma_{33}$, что подтверждает правомерность выбора критерия текучести в виде (9).

На рис. 4 показано распределение напряжений, отнесенных к пределу текучести, по элементам при достижении предела текучести на втором элементе (нагрузка P_2). Видно, что напряжения в пластически деформируемом элементе, находящемся в состоянии плоской деформации, могут существенно превышать предел текучести (см. [5]). Это можно

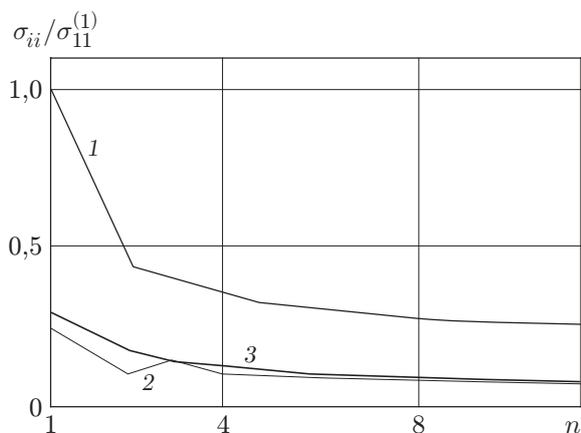


Рис. 3

Рис. 3. Распределение напряжений на разрезе при нагрузке, соответствующей началу текучести в первом элементе ($n = 1000$, $\nu = 0,25$, $a = 5$):

1 — σ_{11} ; 2 — σ_{22} ; 3 — σ_{33}

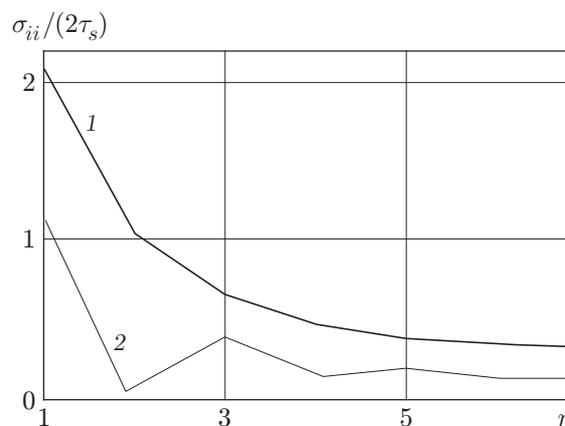


Рис. 4

Рис. 4. Распределение напряжений на разрезе при нагрузке, соответствующей началу текучести во втором элементе ($n = 1000$, $\nu = 0,25$, $a = 5$):

1 — σ_{11} ; 2 — σ_{22} при $2\tau_s/E = 2 \cdot 10^{-3}$

объяснить тем, что при моделировании зоны предразрушения упругопластического материала в плоском состоянии, в котором реализуется гидростатика с растягивающими напряжениями, учитывались все напряжения. Пренебрежение напряжениями σ_{22} и σ_{33} в силу их малости по сравнению с напряжениями σ_{11} приводит к тому, что в зоне предразрушения напряжения не превышают предела текучести. Такая ситуация имеет место в случае плоского напряженного состояния.

При определении напряженных состояний, соответствующих переходу в пластическое состояние третьего и второго элементов, критическая нагрузка $P_3 = 3,7P_1$, $P_2 = 1,6P_1$. Следовательно, увеличение нагрузки, необходимой для движения пластической области в осевом направлении при условиях плоской деформации, указывает на возможность ее распространения в направлении оси X_1 (см. рис. 1).

Если рассматривать напряжение σ_{11} при необратимом деформировании как действие сил сцепления [12], то в данной постановке эти силы будут определяться из решения соответствующей краевой задачи, а не вводиться априорно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
2. **Морозов Н. Ф.** Проблемы механики разрушения твердых тел / Н. Ф. Морозов, Ю. В. Петров. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 1997.
3. **Назаров С. А.** Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости / С. А. Назаров, М. В. Паукшто. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984.
4. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8, N 2. P. 100–108.
5. **Нотт Дж. Ф.** Основы механики разрушения. М.: Металлургия, 1978.
6. **Глаголев В. В., Маркин А. А.** Определение термомеханических характеристик процесса разделения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 101–112.

7. **Гаврилкина М. В., Глаголев В. В., Маркин А. А.** К решению одной задачи механики разрушения // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 121–127.
8. **Ивлев Д. Д.** Теория предельного состояния и идеальной пластичности: Избр. работы. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005.
9. **Крауч С.** Методы граничных элементов в механике твердого тела: Пер. с англ. / С. Крауч, А. Старфилд. М.: Мир, 1987.
10. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. № 2. С. 212–222.
11. **Isupov L. P., Mikhailov S. E.** A comparative analysis of several nonlocal fracture criteria // Arch. Appl. Mech. 1998. V. 68. P. 597–612.
12. **Баренблатт Г. И., Христианович С. А.** О модуле сцепления в теории трещин // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 2. С. 69–75.

*Поступила в редакцию 12/III 2008 г.,
в окончательном варианте — 29/V 2008 г.*
