

УДК 532.591; 539.3.371

## ПЛОСКАЯ ВОЛНА ДЕФОРМАЦИИ В ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В. М. Кулик

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: kulik@itp.nsc.ru

Определены скорость и затухание волны деформации в слое вязкоупругого материала, жестко закрепленного на твердом основании. Проанализирована структура волны — соотношение между продольным и поперечным смещениями, а также профили этих смещений. Установлено, что на основной моде колебаний затухание волн значительно сильнее, чем в безграничном пространстве. Наиболее сильное затухание наблюдается на резонансных частотах. Выявлено сильное влияние сжимаемости среды на характеристики волны. Найдены условия, при которых такая система работает как волновод. Обнаружено, что при значении коэффициента потерь, большем 0,13 (для несжимаемой среды), характер дисперсионной зависимости резко меняется: с уменьшением частоты скорость волны уменьшается.

**Ключевые слова:** вязкоупругий материал, скорость волны, затухание, профиль, продольные и поперечные смещения.

В данной работе выполнен расчет скорости распространения свободных колебаний в слое вязкоупругого материала толщиной  $H$  с модулем упругости  $E$ , плотностью  $\rho$ , коэффициентом Пуассона  $\sigma$  и коэффициентом потерь  $\mu$ .

Рассмотрим плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$ . Смещение частиц среды в этой волне определяется зависимостью

$$\xi = i\zeta + j\eta = f(y) e^{ik(x-Vt)}.$$

Здесь  $\zeta$ ,  $\eta$  — компоненты смещения, направленные соответственно вдоль покрытия и перпендикулярно ему.

Общее уравнение движения имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = C_l^2 \Delta \xi + (C_l^2 - C_t^2) \text{grad div } \xi, \quad (1)$$

где  $C_l = [E(1 - \sigma)/(\rho(1 + \sigma)(1 - 2\sigma))]^{1/2}$  — скорость распространения в безграничном пространстве волны сжатия-растяжения, в которой смещение параллельно направлению распространения волны;  $C_t = [E/(2\rho(1 + \sigma))]^{1/2}$  — скорость распространения в безграничном пространстве сдвиговой волны, в которой смещение перпендикулярно направлению распространения волны.

Граничными условиями являются условие отсутствия смещения на твердой стенке

$$\zeta = \eta = 0 \quad \text{при } y = H \quad (2)$$

и условие отсутствия напряжений на внешней границе

$$C_l^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + (C_l^2 - 2C_t^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (3)$$

Так же как и в волне Рэлея [2], смещение определяется суммой продольной и поперечной волн. В силу граничных условий продольная волна не параллельна оси  $x$ , а поперечная не перпендикулярна ей.

Для решения уравнения (1) используем метод разделения смещения на градиентную и роторную части. Введем две скалярные функции  $\Phi$  и  $\Psi$ , такие что

$$\zeta = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Подставляя их в (1), получим уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - C_t^2\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - C_t^2\Delta\Psi = 0,$$

решение которых имеет вид

$$\Phi = \left[ A_1 \frac{\text{sh}(\alpha ky)}{\alpha k} + B_1 \text{ch}(\alpha ky) \right] e^{ik(x-Vt)}, \quad \Psi = \left[ A_2 \frac{\text{sh}(\beta ky)}{\beta k} + B_2 \text{ch}(\beta ky) \right] e^{ik(x-Vt)}.$$

Здесь  $\alpha = [1 - (V/C_t)^2]^{1/2}$ ;  $\beta = [1 - (V/C_t)^2]^{1/2}$ .

Используя граничные условия (2), (3), получаем однородную систему четырех уравнений для  $A_1, A_2, B_1, B_2$ . Из равенства нулю определителя этой системы следует характеристическое уравнение для скорости распространения колебаний

$$\begin{aligned} & [2 - (V/C_t)^2]^2 [\text{ch}(\alpha kH) \text{ch}(\beta kH) - (\alpha\beta)^{-1} \text{sh}(\alpha kH) \text{sh}(\beta kH)] + \\ & + 4[\text{ch}(\alpha kH) \text{ch}(\beta kH) - \alpha\beta \text{sh}(\alpha kH) \text{sh}(\beta kH)] = 4[2 - (V/C_t)^2]. \end{aligned} \quad (4)$$

При  $H \rightarrow \infty$  это уравнение переходит в обычное уравнение для волн Рэлея [1, 2] — сдвиговых волн, распространяющихся вдоль поверхности раздела двух сред.

Так как

$$\alpha^2 = 1 - \left(\frac{V}{C_t}\right)^2 \left(\frac{C_t}{C_l}\right)^2 = 1 - \left(\frac{V}{C_t}\right)^2 \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)},$$

а аргументы гиперболических функций пропорциональны  $kH = 2\pi H/\lambda = (\omega H/C_t)/(V/C_t)$ , то  $V/C_t$  и  $\omega H/C_t$  являются моделирующими параметрами, относительно которых решалось уравнение (4). В работе [3] приведено решение этого уравнения для идеального материала (несжимаемого ( $\sigma = 0,5$ ), без вязких потерь ( $\mu = 0$ )).

На рис. 1 представлены результаты решения уравнения (4) при различных значениях коэффициента Пуассона. Для каждой моды на дисперсионной кривой имеется три характерных участка, соответствующих волнам Рэлея при  $\omega H/C_t \gg 1$  ( $V/C_t < 1$ ), переходной зоне при  $1 < V/C_t < [2(1 - \sigma)/(1 - 2\sigma)]^{1/2}$  (участки, расположенные ниже пунктирных линий на рис. 1) и длинноволновой зоне (участки, расположенные выше пунктирных линий на рис. 1).

При  $\sigma = 0,5$  (сплошные линии на рис. 1,а) длинноволновая зона отсутствует. Первая мода колебаний имеет наименьшую скорость распространения при фиксированной частоте. При  $\omega H/C_t \leq 1,8$  скорость деформационной волны резко увеличивается, поэтому можно считать, что при  $\omega H/C_t < 1,5$  колебания в покрытии невозможны. С ростом частоты колебаний появляются все более высокие моды с интервалом периодичности  $\omega H/C_t \approx 4,45$ . Это обусловлено тем, что  $\beta$  является мнимой величиной, поэтому  $\text{sh} \beta$  и  $\text{ch} \beta$  — обычные гармонические функции.

Для реальных материалов, имеющих некоторую сжимаемость, ситуация значительно усложняется. Так, при  $\sigma = 0,45$  (штриховые линии на рис. 1,а) для первой, второй и четвертой мод дисперсионные кривые продолжают в область выше пунктирной линии:

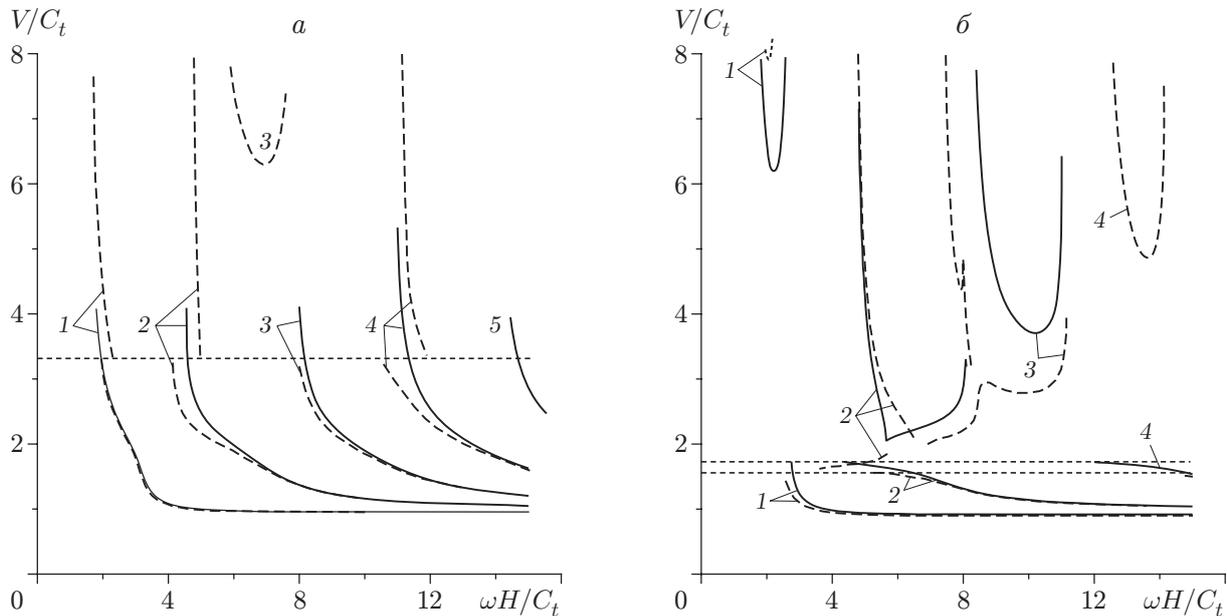


Рис. 1. Дисперсия скорости распространения волны при значениях коэффициента Пуассона  $\sigma = 0,45; 0,50$  (а) и  $\sigma = 0,15; 0,25$  (б):

а — сплошные линии —  $\sigma = 0,5$ , штриховые —  $\sigma = 0,45$ ; б — сплошные линии —  $\sigma = 0,25$ , штриховые —  $\sigma = 0,15$ ; пунктирные линии —  $V/C_t = \sqrt{2(1-\sigma)/(1-2\sigma)}$ ; 1–5 — номера мод колебаний

кривые претерпевают разрыв и сдвинуты вправо. Верхняя часть дисперсионной кривой, соответствующей третьей моде, имеет параболическую форму и расположена над линией разрыва. Ниже пунктирной линии штриховые кривые расположены не строго периодически, в отличие от сплошных.

С уменьшением коэффициента Пуассона линия раздела зон сдвигается ниже (с  $V/C_t = 3,316$  при  $\sigma = 0,45$  до  $V/C_t = 1,5$  при  $\sigma = 0,15$ ). Верхние части дисперсионных кривых имеют параболическую или более сложную форму (например, сплошная кривая 2 на рис. 1, б). При  $\sigma = 0,15$  уже невозможно определить, какой моде соответствуют кривые, расположенные выше пунктирной линии.

Для приложений наибольший интерес представляет изучение первой моды колебаний [4]. В экспериментах покрытие обычно характеризуется либо измеренными вязкоупругими свойствами его материала (зависимостями модуля упругости и коэффициента потерь от частоты [5]), либо колебательными характеристиками самого покрытия (скоростью распространения возмущений и их затухания [6]). Во втором случае данные целесообразно представить в виде зависимости  $V/C_t$  от безразмерного параметра  $H/\lambda$ , имеющего физический смысл.

На рис. 2, а представлена зависимость  $V/C_t$  от  $H/\lambda$  для переходной зоны дисперсионной зависимости первой моды колебаний. С увеличением сжимаемости среды (уменьшением  $\sigma$ ) относительная скорость волны  $V/C_t$  уменьшается. Сверху кривые ограничены предельными значениями

$$\frac{V}{C_t} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}}$$

и при  $H/\lambda \rightarrow \infty$  выходят на рэлеевскую асимптоту  $V/C_t \approx 0,141\sigma + 0,885$  (при  $\sigma > 0,3$ ).

На рис. 2, б показана дисперсия скорости деформационной волны для первых шести мод колебаний в случае  $\sigma = 0,5$ .

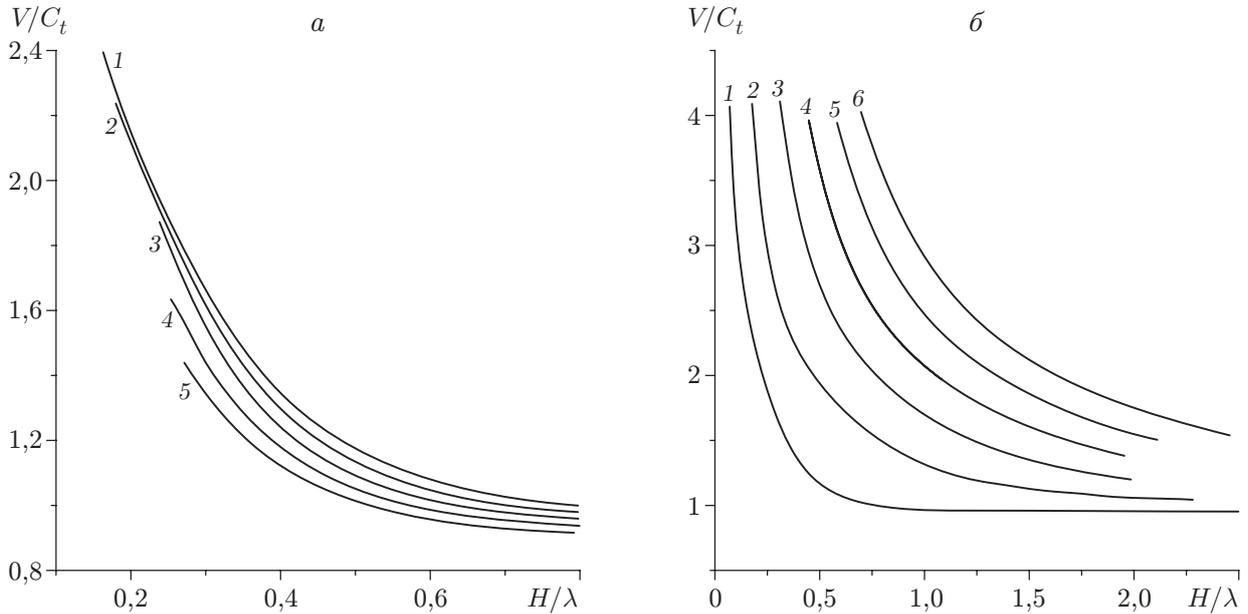


Рис. 2. Низкоскоростные части дисперсионных кривых:

*a* — первая мода колебаний (1 —  $\sigma = 0,5$ ; 2 —  $\sigma = 0,4$ ; 3 —  $\sigma = 0,3$ ; 4 —  $\sigma = 0,2$ ; 5 —  $\sigma = 0,1$ ); *б* — различные моды колебаний при  $\sigma = 0,5$  (1–6 — номера мод колебаний)

На рис. 3, *a* приведено отношение вертикального смещения к горизонтальному на внешней границе слоя при различных значениях коэффициента Пуассона. Первая мода имеет два максимума (кривые 1–3 для участков дисперсионных кривых, расположенных ниже пунктирной линии на рис. 1, и кривые 2'–5' для участков дисперсионных кривых, расположенных выше пунктирной линии на рис. 1), соответствующих резонансным частотам амплитуды прогиба поверхности. Вертикальное смещение опережает горизонтальное на фазовый угол, равный  $90^\circ$ , а при переходе через резонанс фазовый угол изменяется на  $180^\circ$ . Резонанс для низкоскоростных волн (кривые 1–5 на рис. 3, *a*) достигается не при всех значениях  $\sigma$ . С уменьшением коэффициента Пуассона резонансная частота уменьшается в соответствии с зависимостью

$$f_0 \simeq C_t(\sigma + 1,11)/(\pi H)$$

до значений, соответствующих линии разрыва, поэтому кривые 4 и 5 ( $\sigma = 0,2; 0,1$ ) уже не имеют резонансного пика. Резонансы для высоких скоростей распространения деформационных волн (кривые 2'–5' на рис. 3, *a*) соответствуют диапазону  $0,25 < H/\lambda < 0,75$ . С уменьшением  $\sigma$  резонансная частота высокоскоростной части дисперсионной кривой первой моды резко увеличивается, и при  $\sigma < 0,2$  появляется многозначность: при одном значении  $H/\lambda$  возможны два значения  $\eta/\zeta$ .

При  $H/\lambda \gg 1$  выполняется соотношение для волн Рэлея

$$\frac{\eta}{\zeta} = i \frac{2 - (V/C_t)^2}{2\sqrt{1 - (V/C_t)^2}}.$$

На рис. 3, *б* показано отношение вертикального смещения к горизонтальному на внешней границе слоя для низкоскоростной части дисперсионных кривых различных мод при  $\sigma = 0,5$ . Первый резонанс наблюдается при  $H/\lambda \simeq 0,333$ , последующие — через эквидистантные промежутки  $H/\lambda \approx 0,5$ .

Профили вертикального и горизонтального смещений определяют структуру деформационной волны. На рис. 4 приведено распределение смещений по толщине покрытия

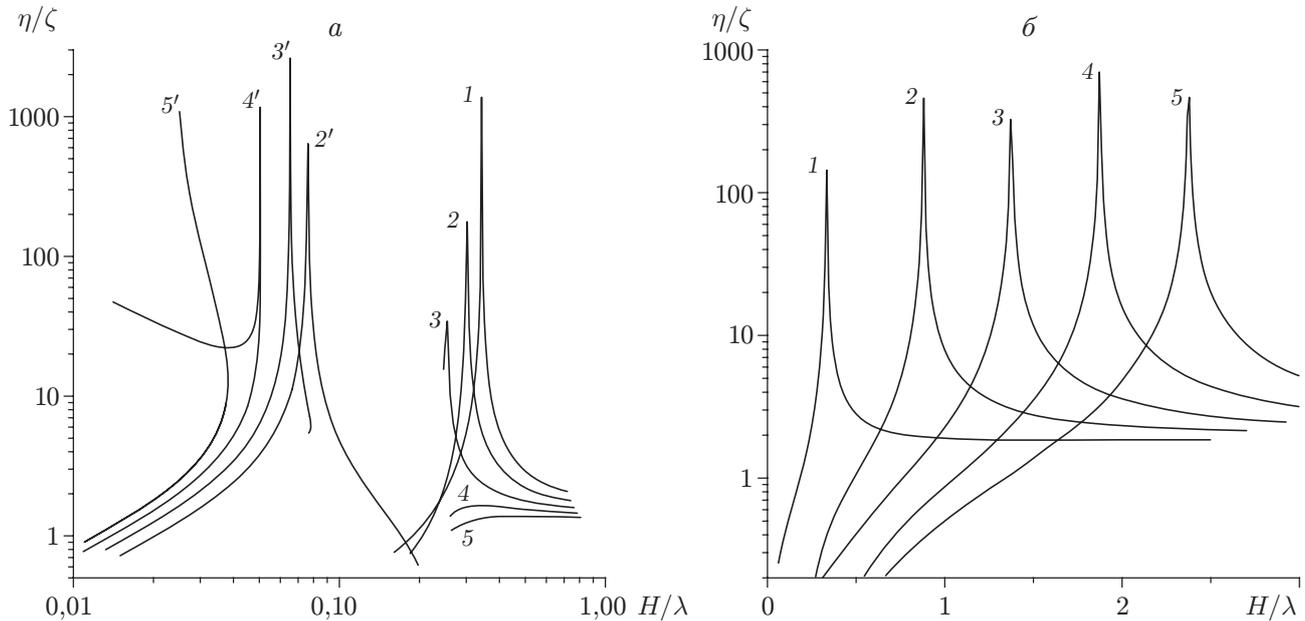


Рис. 3. Отношение вертикального смещения к горизонтальному на внешней границе слоя:

*a* — первая мода (1 —  $\sigma = 0,5$ ; 2, 2' —  $\sigma = 0,4$ ; 3, 3' —  $\sigma = 0,3$ ; 4, 4' —  $\sigma = 0,2$ ; 5, 5' —  $\sigma = 0,1$ ); 1–5 — низкоскоростные части дисперсионных кривых на рис. 1; 2'–5' — высокоскоростные части дисперсионных кривых на рис. 1; *б* — различные моды при  $\sigma = 0,5$  (1–5 — номера мод колебаний)

для первых трех мод колебаний при  $\sigma = 0,5$ . Кривые приведены только для резонансных частот соответствующих мод. Для всех мод колебаний смещения на твердой стенке равны нулю. Вертикальное смещение на резонансной частоте первой моды колебаний (кривая 1 на рис. 4, *a*) плавно увеличивается по толщине покрытия и достигает максимума на внешней границе. Вторая мода (кривая 2) состоит из “отрицательной” полуволны (при  $0 < (H - y)/H < 0,7$  смещение противофазно) и  $1/4$  длины волны с “положительными” деформациями. Максимум деформаций, наблюдаемый при  $(H - y)/H \approx 0,42$ , на 7,5 % больше деформации на внешней стенке. Третья мода составляет  $5/4$  периода колебания, четвертая —  $7/4$  периода, к каждой последующей моде добавляется  $1/2$  периода колебания.

Профиль горизонтального смещения первой моды колебаний (кривая 1 на рис. 4, *б*) представляет собой полуволну с равенством нулю смещений на внешней и внутренней границах. Максимальное смещение наблюдается при  $(H - y)/H = 0,46$ . Вторая мода (кривая 2) соответствует одному периоду колебаний, причем “положительная” полуволна имеет амплитуду, в  $\sqrt{2}$  раз меньшую, чем “отрицательная”. К каждой последующей моде добавляется  $1/2$  периода колебания.

Для частот, отличных от резонансной, профили смещений для первой моды колебаний при  $\sigma = 0,5$  показаны на рис. 4, *a* штриховыми линиями. При частоте, в два раза меньшей частоты резонанса (кривая 4 на рис. 4, *a*), профиль вертикального смещения практически линеен, когда  $(H - y)/H > 0,5$ . После перехода через резонанс (при  $H/\lambda > 0,33$ ) максимальное смещение достигается на некотором удалении от внешней поверхности (кривая 5). Логарифмический профиль, характерный для волн Рэлея, достигается только при достаточно больших значениях  $H/\lambda$  (кривая 6, соответствующая  $H/\lambda = 30$ ). Зависимости, приведенные на рис. 4, нельзя сравнивать по абсолютной величине, поскольку кривые нормированы разными коэффициентами.

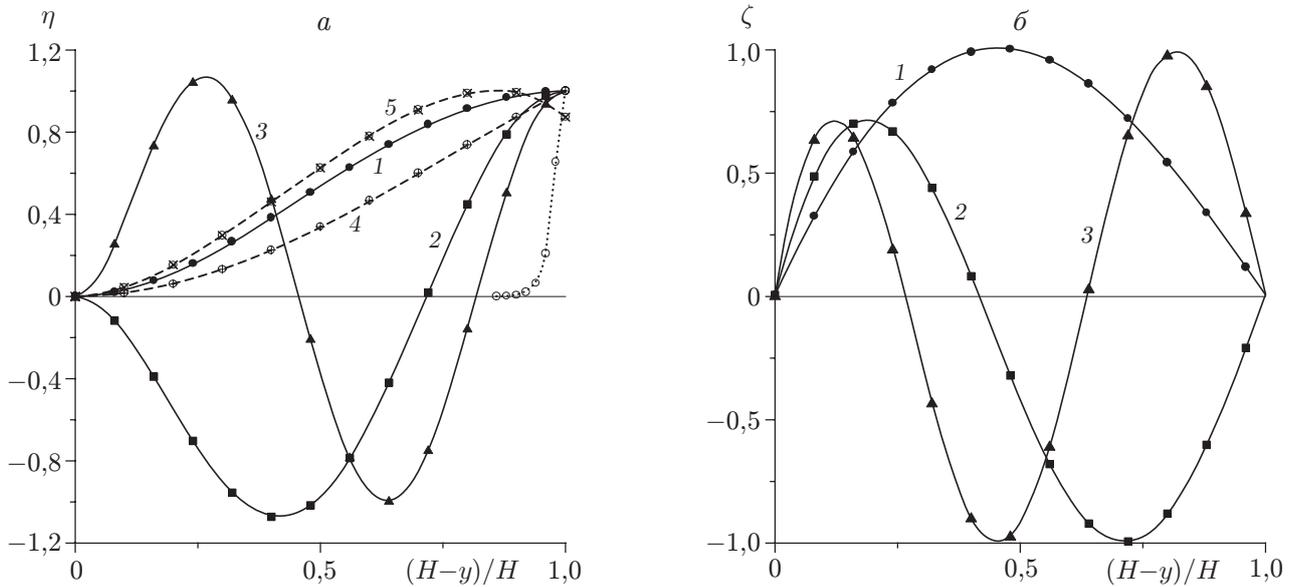


Рис. 4. Профили вертикального (а) и горизонтального (б) смещений при  $\sigma = 0,5$ : сплошные линии — резонансные частоты различных мод (1–3 — номера мод); штриховые линии — частоты, кратные резонансной частоте первой моды (4 —  $H/\lambda = 0,17$ ; 5 —  $H/\lambda = 0,66$ ); пунктирная линия —  $H/\lambda = 30$  (волна Рэлея)

Для плоской бегущей волны  $\xi = \xi_0 e^{i\omega(t-x/V)}$ , распространяющейся в безграничном пространстве, заполненном вязкоупругим материалом с динамическим модулем упругости  $\hat{E} = E(1 + i\mu)$ , скорость волны определяется по формуле

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \mu^2} + 1} + i\sqrt{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}}{\sqrt{2}}.$$

Вязкие потери вызывают изменение длины волны и затухание:

$$\zeta = \zeta_0 \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x}{\sqrt{E/\rho}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \mu^2} + 1}{2(1 + \mu^2)}} \right) \right] \exp \left( -2\pi \frac{x}{\lambda} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}{\sqrt{1 + \mu^2} + 1}} \right). \quad (5)$$

При  $\mu < 0,1$   $\lambda = \lambda_0 \sqrt{2(1 + \mu^2)/(\sqrt{1 + \mu^2} + 1)} \approx \lambda_0(1 + 3\mu^2/8)$ . Параметр затухания  $L$ , т. е. расстояние  $x$ , при котором амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз, вычисляется по формуле

$$L = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \mu^2} + 1}{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}}.$$

При  $\mu < 0,1$   $L \approx \lambda/(\pi\mu)$ .

Аналогичная картина наблюдается в слое вязкоупругого материала. На рис. 5 для первой моды колебаний приведена зависимость параметра затухания

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Re}(V/C_t)}{\text{Im}(V/C_t)}$$

от коэффициента потерь  $\mu$ . Затухание максимально на резонансной частоте. По мере удаления от резонанса затухание становится значительно менее интенсивным, чем затухание

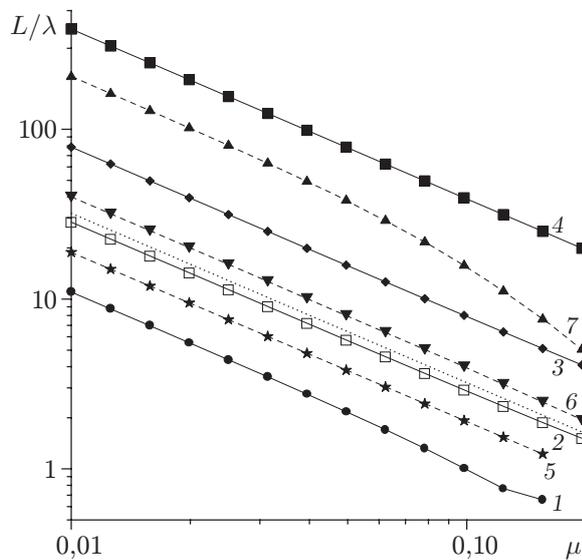


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость параметра затухания волны от коэффициента потерь при  $\sigma = 0,5$ :

сплошные линии — низкоскоростная часть дисперсионной кривой первой моды (1 —  $f_0$ ; 2 —  $f_0/2$ ; 3 —  $2f_0$ ; 4 —  $3f_0$ ); штриховые линии — высокоскоростная часть дисперсионной кривой первой моды на резонансных частотах (5 —  $\sigma = 0,4$ ; 6 —  $\sigma = 0,3$ ; 7 —  $\sigma = 0,25$ ); пунктирная линия — звуковая волна в безграничном пространстве (см. формулу (5))

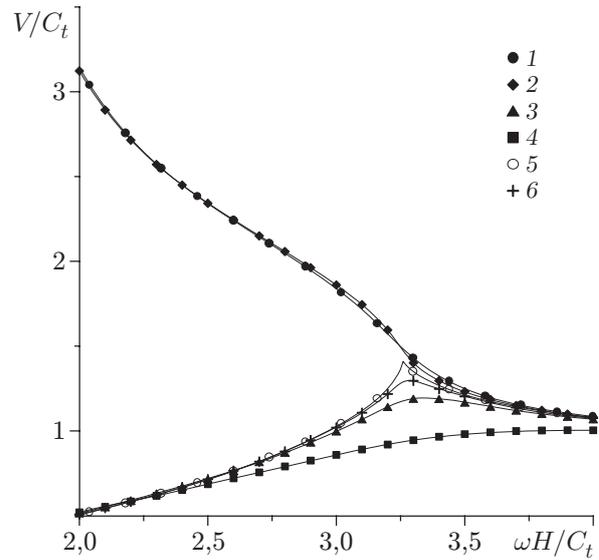


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость скорости волны от частоты при  $\sigma = 0,5$ :

1 —  $\mu = 0,01$ ; 2 —  $\mu = 0,1$ ; 3 —  $\mu = 0,2$ ; 4 —  $\mu = 0,4$ ; 5 —  $\mu = 0,13$ ; 6 —  $\mu = 0,15$

акустических волн в данной среде (пунктирная линия на рис. 5). С ростом коэффициента потерь затухание увеличивается, и при  $\mu = 0,1$  амплитуда уменьшается в  $e$  раз на расстоянии, равном длине волны.

Штриховыми линиями на рис. 5 показана длина затухания на резонансных частотах высокоскоростной части дисперсионной кривой первой моды (частотах, соответствующих максимумам кривых 2'–4' на рис. 3,а). Так же как и для низкоскоростной части дисперсионной зависимости, максимальное затухание достигается для несжимаемого материала, а с ростом  $\sigma$  отношение  $L/\lambda$  увеличивается. В данном случае длина волны значительно больше толщины покрытия, и такая система работает как волновод, т. е. передает возмущения на большие расстояния без затухания.

На рис. 6 показана зависимость скорости волны от частоты при изменении коэффициента потерь в широком диапазоне. Нелинейный характер уравнения (4) относительно  $\mu$  проявляется в существовании двух ветвей дисперсионной зависимости скорости волны. Значение  $\mu = 0,13$  является точкой ветвления для  $\sigma = 0,5$  (критическое значение  $\mu$  уменьшается с уменьшением коэффициента Пуассона). Существование низкоскоростной ветви дисперсионной зависимости скорости распространения деформаций делает возможным создание податливых покрытий для уменьшения сопротивления трения в диапазоне скоростей движения, используемом на практике, и опровергает вывод, сделанный в [3], о бесперспективности однослойных монокристаллических покрытий.

В дальнейшем необходима экспериментальная проверка полученных в данной работе выводов с использованием предложенной в [6] методики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1987.
2. **Raileigh L.** On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. P. 4–11.
3. **Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., Riley J. J.** On the interaction of compliant coatings with boundary layer flows // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 257–280.
4. **Kulik V. M., Rodaykin S. V., Lee I., Chun H. H.** Deformation of a viscoelastic coating under the action of convective pressure fluctuations // Exp. Fluids. 2005. V. 38, N 5. P. 648–655.
5. **Кулик В. М., Семенов Б. Н.** Двухпараметрический метод измерения вязкоэластичных свойств полимерных материалов // Метрология. 1986. № 4. С. 32–38.
6. **Кулик В. М.** Распространение волн деформаций в податливом покрытии // Инж.-физ. журн. 2004. Т. 77, № 4. С. 71–75.

*Поступила в редакцию 9/II 2005 г.,  
в окончательном варианте — 1/VIII 2005 г.*

---