ПМТФ, № 3, 1974

УДК 539.3 + 517.945

КОНУСЫ ХАРАКТЕРИСТИК УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е. И. Роменский

(Новосибирск)

Исследуются корни уравнения характеристических нормалей для двух систем дифференциальных уравнений нелинейной теории упругости.

Первая модель построена при помощи термодинамического тождества, вторая — простейшая гипоупругая модель (девиатор тензора скоростей изменения напряжений пропорционален девиатору тензора скоростей деформаций). Показано, что корни уравнений нормалей к характеристикам для второй модели совпадают с членами разложения до первого порядка по девиатору тензора деформаций корней первой модели.

В работе исследуются характеристические конусы дифференциальных уравнений, описывающих две модели нелинейной теории упругости. Первая модель, дифференциальные уравнения которой получены на основании некоторого термодинамического тождества, сформулирована в [1]. Другая модель широко применяется при расчете упругопластических течений [2]. Термодинамика этой модели не имеет удовлетворительного объяснения, ее можно трактовать как некое приближение термодинамики для модели [1].

Сформулированная в [1] система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\rho \frac{du_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dg_{ik}}{dt} + g_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} + g_{k\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = \varphi_{ik}(g_{mn}, S), \qquad \frac{dS}{dt} = \varkappa(g_{mn}, S)$$

где u_i — компоненты вектора скорости, σ_{ik} — тензор напряжений, g_{ik} — тензор деформаций Коши, S — энтропия, $\rho = \rho_0 \sqrt{\det\| g_{ik} \|}$ — плотность среды.

Для замыкания системы задается зависимость σ_{ik} от g_{ik} и S по формулам Мурнагана

$$\sigma_{ik} = -2\rho \frac{\partial E}{\partial g_{i\alpha}} g_{\alpha k}$$

где $E = E(g_{mn}, S)$ — внутренняя энергия среды. Будем рассматривать изотропную среду, предполагая, что E зависит от трех независимых инвариантов тензора деформаций и от энтропии. Удобно рассматривать следующие зависимости:

$$E = E(k_1, k_2, k_3, S), \quad k_i = 1 / \sqrt{g_i}$$

$$E = E(\rho, D, \Delta, S)$$

$$\rho = \rho_0 / (k_1 k_2 k_3), \quad D = {}^1/_2 (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2),$$

$$\Delta = {}^1/_3 (d_1^3 + d_2^3 + d_3^3)$$

$$d_i = \ln (k_i / \sqrt[3]{k_1 k_2 k_3}) \quad (d_1 + d_2 + d_3 = 0)$$

где k_i — коэффициенты сжатия по главным осям тензора деформаций.

Инварианты k_1, k_2, k_3 можно восстановить по ρ, D, Δ.

В [1] получено уравнение для характеристических нормалей, которое имеет вид

$$\det(\Omega^2 I - \Lambda) = 0$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} L_1\eta_1^2 + M_3\eta_2^2 + M_2\eta_3^2 & N_3\eta_1\eta_2 & N_2\eta_1\eta_3 \\ N_3\eta_2\eta_1 & M_3\eta_1^2 + L_2\eta_2^2 + M_1\eta_3^2 & N_1\eta_2\eta_3 \\ N_2\eta_3\eta_1 & N_1\eta_3\eta_2 & M_2\eta_1^2 + M_1\eta_2^2 + L_3\eta_3^2 \end{pmatrix}$$

где $\eta_i = k_i\xi_i$, $\Omega = \omega + u_\alpha\xi_\alpha$, $(\omega, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — вектор нормали к характеристической поверхности.

Девять модулей упругости L_i, M_i, N_i выражаются через первые и вторые производные уравнения состояния E (k_1, k_2, k_3, S) по формулам

$$L_1 = E_{k_1k_1}, \quad M_1 = \frac{k_2E_{k_2} - k_3E_{k_3}}{k_2^2 - k_3^2}, \quad N_1 = E_{k_2k_3} - \frac{k_2E_{k_3} - k_3E_{k_2}}{k_2^2 - k_3^2}$$

остальные L_i, M_i, N_i получаются из указанных соответствующей заменой индексов.

Матрица Λ соответствует кристаллу ромбической сингонии [3], анизотропия которого описывается девятью независимыми модулями упругости. В такой среде звуковые волны распространяются по трем направлениям с, вообще говоря, различными скоростями. В [3] рассматривается теория упругих волн в кристаллах, однако там изучаются лишь малые деформации и вычисление характеристик не доведено до конца. В данном случае, зная интерполяционные формулы уравнения состояния, можно выяснить характер распространения звуковых волн. Определим, как распространяются звуковые волны с точностью до первых членов разложения модулей упругости по девиатору тензора деформаций в окрестности нулевого девиатора, при любых значениях плотности и энтропии.

Используя параметризацию уравнения состояния $E = E(\rho, D, \Delta, S)$, матрицу Λ можно разложить по степеням девиатора деформации d_i в окрестности $d_i = 0$

$$\Lambda = \Lambda^{(0)}(\rho, S) + d_i\Lambda_i^{(1)}(\rho, S) + d_i^2\Lambda_i^{(2)}(\rho, S) + \ldots$$

и исследовать собственные значения матрицы Λ как возмущения собственных значений матрицы $\Lambda^{(0)}$.

Ограничимся возмущением первого порядка. Используя формулы (5.2) из [1], для вычисления модулей упругости можно выписать матрицы

$$\Lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} (l+m)\xi_1^2 + m(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) & (l+m)\xi_1\xi_2 & (l+m)\xi_1\xi_3 \\ (l+m)\xi_2\xi_1 & (l+m)\xi_2^2 + m(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) & (l+m)\xi_2\xi_3 \\ (l+m)\xi_3\xi_1 & (l+m)\xi_3\xi_2 & (l+m)\xi_3^2 + m(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -2(2m + 2k - n)\xi_1^2 + (m + {}^3/_2\, n)(\xi_2^2 + \xi_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & (m + {}^3/_2\, n)\xi_1^2 & (m + {}^1/_2\, n + 2k)\xi_2\xi_3 \\ 0 & (m + {}^1/_2\, n + 2k)\xi_3\xi_2 & (m + {}^3/_2\, n)\xi_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2^{(1)} = \begin{pmatrix} (m + {}^3/_2 n)\,\xi_2^2 & 0 & (m + {}^1/_2 n + 2k)\,\xi_1\xi_3 \\ 0 & -2\,(2m + 2k - n)\,\xi_2^2 + (m + {}^3/_2 n)\,(\xi_1^2 + \xi_3^2) & 0 \\ (m + {}^1/_2 n + 2k)\,\xi_3\xi_1 & 0 & (m + {}^3/_2 n)\,\xi_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_3^{(1)} = \begin{pmatrix} (m + {}^3/_2 n)\,\xi_3^2 & (m + {}^1/_2 n + 2k)\,\xi_1\xi_2 & 0 \\ (m + {}^1/_2 n + 2k)\,\xi_2\xi_1 & (m + {}^3/_2 n)\,\xi_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,(2m + 2k - n)\,\xi_3^2 + (m + {}^3/_2 n)\,(\xi_1^2 + \xi_2^2) \end{pmatrix}$$

$$l = (\rho^2 E_\rho)_\rho - {}^1/_3 E_D, \qquad m = {}^1/_2 E_D, \qquad n = {}^1/_3 E_\Delta, \qquad k = {}^1/_2 E_{\rho D}$$

все величины вычислены в точке $d_1 = d_2 = d_3 = 0$. Матрицы $\Lambda_i^{(1)}$ допускают произвол в написании, так как $d_1 + d_2 + d_3 = 0$, их конкретный вид выбран из соображений симметрии.

Необходимо выяснить, как возмущаются собственные значения матрицы $\Lambda^{(0)}$, возмущенной матрицей $d_i\Lambda_i^{(1)}$. Собственные значения многопараметрического возмущения могут быть не дифференцируемы по параметрам возмущения [4]. Поэтому перейдем к однопараметрическому возмущению

$$\Lambda = \Lambda^{(0)} + \varepsilon\,(d_i\varepsilon^{-1}\Lambda_i^{(1)}) + O\,(D)$$

где $\varepsilon = \sqrt{D}$. Обозначим $\Lambda^{(1)} = \varepsilon^{-1} d_i \Lambda_i^{(1)}$.

Собственные значения для однопараметрического симметрического возмущения вещественны и дифференцируемы по параметру возмущения [4]. Это дает возможность определять члены разложения по степеням ε собственных значений и собственных векторов. Рассмотрим первые члены разложения собственных значений.

Матрица $\Lambda^{(0)}$ имеет одно простое и одно двукратное собственные значения

$$(\Omega_1^2)^{(0)} = (l + 2m)\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2),\ (\Omega_2^2)^{(0)} = (\Omega_3^2)^{(0)} = m\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$$

Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных векторов, например

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)}} \begin{pmatrix} -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_3 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 \end{pmatrix}$$

Если обозначить через Ω_1^2, Ω_2^2, Ω_3^2 собственные значения матрицы Λ и написать их разложение по степеням ε, то можно показать, что

$$(\Omega_1^2)^{(1)} = (\Lambda^{(1)} e_1,\ e_1)$$

а $(\Omega_2^2)^{(1)}$ и $(\Omega_3^2)^{(1)}$ являются собственными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix} (\Lambda^{(1)}e_2, e_2) & (\Lambda^{(1)}e_2, e_3) \\ (\Lambda^{(1)}e_3, e_2) & (\Lambda^{(1)}e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

Матрица $\Lambda^{(1)}$, векторы e_1, e_2, e_3 известны, поэтому находим

$$(\Lambda^{(1)} e_1, e_1) = -2(m + 2k - {}^1/_2 n)(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 + d_3\xi_3^2) / \sqrt{D}$$
$$(\Lambda^{(1)} e_2, e_2) = ({}^3/_2 n + m)(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 + d_3\xi_3^2) / \sqrt{D} -$$
$$- ({}^3/_2 n - m)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)d_3 / \sqrt{D} - ({}^3/_2 n - m)(\xi_1^2 + \xi_2^2 +$$
$$+ \xi_3^2)(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2) / (\xi_1^2 + \xi_2^2)\sqrt{D}$$
$$(\Lambda^{(1)} e_2, e_3) = (\Lambda^{(1)} e_3, e_2) = ({}^3/_2 n - m)\xi_1\xi_2\xi_3(d_2 - d_1)\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} /$$
$$/ (\xi_1^2 + \xi_2^2)\sqrt{D}$$
$$(\Lambda^{(1)} e_3, e_3) = ({}^3/_2 n + m)(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 + d_3\xi_3^2) / \sqrt{D} +$$
$$+ ({}^3/_2 n - m)(\xi_1^2 + \xi_2^2)d_3/\sqrt{D} + ({}^3/_2 n - m)\xi_3^2(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2) /$$
$$/ (\xi_1^2 + \xi_2^2)\sqrt{D}$$

Вычисляя указанным способом $(\Omega_i^2)^{(1)}$, получим

$$\Omega_1^2 = (l + 2m)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - 2(m + 2k - {}^1/_2 n)(d_1\xi_1^2 +$$
$$+ d_2\xi_2^2 + d_3\xi_3^2) + O(D)$$
$$\Omega_2^2 = m(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + {}^3/_2(m + {}^1/_2 n)(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 +$$
$$+ d_3\xi_3^2) - {}^1/_2(m - {}^3/_2 n)\,[(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 + d_3\xi_3^2)^2 - 4(\xi_1^2 + \xi_2^2 +$$
$$+ \xi_3^2)(d_2d_3\xi_1^2 + d_1d_3\xi_2^2 + d_1d_2\xi_3^2)]^{1/2} + O(D)$$
$$\Omega_3^2 = m(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + {}^3/_2(m + {}^1/_2 n)(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 +$$
$$+ d_3\xi_3^2) + {}^1/_2(m - {}^3/_2 n)[(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 + d_3\xi_3^2)^2 - 4(\xi_1^2 + \xi_2^2 +$$
$$+ \xi_3^2)(d_2d_3\xi_1^2 + d_1d_3\xi_2^2 + d_1d_2\xi_3^2)]^{1/2} + O(D)$$

Отсюда видно, что возмущенные собственные значения $(\Omega_2^2)^{(0)} = (\Omega_3^2)^{(0)}$ различаются на величину

$$(m - {}^3/_2 n)[(d_1\xi_1^2 + d_2\xi_2^2 + d_3\xi_3^2) - 4(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(d_2d_3\xi_1^2 +$$
$$+ d_1d_3\xi_2^2 + d_1d_2\xi_3^2)]^{1/2} + O(D)$$

Выражение под знаком корня всегда неотрицательно. Например, если $d_1 \leqslant d_2$ и $d_1 \leqslant d_3$, то его можно переписать в виде

$$[(d_2 - d_3)\xi_1^2 + (d_1 - d_3)\xi_2^2 + (d_2 - d_1)\xi_3^2]^2 + 4(d_2 - d_1)(d_3 -$$
$$- d_1)\xi_2^2\xi_3^2 \geqslant 0$$

равенство нулю достигается при $d_1 = d_2 = d_3$.

Рассмотрим интерполяционные формулы для уравнения состояния $E(\rho, D, \Delta, S)$. Из проведенных вычислений следует, что в точке $d_1 = d_2 = d_3 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 E_\rho) = l + {}^2/_3 m = (l + 2m) - {}^4/_3 m = c_0^2 - {}^4/_3 c_1^2$$
$${}^1/_2 \partial E/\partial D = m = c_1^2$$

где c_0 и c_1 — скорости распространения продольных и поперечных звуковых волн. Для описания простейших нелинейных эффектов распространения звуковых волн достаточно задавать уравнение состояния в виде

$$E(\rho, D, S) = E^{(0)}(\rho, S) + 2m(\rho, S)D$$

Рассмотрим другую модель. Система дифференциальных уравнений, описывающих эту модель, включает в себя в качестве связи напряжения —

деформации гипоупругие соотношения. Эти соотношения при добавлении диссипативных членов являются частным случаем уравнений пластичности Рейсса [5]. Замкнутая система уравнений имеет вид

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad & \frac{d\rho}{dt} = -\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{ij}, \qquad \rho\frac{dE}{dt} = -p\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta_{ij} + \sigma_{ik}'\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
& \rho\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ik}'}{\partial x_k} = 0 \\
& \frac{d\sigma_{ik}'}{dt} = -\frac{1}{2}\sigma_{i\alpha}'\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\sigma_{k\alpha}'\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right) + \\
& + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\right)
\end{aligned}
$$

Здесь ρ — плотность, E — внутренняя энергия, p — давление, u_i — компоненты скорости, σ_{ik}' — девиатор тензора напряжений, μ — функция ρ, E, σ_{ik}'.

Для замыкания системы задается соотношение $p = p\,(\rho, E, \sigma_{ik}')$. Рассмотрим соотношение $p = p(\rho, E)$, которое использовалось в [2] при численных расчетах. Для вычисления характеристической матрицы используем способ приведения системы дифференциальных уравнений к системе уравнений второго порядка, который использовался в [1]. Этот прием состоит в расширении исходной системы дифференцированием по t, x_i, при этом оказываются выделенными вертикальные характеристики (линии тока), а часть характеристической матрицы, соответствующая главным членам уравнений для скоростей, отвечает трем скоростям распространения звуковых волн.

Применим к уравнениям при u_i оператор d/dt

$$
\rho\frac{d^2u_i}{dt^2} + p_E\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{dE}{dt}\right) + p_\rho\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{d\sigma_{ik}'}{dt}\right) + \ldots = 0
$$

Многоточием здесь и далее будем обозначать члены уравнений, несущественные для вычисления характеристик, они содержат производные порядка не выше первого. Из остальных уравнений находим

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{dE}{dt}\right) = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k} + \frac{\sigma_{jk}'}{\rho}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_k} + \ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = \\
& = -\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k} + \ldots \\
& \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{d\sigma_{ik}'}{dt}\right) = -\frac{1}{2}\sigma_{i\alpha}'\left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_k\partial x_k} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\alpha\partial x_k}\right) - \frac{1}{2}\sigma_{k\alpha}'\left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha\partial x_k}\right) + \\
& + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta\partial x_k}\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

Подставляя полученные выражения в уравнения для $d^2u_i\,/\,dt^2$, после группировки слагаемых получаем

$$
\begin{aligned}
& \rho\frac{d^2u_i}{dt^2} - \left(\rho p_\rho + \frac{1}{\rho}\,p_E p + \frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}\,p_E\right)\sigma_{kj}'\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_k} - \\
& - \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\partial x_k} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}'\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j\partial x_k} - \frac{1}{2}\sigma_{kj}'\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_k} + \ldots = 0
\end{aligned}
$$

Если обозначить элементы характеристической матрицы через Λ_{ij}, то уравнение характеристических нормалей примет вид

$$\det(\rho\Omega^2 I - \Lambda) = 0, \quad \Lambda = \| \Lambda_{ij} \|$$

где Λ_{ij} вычисляются по формуле

$$\Lambda_{ij} = \left(\rho p_\rho + \frac{1}{\rho} p_E p + \frac{1}{3}\mu\right)\xi_i\xi_j - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} p_E\right)\sigma_{kj}'\xi_i\xi_k +$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_{ik}'\xi_k\xi_j - \frac{1}{2}\sigma_{ij}'\xi_k\xi_k + \mu\xi_k\xi_k\delta_{ij} + \frac{1}{2}\sigma_{kl}'\xi_k\xi_l\delta_{ij}$$

Здесь $\Omega = \omega + u_i\xi_i$, $(\omega, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — вектор нормали к характеристической поверхности.

Матрица Λ несимметрична, поэтому сразу нельзя сделать заключения о вещественности ее собственных значений. Но их можно выписать явными формулами. Рассмотрим сумму $\xi_j\Lambda_{ij}$ (в матричных терминах это означает, что к первому столбцу матрицы Λ, умноженному на ξ_1, прибавлены второй и третий столбцы, умноженные соответственно на ξ_2 и ξ_3)

$$\xi_j\Lambda_{ij} = \xi_i[(\rho p_\rho + \rho^{-1}p_E p + {}^4/_3\mu)\xi_k\xi_k - \rho^{-1}p_E\sigma_{kl}'\xi_k\xi_l]$$

Элементы первого столбца в характеристическом определителе после такого преобразования оказываются пропорциональными, поэтому характеристическое уравнение распадается на два уравнения

$$\rho\Omega^2 = (\rho p_\rho + \rho^{-1}p_E p + {}^4/_3\mu)\xi_k\xi_k - \rho^{-1}p_E\sigma'_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & -\Lambda_{12} & -\Lambda_{13} \\ \xi_2 & \rho\Omega^2 - \Lambda_{22} & -\Lambda_{23} \\ \xi_3 & -\Lambda_{32} & \rho\Omega^2 - \Lambda_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Первое уравнение — явная формула для одного корня, соответствующего скорости распространения продольных волн. Второе уравнение, квадратное относительно $\rho\Omega^2$, имеет корни, соответствующие двум скоростям распространения поперечных волн.

Вычислим корни квадратного уравнения. Перейдем к главным осям тензора напряжений $\sigma_{ii}' = \sigma_i'$, $\sigma_{ij}' = 0$ $(i \neq j)$.

Необходимы следующие Λ_{ij}

$$\Lambda_{12} = \left(\rho p_\rho + \frac{1}{\rho} p_E p + \frac{1}{3}\mu\right)\xi_1\xi_2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} p_E\right)\sigma_{22}'\xi_1\xi_2 + \frac{1}{2}\sigma_{11}'\xi_1\xi_2$$

$$\Lambda_{13} = \left(\rho p_\rho + \frac{1}{\rho} p_E p + \frac{1}{3}\mu\right)\xi_1\xi_3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} p_E\right)\sigma_{33}'\xi_1\xi_3 + \frac{1}{2}\sigma_{11}'\xi_1\xi_3$$

$$\Lambda_{22} = \left(\rho p_\rho + \frac{1}{\rho} p_E p + \frac{1}{3}\mu\right)\xi_2^2 + \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - \frac{1}{\rho} p_E\sigma_{22}'\xi_2^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_{11}'\xi_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_{22}'\xi_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_{33}'\xi_3^2 - \frac{1}{2}\sigma_{22}'(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$$

$$\Lambda_{23} = \left(\rho p_\rho + \frac{1}{\rho} p_E p + \frac{1}{3}\mu\right)\xi_2\xi_3 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} p_E\right)\sigma_{33}'\xi_2\xi_3 + \frac{1}{2}\sigma_{22}'\xi_2\xi_3$$

$$\Lambda_{32} = \left(\rho p_\rho + \frac{1}{\rho} p_E p + \frac{1}{3}\mu\right)\xi_3\xi_2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho} p_E\right)\sigma_{22}'\xi_3\xi_2 + \frac{1}{2}\sigma_{33}'\xi_3\xi_2$$

$$\Lambda_{33} = \left(\rho p_\rho + \frac{1}{\rho} p_E p + \frac{1}{3}\mu\right)\xi_3^2 + \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - \frac{1}{\rho} p_E\sigma_{33}'\xi_3^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_{11}'\xi_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_{22}'\xi_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_{33}'\xi_3^2 - \frac{1}{2}\sigma_{33}'(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$$

Раскрывая определитель, получим квадратное уравнение

$$[\rho\Omega^2 - \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)]^2 - {}^3/_2(\sigma_1'\xi_1^2 + \sigma_2'\xi_2^2 + \sigma_3'\xi_3^2)[\rho\Omega^2 - \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)] + {}^1/_4(\sigma_2' - \sigma_1')(\sigma_3' - \sigma_1')\xi_1^4 + {}^1/_4(\sigma_1' - \sigma_2')(\sigma_3' - \sigma_2')\xi_2^4 + {}^1/_4(\sigma_2' - \sigma_3')(\sigma_1' - \sigma_3')\xi_3^4 - {}^1/_4(\sigma_2' - \sigma_1')^2\xi_1^2\xi_2^2 - {}^1/_4(\sigma_3' - \sigma_1')^2\xi_1^2\xi_3^2 - {}^1/_4(\sigma_3' - \sigma_2')^2\xi_2^2\xi_3^2 = 0$$

Корни этого уравнения таковы:

$$\rho\Omega_{2,3}^2 = \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + {}^3/_4(\sigma_1'\xi_1^2 + \sigma_2'\xi_2^2 + \sigma_3'\xi_3^2) \pm \pm {}^1/_4[(\sigma_1'\xi_1^2 + \sigma_2'\xi_2^2 + \sigma_3'\xi_3^2) - 4(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(\sigma_2'\sigma_3'\xi_1^2 + \sigma_3'\sigma_1'\xi_2^2 + \sigma_1'\sigma_2'\xi_3^2)]^{1/2}$$

Они соответствуют скоростям распространения поперечных волн. Корень, соответствующий скорости распространения продольных волн, в главных осях имеет вид

$$\rho\Omega_1^2 = (\rho p_\rho + \rho^{-1}p_E p + {}^4/_3\mu)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - \rho^{-1}p_E(\sigma_1'\xi_1^2 + \sigma_2'\xi_2^2 + \sigma_3'\xi_3^2)$$

если положить $\sigma_i' = 2\mu d_i$, то вычисленные корни с точностью до обозначений совпадают с вычисленными для модели (1) приближениями собственных значений. Это служит подтверждением того, что рассмотренная модель (2) является приближением модели (1) с уравнением состояния $E = E^{(0)}(\rho, S) + 2m'(\rho, S)D$. Дефектом модели (2) является отсутствие у нее интеграла — закона сохранения энтропии при адиабатических процессах.

Автор благодарен С. К. Годунову за обсуждения.

Поступила 24 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К., Роменский Е. И.* Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах. ПМТФ, 1972, № 6, стр. 124—144.
2. *Уилкинс М. Л.* Расчет упруго-пластических течений. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., «Мир», 1967.
3. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., «Мир», 1972.
5. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.