

УДК 539.21:66.061.1

## АНАЛИЗ РАСТВОРЕНИЯ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ В ФОРМЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

А. И. Мошинский

Российский научный центр “Прикладная химия”, 197198 Санкт-Петербург

Рассматривается математическая модель непрерывного растворения частиц в форме параллелепипеда, в основе которой лежит функция распределения кристаллов по размерам. Выведено уравнение для эволюции недосыщения раствора. Представлены некоторые результаты расчетов по этому уравнению. Проведен анализ устойчивости полученного стационарного решения.

**Введение.** При математическом описании ряда процессов, протекающих с ростом (растворением) частиц, капель, пузырьков и т. п., широкое распространение находят модели, основанные на использовании функции распределения частиц по размерам (ФРЧПР) [1–4]. Точность таких моделей достаточна для практики, и их использование позволяет определить гранулометрический состав дисперсной системы. Более детальные и строгие методы механики многофазных систем [5–7] требуют проведения существенно более сложных расчетов и часто из-за неточностей и сложностей замыкания основных уравнений не имеют преимуществ по сравнению с подходом, в котором используется ФРЧПР.

Как правило, форма твердых частиц в растворе далека от сферической. Тем не менее число работ, посвященных исследованию массового роста включений в несущую среду, форма которых отлична от сферической, очень незначительно (см., например, [8–10]). В этих работах изучается массовый рост полидисперсной системы твердых частиц в растворе. Также представляет интерес массовое растворение частиц, имеющих более сложную, чем сфера, форму, для описания геометрии которых необходимо несколько параметров. Автору неизвестны работы по этой теме. В настоящем исследовании анализируется растворение полидисперсной системы частиц в форме параллелепипеда. Данная форма частиц часто встречается в природе и технике и, по-видимому, является наиболее простой после сферической.

**1. Постановка задачи.** Будем считать, что в системе происходит интенсивное перемешивание суспензии. В этом случае можно считать, что свойства двухфазной системы не зависят от пространственных координат, и использовать кинетический закон растворения частиц, который, как известно, реализуется при больших числах Рейнольдса [11]. В кинетическом режиме растворение граней кристалла не зависит от геометрии частиц (их размеров), а определяется только недосыщением раствора  $C - C^*$  ( $C < C^*$ ). Здесь  $C$  — концентрация целевого компонента в растворе;  $C^*$  — равновесное значение концентрации при заданной постоянной температуре. Таким образом, рассматривается изотермическое растворение. Типичной является линейная зависимость скорости изменения размеров частицы от недосыщения [11], которая в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = U(C - C^*), \quad \frac{dy}{dt} = V(C - C^*), \quad \frac{dz}{dt} = W(C - C^*). \quad (1.1)$$

Здесь  $t$  — время;  $U, V, W$  — известные положительные постоянные, зависящие от гидродинамической обстановки в окрестности частицы и физико-химических характеристик

(плотности, вязкости и т. д.) среды [11]. Форма кристалла (параллелепипед) описывается тремя координатами: длиной  $x$ , шириной  $y$  и высотой  $z$ . Поскольку противоположные грани параллелепипеда растут одинаково, значения  $U, V, W$  в уравнении (1.1) соответствуют удвоенной скорости перемещения соответствующей грани.

При формулировке основных уравнений задачи не учитываются флуктуации скорости растворения кристаллов, а также влияние агрегации и раскалывания кристаллов на рассматриваемый процесс. Для ФРЧПР  $f(x, y, z, t)$ , определяющей число частиц  $\Delta N$  в элементарном объеме  $\Delta x \Delta y \Delta z$  (т. е.  $\Delta N = f(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z$  при малых значениях  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ), уравнение материального баланса по целевому компоненту в твердой фазе имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (C - C^*)U_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{f_*(x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3, t)}{\tau}, \quad (1.2)$$

где  $\tau$  — среднее время переноса частиц в системе (аппарат, в котором осуществляется растворение), равное отношению объема аппарата к объемному расходу целевого компонента в кристаллах;  $f_*$  — функция распределения на входе в систему, которая в реальных ситуациях может содержать (описывать) возвращающиеся в аппарат нерастворенные частицы (фракцию кристаллов рецикла). В общем случае  $f_*$  может зависеть также от времени. В данной работе  $f_*$  считаем функцией только координат  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), характеризующих форму кристалла. Для удобства в некоторых формулах (в частности, в (1.2)) будем использовать обозначения  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, U_1 = U, U_2 = V, U_3 = W$  и правило суммирования по повторяющимся индексам от одного до трех.

Следует отметить, что в частном случае непроточных систем, когда объемный расход твердой фазы стремится к нулю, параметр  $\tau$  стремится к бесконечности и правая часть уравнения (1.2) становится равной нулю (периодический процесс). Подобные режимы в задачах данного класса рассматривались в [2, 12, 13].

Уравнения (1.2) недостаточно для проведения анализа растворения. Необходимо рассмотреть также баланс целевого вещества в растворе, т. е. уравнение эволюции для недосыщения

$$\frac{dC}{dt} = \beta(C^* - C) \left( U \int_Q yz f dQ + V \int_Q xz f dQ + W \int_Q xy f dQ \right) - \frac{\alpha C}{\tau}. \quad (1.3)$$

Здесь три первых (содержащих интегралы) слагаемых в правой части характеризуют переход вещества из твердой фазы в раствор (т. е. собственно растворение), а последнее —

выход растворенного вещества из системы. Слагаемое  $(C^* - C)U \int_Q yz f dQ$  представляет

собой произведение площади грани  $yz$ , перпендикулярной оси  $x$ , и скорости ее перемещения  $U(C^* - C)$ , т. е. обозначает увеличение (уменьшение) в единицу времени объема кристалла с размерами  $x, y, z$  за счет изменения координаты  $x$ . После умножения на  $f dQ$  и интегрирования проводится суммирование приращения объема всей совокупности кристаллов. Аналогичный смысл имеют два других интегральных слагаемых. В сумме все эти слагаемые дают увеличение объема совокупности кристаллов за счет роста (растворения) всех (трех) пар граней.

В (1.3) и далее тройной интеграл по  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в пределах  $(0, \infty)$  по каждой координате обозначен одним интегралом с символом  $Q$  на нижнем пределе. При этом  $dQ = dx dy dz$  — краткая запись произведения дифференциалов. Перенос растворенного вещества может происходить со скоростью, отличной от скорости переноса кристаллов.

Это обстоятельство учитывает постоянная  $\beta$ , равная отношению расхода целевого вещества в растворе к расходу вещества в кристаллах. В уравнении (1.3) предполагается, что в систему поступает жидкость с нулевой концентрацией целевого компонента, хотя при другой схеме процесса (например, при наличии рецикла) в систему может проникать целевой компонент в растворе. Параметр  $\beta$  — коэффициент формы, учитывающий переход вещества из кристаллов в раствор. Для комбинации интегралов, аналогичной приведенной в (1.3), введем обозначение

$$S[f(x, y, z)] = \int_Q (Uyz + Vxz + Wxy)f(x, y, z) dQ. \quad (1.4)$$

Хотя оператор  $S$  после интегрирования по  $Q$  не зависит от  $x, y, z$ , будем указывать переменные и функции под знаком  $S$ , поскольку ниже рассматриваются случаи, когда переменные интегрирования  $x, y, z$  объединяются с некоторыми параметрами. При этом представляет интерес зависимость оператора  $S$  от этих параметров.

Уравнения (1.2), (1.3) следует дополнить начальными условиями

$$f|_{t=0} = f_0(x, y, z), \quad C|_{t=0} = C_0 \quad (C_0 < C^*), \quad (1.5)$$

описывающими соответственно гранулометрический состав и концентрацию целевого компонента в начале процесса. Что касается граничных условий, то для нестационарных задач растворения их ставить не нужно [14] (в отличие от аналогичных задач массовой кристаллизации из растворов). Это связано со знаком скорости роста (растворения), который в задачах растворения таков, что характеристики уравнения (1.2) приходят на плоскости  $x = 0, y = 0, z = 0$  (в общем случае конкретная характеристика приходит на одну из этих плоскостей). Действительно, характеристики (1.2) представляют собой решения системы уравнений (1.1), и, поскольку  $C < C^*$ , все координаты  $x_j$  уменьшаются. Поэтому из области  $x > 0, y > 0, z > 0$ , где из физических соображений определено начальное условие  $f_0$ , характеристические линии выходят. Для стационарных задач растворения следует применять условие стремления к нулю ФРЧПР при неограниченном увеличении размеров  $x_j$  кристалла. Фактически ФРЧПР становится равной нулю при увеличении  $x_j$  после пересечения некоторой поверхности в первом квадранте системы координат  $(x, y, z)$ . Это справедливо и для функций  $f_*$  и  $f_0$ .

Отсутствие граничных условий на плоскостях  $x_j = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в задачах растворения вносит существенные изменения в анализ проблемы по сравнению с задачами массовой кристаллизации, хотя в основных уравнениях меняются только знаки скоростей изменения размеров. В частности, при растворении не могут возникать автоколебания. При кристаллизации появление автоколебаний происходит при достаточно быстро возрастающей функции интенсивности нуклеации в граничном условии для уравнения ФРЧПР [15, 16]. Автору неизвестны доказательства устойчивости или потери устойчивости для конкретных моделей растворения. (Ниже для модели (1.2), (1.3) доказано, что ее стационарное решение устойчиво.) В данной работе анализируется массовое растворение на основе ФРЧПР. Другие методы анализа предложены, в частности, в [11, 17]. В связи с отсутствием граничных условий на плоскостях  $x_j = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) для анализа задачи растворения нельзя непосредственно использовать моментный подход [1, 18], который применяется при анализе кинетического режима роста частиц.

**2. Стационарное решение.** В стационарном режиме в уравнениях (1.2), (1.3) необходимо отбросить производные по времени. Дополнительным условием для стационарной системы (1.2), (1.3) будем считать условие стремления к нулю ФРЧПР при  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ . Параметрам стационарного решения соответствует индекс  $s$ . Условие  $C = C_s$  упрощает интегрирование уравнения (1.2). Интеграл стационарного уравнения (1.2) принимает вид

$$f_s(x, y, z) = \frac{1}{\tau U \Delta C} \int_x^\infty \exp\left(\frac{x - \eta}{\tau U \Delta C}\right) f_*\left(\eta, y + \frac{V}{U}(\eta - x), z + \frac{W}{U}(\eta - x)\right) d\eta =$$

$$= \int_0^\infty \exp(-\mu) f_*(x + \mu\tau U \Delta C, y + \mu\tau V \Delta C, z + \mu\tau W \Delta C) d\mu. \quad (2.1)$$

Здесь  $\Delta C = C^* - C_s$ .

В (2.1) неизвестная величина  $\Delta C$ , точнее,  $C_s$  определяется с использованием стационарного уравнения (1.3), которое с учетом (2.1) можно записать в виде

$$\alpha C_s = \beta\tau\Delta C \int_0^\infty \exp(-\eta) d\eta S[f_*(x + \eta\tau U \Delta C, y + \eta\tau V \Delta C, z + \eta\tau W \Delta C)]. \quad (2.2)$$

Покажем, что при физически реализуемых распределениях  $f_*$  и реалистичных параметрах задачи (в частности, параметры  $\alpha, \beta, \tau, U, V$  и  $W$  положительны) уравнение (2.2) имеет по крайней мере один корень  $C_s$ . Стационарное значение концентрации  $C_s$  меняется в интервале  $C_s \in [0, C^*]$ . Следует отметить, что при  $C_s = 0$  правая часть уравнения (2.2) положительна, тогда как левая равна нулю, т. е. правая часть больше левой. При  $C_s \rightarrow C^*$  ( $\Delta C \rightarrow 0$ ) правая часть (2.2) равна  $\beta\tau\Delta C S[f_*(x, y, z)]$ , т. е. стремится к нулю, так как множитель  $\Delta C \rightarrow 0$ . Левая часть (2.2)  $\alpha C^* > 0$ , т. е. больше правой части. При реализуемых на практике распределениях  $f_*(x, y, z)$  правая часть (2.2) будет непрерывной функцией  $C_s$ , поэтому в силу теоремы Больцано — Коши [19, с. 168] в некоторой точке  $C_s \in (0, C^*)$  уравнение (2.2) будет справедливо. Это доказывает существование стационарного режима. При задании конкретной функции  $f_*(x, y, z)$  корень  $C_s$  легко находится современными численными методами.

На рис. 1 показан графический способ определения корня  $C_s$ . Рассмотрен случай, когда на вход системы подается монодисперсная фракция кристаллов с размерами  $X_*, Y_*, Z_*$ , т. е.  $f_*(x, y, z) = N_*\delta(x - X_*)\delta(y - Y_*)\delta(z - Z_*)$  ( $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака;  $N_*$  — число кристаллов, поступающих на вход системы). Отметим, что данный пример представляет практический интерес. Уравнение (2.2) после преобразований приводится к виду

$$G_s = g(G_s) = A\Delta G(B^2(uy_*z_* + vx_*z_* + wx_*y_*)[1 - \exp(-B/\Delta G)] -$$

$$- 2B\Delta G(uvz_* + vwx_* + uwy_*)[1 - (1 + B/\Delta G)\exp(-B/\Delta G)] +$$

$$+ 6(\Delta G)^2uvw\{1 - [1 + B/\Delta G + 0,5(B/\Delta G)^2]\exp(-B/\Delta G)\}), \quad (2.3)$$

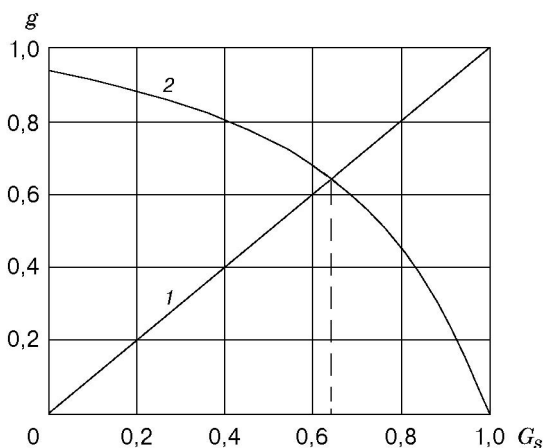


Рис. 1. Графическое представление решения уравнения (2.3) при  $\tau = 1, u = 1, v = 1,2, w = 1,5, A = 0,45, C^* = 1$ :  
 1 —  $g = G_s, 2 — g(G_s)$

где

$$A = \frac{\beta N_*(C^*)^2 (\tau U_*)^3}{\varkappa}, \quad B = \frac{1}{\tau C^*} \min \left( \frac{X_*}{U}, \frac{Y_*}{V}, \frac{Z_*}{W} \right), \quad G_s = \frac{C_s}{C^*}, \quad \Delta G = \frac{\Delta C}{C^*} = 1 - G_s. \quad (2.4)$$

Параметры  $U, V, W, X_*, Y_*, Z_*$  приведены к безразмерному виду  $u_1 = u = U/U_*$ ,  $u_2 = v = V/U_*$ ,  $u_3 = w = W/U_*$ ,  $x_* = X_*/r_*$ ,  $y_* = Y_*/r_*$ ,  $z_* = Z_*/r_*$ , где в качестве масштабов  $U_*$  и  $r_*$  выбраны значения  $U, V, W, X_*, Y_*, Z_*$ , при которых значение параметра  $B$  в (2.4) минимальное. При таком выборе масштабов одна из величин  $x_*, y_*, z_*$  и соответственно одна из величин  $u, v, w$  равны единице. Если указанное минимальное значение  $B$  реализуется при нескольких значениях отношений  $X_*/U, Y_*/V, Z_*/W$ , то можно взять любое из этих равных отношений для определения масштабов  $U_*$  и  $r_*$ . Например, если  $X_*/U = Y_*/V < Z_*/W$ , то можно выбрать  $U_* = U, r_* = X_*$  или  $U_* = V, r_* = Y_*$ .

Для выполнения расчетов важно знать, какой из размеров кристалла ( $x, y$  или  $z$ ) в процессе его растворения первым обратится в нуль, т. е. каким образом кристалл исчезнет. Ясно, что кристаллы в форме параллелепипеда могут исчезнуть, имея в момент перед полным растворением форму пластинки, один из размеров которой существенно меньше остальных. В рассматриваемом примере это обстоятельство учитывается масштабами  $U_*$  и  $r_*$  (из отношений  $X_*/U, Y_*/V, Z_*/W$  выбирается минимальное). Поскольку члены вида  $X_*/(UC^*)$  имеют размерность времени, параметр  $B$  в (2.4) представляет собой безразмерное время достижения одним из размеров кристалла нулевого значения. Например, если  $B = X_*/(UC^*)$ , то  $U_* = U, r_* = X_*$  и первой обратится в нуль координата  $x$ . Если  $X_*/U = Y_*/V < Z_*/W$ , то одновременно обратятся в нуль размеры  $x$  и  $y$ , т. е. в момент исчезновения кристалл имеет “игольчатую” форму с ненулевым значением размера  $z$ . В наиболее “вырожденном” случае  $X_*/U = Y_*/V = Z_*/W$  все три размера кристалла  $x, y, z$  обратятся в нуль одновременно при полном растворении.

Приведенным на рис. 1 данным соответствуют следующие значения параметров:  $x_* = 1, y_* = 1,5, z_* = 1,8$ . При этом  $U_* = 1, r_* = 1$  и  $B = 1$ . Кривая, соответствующая правой части уравнения (2.3), пересекает вертикальную ось при  $g = 0,936$ . Значение корня  $G_s = 0,643$ .

**3. Доказательство устойчивости стационарного решения (2.1).** Для сходного с растворением процесса массовой кристаллизации проведены исследования по выявлению границ устойчивости [15, 16, 18, 20]. Аналогичного анализа для процесса массового растворения, насколько известно автору, ранее не проводилось.

При построении основного “частотного” уравнения будем следовать [20], где анализировалось влияние неизотермичности процесса на устойчивость работы кристаллизатора. Выведем уравнения для описания эволюции малого отклонения от стационарного решения. Нестационарную часть возмущения ФРЧПР и недосыщения раствора полагаем экспоненциальной функцией времени с комплексным множителем  $p$  у времени. Это позволит получить уравнение, по расположению корней которого в плоскости ( $\text{Re } p, \text{Im } p$ ) можно судить об устойчивости системы (или о характеристиках неустойчивости). Имеем

$$f(x, y, z, t) = f_s(x, y, z) + \exp(pt)\varphi(x, y, z), \quad C(t) = C_s + \exp(pt)c. \quad (3.1)$$

Предполагается, что  $|\varphi| \ll f_s$  и  $|c| \ll C_s$ . Подставляя выражения (3.1) в (1.2) и (1.3), после линеаризации относительно  $\varphi$  и  $c$  получаем следующие соотношения:

$$p\varphi - \Delta C U_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + c U_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j} + \frac{\varphi}{\tau} = 0, \quad \left( p + \frac{\varkappa}{\tau} \right) \frac{c}{\beta} - \Delta C S[\varphi(x, y, z)] = c S[f_s(x, y, z)], \quad (3.2)$$

где оператор  $S$  определен в (1.4). Проинтегрировав линейное относительно  $\varphi(x, y, z)$  первое

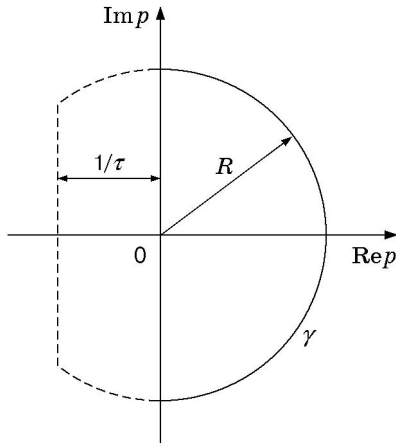


Рис. 2. Контур для определения числа корней уравнения (3.4)

уравнение (3.2) при условиях  $\varphi \rightarrow 0$  при  $x, y, z \rightarrow \infty$ , получим

$$\varphi = \frac{c}{\Delta C} \left( f_s(x, y, z) - \int_0^\infty \exp(-\eta) f_s(x + U\chi\eta, y + V\chi\eta, z + W\chi\eta) d\eta \right), \quad (3.3)$$

где  $\chi = \tau \Delta C / (1 + p\tau)$ . Подставив (3.3) во второе уравнение (3.2), после преобразований с учетом  $c \neq 0$  получим уравнение для определения частот возникающих колебаний

$$p + \frac{\varkappa}{\tau} + \beta S[f_s(x, y, z)] = -\beta \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta}{\chi}\right) S\left[U_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x + U\eta, y + V\eta, z + W\eta)\right] d\eta. \quad (3.4)$$

Чтобы убедиться в устойчивости системы, необходимо показать, что уравнение (3.4) не имеет корней с положительной вещественной частью. Для этого воспользуемся теоремой Руше [21, с. 454]. Выражение в левой части (3.4) имеет единственный корень  $p = -\varkappa/\tau - \beta S[f_s(x, y, z)]$ , который находится в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной  $p$ , т. е. в правой полуплоскости корней нет. Покажем, что в правой полуплоскости, т. е. при  $\text{Re } p \geq 0$ , левая часть (3.4) по абсолютной величине превосходит правую. Это необходимо для построения контура  $\gamma$ , позволяющего применить теорему Руше. Контур включает полуокружность радиуса  $R$ , проведенную из точки  $p = 0$ , и вертикальную линию  $p = iy, y \in (-R, R)$ , где  $i$  — мнимая единица (рис. 2). Фактически мы устанавливаем отсутствие корней уравнения (3.4) при  $\text{Re } p > -1/\tau$  ( $\tau > 0$ ), используя прямолинейную границу контура, сдвинутую по отношению к линии  $\text{Re } p = 0$  на  $1/\tau$  влево, т. е. граница контура есть  $\text{Re}(1/\chi) = 0$  (рис. 2).

Комплексная переменная  $p$  входит в уравнение (3.4) только под знаком экспоненты (через параметр  $\chi$ ) в правой части. Следует отметить, что при заменах переменных, необходимых при выводе (3.4), в случае  $\text{Re } p \geq 0$  интегрирование по  $\eta$  поворотом контура всегда можно свести к вещественному интервалу  $(0, \infty)$ . Оценим правую часть (3.4) при  $\text{Re } p \geq -1/\tau$ . Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta}{\chi}\right) S\left[U_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x + U\eta, y + V\eta, z + W\eta)\right] d\eta \right| &\leq \\ &\leq - \int_0^\infty \frac{d}{d\eta} S[f_s(x + U\eta, y + V\eta, z + W\eta)] d\eta = S[f_s(x, y, z)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При выводе (3.5) учитывалось, что производная по  $\eta$  от  $S[f_s(x + U\eta, y + V\eta, z + W\eta)]$  всюду отрицательна, в чем можно убедиться, используя выражение

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\eta}[f_s(x + U\eta, y + V\eta, z + W\eta)] &= U_j S\left[\frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x + U\eta, y + V\eta, z + W\eta)\right] = \\ &= -U^2 \int_0^\infty \int_0^\infty yx f_s(U\eta, y + V\eta, z + W\eta) dy dz - V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty xz f_s(x + U\eta, V\eta, z + W\eta) dx dz - \\ &\quad - W^2 \int_0^\infty \int_0^\infty xy f_s(x + U\eta, y + V\eta, W\eta) dx dy - \\ &\quad - 2 \int_Q (UVz + VWx + UWy) f_s(x + U\eta, y + V\eta, z + W\eta) dQ < 0. \end{aligned}$$

При выводе этого выражения учитывались условия  $U > 0, V > 0, W > 0, f_s > 0$ , форма области интегрирования и зависимость (1.4).

Из (3.5) следует, что правая часть уравнения (3.4) не больше третьего слагаемого  $\beta S[f_s(x, y, z)]$  в левой части (которое вещественно). (Из физических соображений параметры  $\varkappa, \beta, \tau, U, V$  и  $W$  положительны.) Неравенство (3.5) будет выполняться и при  $\operatorname{Re} p \geq 0$ . В этой области

$$\left| p + \frac{\varkappa}{\tau} + \beta S[f_s(x, y, z)] \right| > \left| \beta \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta}{\chi}\right) S\left[U_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x + U\eta, y + V\eta, z + W\eta)\right] d\eta \right|. \quad (3.6)$$

Полагаем, что функция  $f_*$  такая (например, непрерывная), что при подстановке  $f_s$  из (2.1) в (3.4) обеспечивается аналитичность по  $\chi$  правой части (3.4) при  $\operatorname{Re} p \geq 0$ . Поскольку правая и левая части (3.4) аналитичны внутри контура  $\gamma$  и непрерывны на нем, а также выполняется неравенство (3.6), применима теорема Руше [21]. Из этой теоремы следует, что внутри контура, ограниченного линией  $\gamma$  и отрезком линии  $\operatorname{Re} p = 0$ , что делает контур замкнутым, левая часть (3.4)  $p + \varkappa/\tau + \beta S[f_s(x, y, z)] = 0$  и полное уравнение (3.4) имеют одинаковое число корней. Однако уравнение  $p + \varkappa/\tau + \beta S[f_s(x, y, z)] = 0$  при любых значениях параметров не имеет корней внутри данного контура. Значит, и уравнение (3.4) не имеет здесь корней. При  $R \rightarrow \infty$  уравнение (3.4) не имеет корней в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ , т. е. стационарное решение (2.1) устойчиво по отношению к малым возмущениям. Используя неравенство (3.5), можно показать, что вещественная часть корней (3.4) будет не больше  $-1/\tau$ , т. е. имеется определенный запас устойчивости.

**4. Нестационарный режим.** При устойчивости стационарного решения нестационарный режим описывает процесс перехода к стационарному режиму. Для решения задачи (1.2)–(1.5) удобно ввести переменные, связанные с характеристиками уравнения (1.2):

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_x}{dt} &= U(C^* - C), & \frac{d\lambda_y}{dt} &= V(C^* - C), & \frac{d\lambda_z}{dt} &= W(C^* - C), \\ \lambda_x(0) &= \lambda_y(0) = \lambda_z(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

От уравнений характеристик (1.1) для (1.2) [14] формулы (4.1) отличаются только знаком, но (4.1) задает также начальные условия для функций  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ . Вдоль характеристики уравнение (1.2) можно записать в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{f_*(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t), y(t), z(t), t)}{\tau}.$$

Формальное решение ( $C(t)$ , а значит, и  $\lambda_j(t)$  считаем известными функциями времени) имеет вид

$$f(x, y, z, t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left( f_0(x + \lambda_x(t), y + \lambda_y(t), z + \lambda_z(t)) + \frac{1}{\tau} \int_0^t \exp\left(\frac{\eta}{\tau}\right) f_*(x + \lambda_x(t) - \lambda_x(\eta), y + \lambda_y(t) - \lambda_y(\eta), z + \lambda_z(t) - \lambda_z(\eta)) d\eta \right). \quad (4.2)$$

Функция  $f$  в (4.2) удовлетворяет уравнению (1.2) и начальному условию (1.5), что легко проверить непосредственным вычислением, используя определение функций  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  согласно (4.1). Вычислив интегралы по  $Q$  в уравнении (1.3), получим

$$\frac{dC}{dt} = \beta(C^* - C) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left( S[f_0(x + \lambda_x(t), y + \lambda_y(t), z + \lambda_z(t))] + \frac{1}{\tau} \int_0^t \exp\left(\frac{\eta}{\tau}\right) S[f_*(x + \lambda_x(t) - \lambda_x(\eta), y + \lambda_y(t) - \lambda_y(\eta), z + \lambda_z(t) - \lambda_z(\eta))] d\eta \right) - \alpha \frac{C}{\tau}, \quad (4.3)$$

$$C(0) = C_0.$$

Уравнения (4.3) и (4.1) образуют замкнутую систему для определения концентрации  $C(t)$  и вспомогательных функций  $\lambda_x(t), \lambda_y(t), \lambda_z(t)$ . Решив задачу (4.1), (4.3), функцию  $f$  в (4.2) можно считать определенной, поскольку необходимые для ее вычисления функции  $\lambda_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) найдены.

В качестве примера решения данной задачи рассмотрим случай, когда на вход системы подается монодисперсная фракция кристаллов с размерами  $X_*, Y_*, Z_*$ , т. е.  $f_*(x, y, z) = N_* \delta(x - X_*) \delta(y - Y_*) \delta(z - Z_*)$ . Начальную функцию  $f_0(x, y, z)$  считаем равной нулю. Интеграл от дельта-функций в (4.3) легко вычисляется. В результате получаем частный случай уравнения (4.3) в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\zeta} = \alpha \left[ A(1 - G) \exp(-\zeta) \int_0^\zeta \exp(\mu) d\mu \left( u[\hat{y} + \omega_y(\mu) - \omega_y(\zeta)][\hat{z} + \omega_z(\mu) - \omega_z(\zeta)] + \right. \right. \\ \left. \left. + v[\hat{x} + \omega_x(\mu) - \omega_x(\zeta)][\hat{z} + \omega_z(\mu) - \omega_z(\zeta)] + \right. \right. \\ \left. \left. + w[\hat{x} + \omega_x(\mu) - \omega_x(\zeta)][\hat{y} + \omega_y(\mu) - \omega_y(\zeta)] \right) \prod_{j=1}^3 H(\hat{x}_j + \omega_j(\mu) - \omega_j(\zeta)) - G \right], \quad (4.4) \end{aligned}$$

$$G|_{\zeta=0} = G_0 = \frac{C_0}{C^*};$$

$$\frac{d\omega_j}{d\zeta} = u_j(1 - G), \quad \omega_j|_{\zeta=0} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (4.5)$$

где параметры  $u_j$  определены при формулировке уравнений (2.3), (2.4);  $H(z)$  — функция Хевисайда ( $H(z) = 1$  при  $z \geq 0$ ,  $H(z) = 0$  при  $z < 0$ );  $\zeta = t/\tau$  — безразмерное время;  $G = C/C^*$  — безразмерная концентрация;  $\omega_j(\zeta) = \lambda_j(t)/(\tau U_* C^*)$  — безразмерные функции  $\lambda_j(t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ); параметр  $A$  определяется согласно (2.4);  $\hat{x}_j = X_{*j}/(\tau U_* C^*)$ .

Появление в (4.4) функций Хевисайда связано с изменением характера решения в момент полного растворения (исчезновения) в системе определенной фракции кристаллов,



т. е. когда первые кристаллы с размерами  $X_*$ ,  $Y_*$ ,  $Z_*$ , введенные в аппарат, полностью растворились. При этом интегрирование в (4.4) проводится начиная с некоторого значения  $\mu = \mu_*(\zeta)$  (а не с нуля) по достижении определенного момента. Отметим, что речь идет о частном случае выбора функций  $f_*$  и  $f_0$ . В общем случае при наличии в системе кристаллов очень малого размера исчезновение частиц может начаться сразу после их ввода в аппарат.

Линейная зависимость скоростей растворения (1.1) от недосыщения позволяет упростить задачу, при этом можно получить два интеграла системы (4.5). Обезразмеривание параметров согласно (2.3), (2.4) предполагает, что одна пара значений  $U_j$ ,  $X_{*j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ), при которых значение параметра  $B$  в (2.4) минимально, обуславливает равенство единице соответствующих безразмерных величин. Для определенности считаем  $u = 1$ ,  $x_* = 1$ , т. е.  $U_* = U$ ,  $r_* = X_*$  (см. рис. 1). Тогда функции  $\omega_y(\zeta)$  и  $\omega_z(\zeta)$  в (4.5) целесообразно выразить через  $\omega_x(\zeta)$ . Получим

$$\omega_y(\zeta) = v\omega(\zeta), \quad \omega_z(\zeta) = w\omega(\zeta), \quad \omega(\zeta) = \omega_x(\zeta), \quad (4.6)$$

где у функции  $\omega_x(\zeta)$  для краткости опущен индекс. Отметим, что соотношения (4.6) справедливы в общем случае при выполнении (1.1), а не только для рассматриваемых условий. Использование (4.6) позволяет свести задачу (4.4), (4.5) к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\zeta} = \varkappa \left[ A(1 - G) \exp(-\zeta) \int_0^\zeta \exp(\mu) d\mu (u[\hat{y} + v(\omega(\mu) - \omega(\zeta))][\hat{z} + w(\omega(\mu) - \omega(\zeta))] + \right. \\ \left. + v[B + \omega(\mu) - \omega(\zeta)][\hat{z} + w(\omega(\mu) - \omega(\zeta))] + \right. \\ \left. + w[B + \omega(\mu) - \omega(\zeta)][\hat{y} + v(\omega(\mu) - \omega(\zeta))] H(B + \omega(\mu) - \omega(\zeta)) - G \right], \quad (4.7) \\ G(0) = G_0; \end{aligned}$$

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = 1 - G, \quad \omega(0) = 0, \quad (4.8)$$

где  $B = \hat{x}$ . Кроме того, из трех “обрезающих” интегрирование функций Хевисайда в (4.4) оставлена только та, которая определяет нижний предел интегрирования по  $\mu$ .

В общем случае задача (4.7), (4.8) решается численно. Для аналитического решения этой задачи можно использовать метод итераций, взяв в качестве начального приближения стационарное решение. В этом случае функция  $\omega$  легко определяется из (4.8):  $\omega(\zeta) = \Delta G \zeta$ . Подстановка этого выражения в (4.7) (в интегральное слагаемое) приводит к достаточно сложному уравнению (что характерно для метода итераций) при  $\zeta < \xi = B/\Delta G$  (см. (2.4)) и простому при  $\zeta > \xi$ :

$$\frac{dG}{d\zeta} = \varkappa(G_s - G) \quad (\zeta > \xi). \quad (4.9)$$

Из результатов расчетов следует, что если уравнение (4.9) использовать во всем диапазоне времени, то при начальном условии (4.7) его решение

$$G(\zeta) = G_s + (G_0 - G_s) \exp(-\varkappa\zeta) \quad (4.10)$$

ближе к точному решению, чем решение, полученное методом итераций, в котором при  $\zeta < \xi$  вместо (4.9) используется другое уравнение, вытекающее из (4.7) и равенства  $\omega(\zeta) = \Delta G \zeta$ . Это обусловлено тем, что в качестве первого приближения метода итераций использовалось стационарное решение, более соответствующее действительности

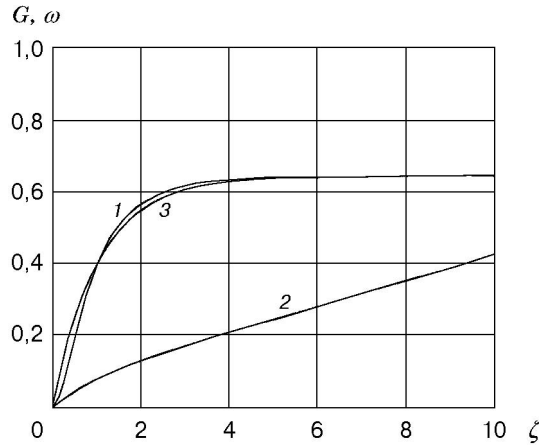


Рис. 3. Зависимости  $G(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  для нестационарного решения уравнений (4.7), (4.8) при  $G_0 = 0$ ,  $\varkappa = 0,95$ ,  $U_* = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $x_* = 1$ ,  $y_* = 1,5$ ,  $z_* = 1,8$ ,  $u = 1$ ,  $v = 1,2$ ,  $w = 1,5$ ,  $A = 0,45$ ,  $C^* = 1$ :  
 1, 3 —  $G(\zeta)$  (1 — численное решение, 3 — расчет по формуле (4.10)); 2 —  $0,1\omega(\zeta)$

при достаточно больших значениях времени. В результате приближение (4.9) для полного уравнения (4.7) в области  $\zeta < \xi$  может быть точнее, чем приближение итерационного метода в этом интервале.

Отмеченное обстоятельство позволяет использовать выражение (4.10) в качестве аппроксимации точного решения и далее применять его для приближенного представления функции  $\omega(\zeta)$  на основе решения (4.8) в виде

$$\omega(\zeta) = (1 - G_s)\zeta - (G_0 - G_s)[1 - \exp(-\varkappa\zeta)]/\varkappa. \tag{4.11}$$

Это, в свою очередь, позволяет получить приближенное выражение для ФРЧПР. Очевидно, что формулу (4.11) можно использовать и для приближенного определения ФРЧПР (4.2) (с учетом зависимости между  $\lambda_j$  и  $\omega_j$  и соотношения (4.6)) в общей задаче массового растворения. В безразмерных переменных это решение имеет вид

$$f(x, y, z, t) = \exp(-\zeta) \left( f_0(\hat{x} + u\omega(\zeta), \hat{y} + v\omega(\zeta), \hat{z} + w\omega(\zeta)) + \int_0^\zeta \exp(\mu) f_*(\hat{x} + u[\omega(\zeta) - \omega(\mu)], \hat{y} + v[\omega(\zeta) - \omega(\mu)], \hat{z} + w[\omega(\zeta) - \omega(\mu)]) d\mu \right), \tag{4.12}$$

где для симметрии записи введен множитель  $u$ , который в силу (4.6) равен единице. Таким образом, приближенное решение задачи (1.2)–(1.5) дают формулы (4.10)–(4.12) с учетом (4.6). При этом для определения приближенного решения необходимо найти стационарную концентрацию  $G_s$  из уравнения (2.2). Однако следует отметить, что при малых значениях времени определенное влияние на решение оказывает функция  $f_0$ , которая не учитывалась при выводе (4.11).

Результаты расчетов представлены на рис. 3. Видно, что приближенные значения  $G(\zeta)$  хорошо согласуются с результатами численного решения. Приближенная зависимость  $\omega(\zeta)$  на рис. 3 не показана, поскольку при данных параметрах и масштабах переменных численное и приближенное (4.11) решения практически совпадают.

При построении численного алгоритма интегральное слагаемое в (4.7) аппроксимировалось по формуле трапеций, а производные в (4.7) и (4.8) — конечными разностями

первого порядка  $dG/d\zeta = [G(\zeta + h) - G(\zeta)]/h$ ,  $d\omega/d\zeta = [\omega(\zeta + h) - \omega(\zeta)]/h$ , где  $h > 0$  — шаг разностной схемы. Следует отметить, что зависимость  $\omega(\zeta)$  достаточно близка к прямой линии практически на всем интервале.

**5. Интенсивность исчезновения частиц.** Для процесса массовой кристаллизации важной характеристикой является интенсивность возникновения зародышей новой фазы, для растворения — интенсивность исчезновения частиц. Составим уравнение изменения числа кристаллов  $N$ , определяемого величиной  $\int_Q f(x, y, z) dQ$ . Для этого проинтегрируем

по  $Q$  уравнение (1.2). В результате получим

$$\frac{dN}{dt} = -I + \frac{N_* - N}{\tau}, \quad (5.1)$$

где  $N_* = \int_Q f_*(x, y, z) dQ$  — число кристаллов, поступающих в систему. Интенсивность

исчезновения частиц  $I$  в (5.1) определяется соотношением

$$I = (C^* - C) \left( U \int_0^\infty \int_0^\infty f(0, y, z, t) dy dz + V \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, 0, z, t) dx dz + W \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y, 0, t) dx dy \right). \quad (5.2)$$

Для периодического процесса (в основных уравнениях  $\tau \rightarrow \infty$ ) согласно (5.1) эта величина характеризует скорость изменения числа частиц  $dN/dt$  в системе. В данном случае (периодический процесс) не рассматривается ни приток частиц в систему с интенсивностью  $N_*/\tau$ , ни их отток со скоростью  $N/\tau$ , как это имеет место в общем случае. В этой связи можно рассматривать эффективность процесса растворения в данной системе (аппарате). Под этой величиной (коэффициент интенсивности  $\nu$ ) удобно понимать отношение интенсивности исчезновения кристаллов в стационарном процессе к интенсивности их проникания в систему, т. е. согласно (2.1)

$$\nu = \frac{\tau I_s}{N_*} = 1 - \frac{N_s}{N_*} = \frac{1}{N_*} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta}{\tau \Delta C}\right) d\eta \left( U \int_0^\infty \int_0^\infty f_*(\eta U, y + \eta V, z + \eta W) dy dz + \right. \\ \left. + V \int_0^\infty \int_0^\infty f_*(x + \eta U, \eta V, z + \eta W) dx dz + W \int_0^\infty \int_0^\infty f_*(x + \eta U, y + \eta V, \eta W) dx dy \right). \quad (5.3)$$

Для рассматриваемого в данной работе случая поступления монодисперсной фракции кристаллов с размерами  $X_*$ ,  $Y_*$ ,  $Z_*$  функция  $f_*(x, y, z) = N_* \delta(x - X_*) \delta(y - Y_*) \delta(z - Z_*)$ . При этом из формулы (5.3) следует

$$\nu = \exp(-B/\Delta G). \quad (5.4)$$

Для параметров, соответствующих примеру на рис. 1, имеем  $\nu \approx 0,061$ .

Параметр  $\nu$  вводится для определения в системе доли исчезнувших кристаллов.

Выражение (5.3) можно упростить. Например, если  $\tau U_* \Delta C \ll 1$ , то функцию  $f_*$  в (5.3) можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $\eta$  в окрестности точки  $(x, y, z)$ . Ограничившись двумя первыми слагаемыми данного разложения, получим приближенное равенство

$$\nu \simeq \frac{\tau \Delta C}{N_*} \left( U \int_0^\infty \int_0^\infty f_*(0, y, z) dy dz + V \int_0^\infty \int_0^\infty f_*(x, 0, z) dx dz + W \int_0^\infty \int_0^\infty f_*(x, y, 0) dx dy \right). \quad (5.5)$$

Формулы (5.3)–(5.5) выражают числовую эффективность растворения, поскольку определяют долю растворившихся частиц. Можно ввести также коэффициент массовой (или объемной) эффективности. Определим его для стационарного процесса как отношение объема частиц, перешедших в раствор  $M(f_s) - M(f_*)$ , к объему поступивших в систему частиц  $M(f_*)$ :

$$\sigma = 1 - M(f_s)/M(f_*).$$

Здесь  $M(f) = \int_Q xyz f(x, y, z) dQ$  — моментная характеристика ФРЧПР, зависящая от среднего объема кристаллов. Умножив стационарное уравнение (1.2) на  $xyz$  и проинтегрировав по этим переменным (по  $Q$ ) в пределах  $(0, \infty)$ , получим

$$\tau \Delta C \int_Q (Uyz + Vxz + Wxy) f_s(x, y, z) dQ = M(f_*) - M(f_s).$$

Отсюда с использованием стационарного уравнения (1.3) получим величину коэффициента объемной интенсивности растворения

$$\sigma = \frac{\tau \Delta C}{M(f_*)} \int_Q (Uyz + Vxz + Wxy) f_s(x, y, z) dQ = \frac{\alpha C_s}{\beta M(f_*)}.$$

В случае монодисперсной функции  $f_*$  (см. рис. 1) имеем  $\sigma = G_s = 0,643$ . При  $\tau U \Delta C \ll 1$  можно получить формулу, аналогичную (5.5):

$$\begin{aligned} \sigma \simeq \frac{\tau \Delta C}{M(f_*)} & \left[ S[f_*(x, y, z)] - \tau \Delta C \left( U^2 \int_0^\infty \int_0^\infty yz f_*(0, y, z) dy dz + V^2 \int_0^\infty \int_0^\infty xz f_*(x, 0, z) dx dz + \right. \right. \\ & \left. \left. + W^2 \int_0^\infty \int_0^\infty xy f_*(x, y, 0) dx dy + 2 \int_Q (UVz + VWx + UWy) f_*(x, y, z) dQ \right) \right], \end{aligned}$$

содержащую характеристики функции  $f_*$  на входе.

Зависимость интенсивности исчезновения кристаллов от времени, построенная с использованием соотношения (5.2), показана на рис. 4 (кривая 2). Как и следовало ожидать,

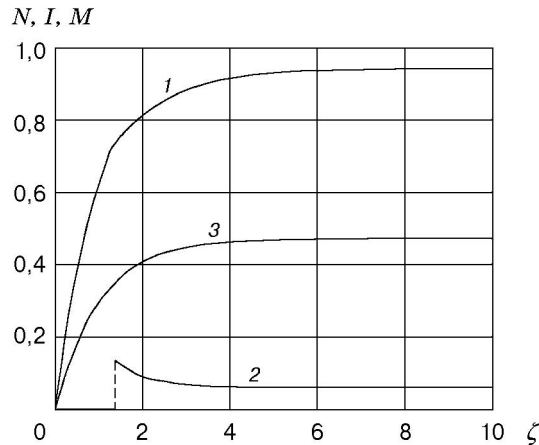


Рис. 4. Результаты нестационарного решения уравнений (4.7), (4.8):

1 — число частиц  $N(\zeta)$ , 2 — интенсивность исчезновения частиц  $I(\zeta)$ , 3 — суммарный объем частиц  $M(\zeta)$

исчезновение частиц начинается через некоторое время ( $\zeta \simeq 1,35$ ) после начала процесса. Это время соответствует полному растворению первых кристаллов, поступивших в систему. На рис. 4 представлены также зависимости числа частиц  $N$  (кривая 1) и объема  $M$  (кривая 3) от времени. При  $\zeta \simeq 1,35$  на кривой 1 имеется излом (разрыв производной). При  $\zeta \rightarrow \infty$  зависимости принимают значения, соответствующие стационарному решению ( $N_s \simeq 0,94$ ;  $I_s \simeq 0,06$ ;  $M_s \simeq 0,47$ ), которые можно получить также с использованием (2.1).

**Заключение.** Задача массового растворения (1.2)–(1.5) сводится к системе уравнений (4.7), (4.8) при использовании равенств (4.6), которые, в свою очередь, следуют из законов растворения (1.1). Отметим, что изложенная теория легко обобщается на случай более общий, чем рассмотренный в данной работе закон уменьшения размеров кристалла. Некоторые преобразования и результаты работы справедливы, если параметры  $U, V, W$  в (1.1) считать нелинейными функциями  $C - C^*$ , обращающимися в нуль при  $C = C^*$ . Если эти функции различные, то соотношения (4.6) не выполняются.

Пропорциональный рост граней кристалла (4.6) позволяет описать растворение кристаллов в форме параллелепипеда однопараметрической моделью, применимой для описания массового растворения сферических частиц. Задача (1.2)–(1.5) включает такой вариант как частный случай. Функцию  $f$  представим в виде  $f = F(x, y, z, t)\delta(yU - xV)\delta(zU - xW)$ . При подстановке этой зависимости в (1.2) слагаемые, содержащие производные  $\delta$ -функций, сократятся, а регулярная часть функции  $f$  будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U(C - C^*) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_*(x) - \psi(x, t)}{\tau}, \quad \psi(x, t) = F\left(x, x \frac{V}{U}, x \frac{W}{U}, t\right),$$

где функция  $\psi_*(x) = F_*(x, xV/U, xW/U)$  связана с функцией  $f_*$ . Второе уравнение модели растворения (1.3) можно записать в виде

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta(C^* - C)VW}{U^3} \int_0^\infty x^2 \psi(x, t) dx - \frac{\alpha C}{\tau}.$$

Эти уравнения с модифицированным начальным условием (1.5) для  $\psi$  представляют собой модель растворения сферических частиц и описывают растворение частиц, для размеров которых справедливы соотношения  $x : y : z = U : V : W$ , т. е. по одной из величин  $x, y, z$  легко определяются остальные. Это вытекает из начальной структуры функции  $f$  и соотношений (4.6).

Из системы (1.2), (1.3) следует закон сохранения вещества при растворении. Для его вывода нужно умножить (1.2) на  $xyz$  и проинтегрировать по  $Q$ . С учетом (1.3) получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(C + \beta M(f)) = \frac{\beta(M(f_*) - M(f)) - \alpha C}{\tau},$$

из которого, в частности, следует зависимость между стационарными значениями  $C_s$  и  $M(f_s)$ .

В частном случае  $f_* \equiv 0$  задачу (4.1), (4.3) можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в случае возможности аналитического интегрирования  $f_0$  по  $Q$  в (4.3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Тодес О. М., Себалло В. А., Гольцикер А. Д.** Массовая кристаллизация из растворов. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1984.
2. **Бувич Ю. А.** О кинетике массообмена полидисперсной системы частиц с окружающей средой // ПМТФ. 1966. № 1. С. 50–57.

3. Лукин А. Я., Степанов А. М. Динамика формирования аэрозоля из пересыщенного пара // ПМТФ. 1984. № 3. С. 94–104.
4. Буевич Ю. А., Наталуха И. А. Неустойчивость и автоколебания при кипении в объеме // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 26, № 3. С. 535–543.
5. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
6. Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Кольцова Э. М. Уравнения термогидромеханики двухфазной полидисперсной среды с фазовыми переходами при непрерывном распределении частиц по размерам // ПМТФ. 1978. № 1. С. 103–110.
7. Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Кольцова Э. М. Уравнения термогидромеханики для описания процессов массовой кристаллизации из растворов и газовой фазы // ПМТФ. 1981. № 6. С. 152–160.
8. Мелихов И. В., Небылицын Б. Д. О флуктуациях формы кристаллов // Рост кристаллов. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1977. Т. 12. С. 108–115.
9. Меньшов В. Н., Клименко Е. Т. Исследование массовой кристаллизации парафинов из раствора // Теорет. основы хим. технологии. 1987. Т. 21, № 4. С. 549–552.
10. Мошинский А. И. Описание массового роста кристаллов из раствора при учете исчезновения граней кристалла в процессе его роста // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 121–134.
11. Аксельруд Г. А., Молчанов А. Д. Растворение твердых веществ. М.: Химия, 1977.
12. Мошинский А. И. О растворении полидисперсной системы кристаллов при учете флуктуаций скорости растворения // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 55, № 6. С. 980–989.
13. Буевич Ю. А., Ясников Г. П. Кинетика растворения полидисперсной системы частиц // Теорет. основы хим. технологии. 1982. Т. 16, № 5. С. 597–603.
14. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
15. Буевич Ю. А., Мансуров В. В., Наталуха И. А. Слабонелинейные автоколебания при кристаллизации в объеме // Инж.-физ. журн. 1985. Т. 49, № 2. С. 233–242.
16. Song Y. H., Douglas J. M. Self-generated oscillations in continuous crystallizers. Pt 2. An experimental study of an isothermal system // AIChE J. 1975. V. 21, N 5. P. 924–930.
17. Фролов В. Ф. Растворение дисперсных материалов // Теорет. основы хим. технологии. 1998. Т. 32, № 4. С. 398–410.
18. Берлинер Л. Б., Горин В. Н. Исследование динамики непрерывного изотермического кристаллизатора // Теорет. основы хим. технологии. 1973. Т. 7, № 5. С. 643–650.
19. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 1.
20. Мошинский А. И. Анализ устойчивости роста частиц полидисперсной системы в растворе в неизотермических условиях // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 95–105.
21. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 29/1 2001 г.*