УДК 532.582

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ОБТЕКАЕМОГО НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЦИРКУЛЯЦИИ

А. А. Харламов

Институт гидродинамики Академии наук Чешской Республики, 16612 Прага,
Чешская Республика
E-mail: kharlamov@ih.cas.cz

Моделируются наблюдаемые в экспериментах автоколебания цилиндра в плоском канале, ширина которого незначительно превышает диаметр цилиндра, под действием натекающего потока жидкости. В рамках модели безотрывного потенциального обтекания цилиндра с помощью обобщенного метода изображений рассчитываются коэффициенты присоединенных масс цилиндра. В моменты касания цилиндра и стенки меняется знак циркуляции, ее значение определяется с использованием метода граничных элементов и условия непротекания жидкости в точке контакта. В уравнениях движения цилиндра учитываются сила Жуковского и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости.

Ключевые слова: цилиндр, канал, поток, автоколебания, присоединенная масса, циркуляция.

1. Исследование динамики размещенных в трубопроводах тел, занимающих в потоке значительное место и свободно перемещающихся только в поперечном к натекающему потоку направлении, является сложной, малоизученной и представляющей теоретический и практический интерес гидродинамической задачей.

В [1] описаны результаты экспериментального исследования обтекания цилиндров в плоском канале прямоугольного поперечного сечения, сильно загромождающих поток и свободно передвигающихся в поперечном к потоку направлении. Эксперименты проводились в диапазонах значений числа Рейнольдса $1{,}7 \cdot 10^4 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 7{,}2 \cdot 10^4$ ($\mathrm{Re} = V_0 D/\nu$; D — диаметр цилиндра; V_0 — скорость набегающего потока; ν — кинематическая вязкость) при значениях относительной ширины зазора δ/D между цилиндром и стенкой канала $0{,}11 \leqslant \delta/D \leqslant 0{,}31$ и отношения плотностей цилиндра и воды $1{,}29 \leqslant \rho/\rho_f \leqslant 8{,}20$. В результате многочисленных опытов с обтекаемыми водой цилиндрами различного размера, изготовленными из различных материалов, получено простое приближенное соотношение, связывающее безразмерную частоту автоколебаний (число Струхаля $\mathrm{Sh} = fD/V_0$, где $f = 1/\tau$ — частота автоколебаний; τ — период автоколебаний) с относительной шириной зазора, отношением плотностей и числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Sh} = (\delta/D)^{-1}(\rho/\rho_f)^{-0{,}1}(0{,}4 + 2100/\mathrm{Re}). \qquad (1)$$

Работа выполнена в рамках Исследовательского плана Института гидродинамики Академии наук Чешской Республики № AV0Z20600510.

В [2] предпринята попытка моделирования указанных автоколебаний в рамках модели идеальной жидкости с учетом диссипативных факторов. Для поддержания автоколебаний в уравнения вводилась дополнительная импульсная сила, действующая на цилиндр в момент его удара о стенку. Параметры этой силы определялись путем сравнения результатов расчетов с результатами экспериментов.

В данной модели автоколебания поддерживаются за счет циркуляции, определяемой в момент касания цилиндром стенки из условия непротекания жидкости в точке касания. Учет циркуляции позволил уменьшить количество эмпирических параметров модели и улучшить соответствие экспериментальным данным.

2. Для координаты центра цилиндра x запишем уравнения в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,(T_0+T)}{\partial\dot x}-\frac{\partial T}{\partial x}=\rho_f n\Gamma V_0\,\frac{\dot x}{|\dot x|}-\frac{1}{2}\,C_d D\rho_f\dot x^2\,\frac{\dot x}{|\dot x|},$$

$$T_0=(\pi/8)D^2\rho\dot x^2,\qquad T=(\pi/8)D^2\rho_f(C_{m1}V_0^2+C_{m2}\dot x^2),$$

где T_0, T — кинетические энергии цилиндра и жидкости соответственно; Γ — циркуляция жидкости вокруг цилиндра; n — поправочный коэффициент в формуле Жуковского с учетом наличия стенок; C_d — коэффициент сопротивления; C_{m1}, C_{m2} — коэффициенты присоединенных масс. После ряда преобразований получаем уравнение

$$\Big(\frac{\rho}{\rho_f}+C_{m2}\Big)\ddot x=\frac{1}{2}\Big(V_0^2\,\frac{\partial C_{m1}}{\partial x}-\dot x^2\,\frac{\partial C_{m2}}{\partial x}\Big)-\frac{2\dot x^2C_d}{\pi D}\,\frac{\dot x}{|\dot x|}+\frac{4V_0n\Gamma}{\pi D^2}\,\frac{\dot x}{|\dot x|}. \qquad (2)$$

При соударении цилиндра со стенкой его скорость изменяется по закону

$$\dot x_+=-C_r\dot x_-,$$

где $\dot x_-$, $\dot x_+$ — скорости до и после соударения соответственно; C_r — коэффициент восстановления.

Для расчета коэффициентов присоединенных масс цилиндра, произвольно движущегося в идеальной жидкости между двумя параллельными стенками, используется обобщение метода изображений [2]. Потенциал течения представляется в виде потенциала бесконечной последовательности диполей, расположенных на линии, проходящей через центр цилиндра и перпендикулярной стенкам.

Полученные зависимости коэффициентов присоединенных масс цилиндра от безразмерных расстояний до стенок при движении параллельно и перпендикулярно им аппроксимируются соответственно функциями

$$C_{m1}=1+P_1\big[(\bar b-d_1)^{p_1}+(\bar c-d_1)^{p_1}\big]+P_2\big[(\bar b-d_2)^{p_2}+(\bar c-d_2)^{p_2}\big]+{}$$
$$+P_3(\bar b^{n_1}\bar c^{n_1}-1)^{r_1}+P_4(\bar b-n_2)^{r_2}(\bar c-n_2)^{r_2},$$

$$P_1=0{,}345,\quad d_1=0{,}28,\quad p_1=-1{,}86,\quad P_2=0{,}0094,\quad d_2=0{,}9517,\quad p_2=-1{,}4,$$
$$P_3=2{,}2,\quad n_1=130,\quad r_1=-0{,}013,\quad P_4=0{,}0107,\quad n_2=0{,}912,\quad r_2=-1{,}53$$

и

$$C_{m2}=1+P_1\big[(\bar b-d_1)^{p_1}+(\bar c-d_1)^{p_1}\big]+P_2\big[(\bar b-d_2)^{p_2}+(\bar c-d_2)^{p_2}\big]+{}$$
$$+P_5\big[(\bar b-s_1)^{q_1}(\bar c-s_1)^{q_1}-s_2\big]^{q_2},$$

$$P_5=-1{,}6,\quad s_1=0{,}996,\quad q_1=0{,}21,\quad s_2=-1{,}23,\quad q_2=-5{,}16,$$

где $\bar b=2b/D$, $\bar c=2c/D$ — безразмерные расстояния от центра цилиндра до стенок канала.

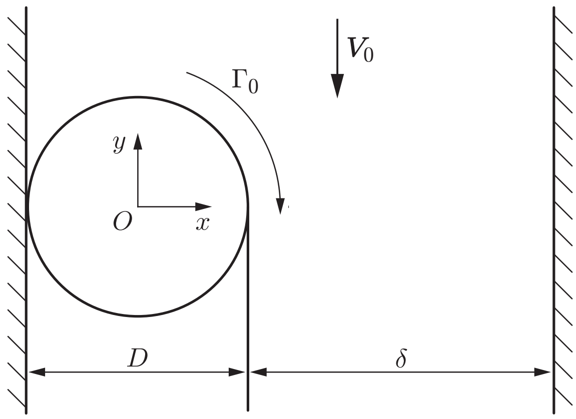

Рис. 1. Схема обтекания цилиндра при наличии двух стенок

3. Циркуляция Γ_0 вокруг цилиндра при его касании одной из стенок (рис. 1) определяется из условия непротекания жидкости в точке контакта.

При удалении второй стенки на расстояние, равное бесконечности, задача соответствует задаче обтекания цилиндра, касающегося одной стенки. Проинтегрировав точное решение для скорости на поверхности цилиндра, приведенное в [3], получаем циркуляцию

$$\Gamma^* = \pi V_0 D. \tag{3}$$

При больших загромождениях потока основной вклад в циркуляцию вносит скорость в окрестности точки $y = 0$. Расстояние между границей цилиндра и стенкой находится из асимптотического разложения $\delta(y) = \delta + y^2/D + O(y^4)$, а средняя скорость $v_f(y)$ — с использованием условия сохранения расхода $(\delta + D)V_0 = \delta(y)v_f(y)$. Тогда

$$v_f(y) = \frac{V_0(\delta + D)}{\delta + y^2/D}.$$

Из этого соотношения получаем циркуляцию для малой относительной ширины зазора

$$\Gamma_0 \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_f\, dy = \frac{\Gamma^*}{\sqrt{\bar{\delta}}}, \qquad \bar{\delta} = \frac{\delta}{D}. \tag{4}$$

Для значений относительной ширины зазора $\bar{\delta} \in (0{,}015, \infty)$ циркуляция рассчитана с помощью метода, описанного в работах [4, 5]. Полученная зависимость с учетом (3) и (4) аппроксимирована следующей приближенной формулой:

$$\frac{\Gamma_0}{\Gamma^*} = 1 + \frac{G_1}{\sqrt{\bar{\delta} - G_2}} + \frac{G_3}{\sqrt{\bar{\delta}}}, \qquad G_1 = -0{,}963, \quad G_2 = -0{,}69, \quad G_3 = 0{,}95.$$

При этом максимальные значения погрешности аппроксимации равны 0,3 % в расчетной области и 5 % в области асимптотического решения (рис. 2).

Во время движения цилиндра циркуляция затухает в результате действия сил вязкого трения. Дифференцируя по времени контурный интеграл $\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$ ($\boldsymbol{v}$ — вектор скорости жидкости; $d\boldsymbol{s}$ — векторный элемент границы) и используя уравнение движения вязкой жидкости

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\boldsymbol{v},$$

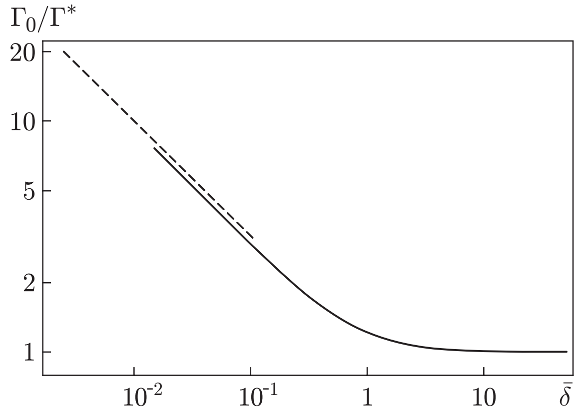

Рис. 2. Зависимость безразмерной циркуляции от относительной ширины зазора: сплошная линия — решение методом граничных элементов, штриховая — асимптотическое решение

получаем точное выражение для изменения циркуляции во времени

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint \nu \Delta \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}$$

(интеграл по замкнутому контуру от $\operatorname{grad}(p/\rho)$ равен нулю). Лапласиан скорости на границе цилиндра оценивается следующим образом:

$$|\Delta \boldsymbol{v}| \approx \frac{|\boldsymbol{v}|}{\varepsilon^2} \approx \frac{|\boldsymbol{v}|}{D^2} \,\mathrm{Re}$$

(ε — толщина пограничного слоя). Для определения циркуляции получаем уравнение

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -k\nu \frac{\mathrm{Re}}{D^2} \oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = -k \frac{V_0}{D} \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \Gamma_0 \exp\Big(-k \frac{V_0 t}{D}\Big), \quad t \in \Big(0, \frac{\tau}{2}\Big), \tag{5}$$

где k — эмпирический коэффициент. Циркуляция Γ во время движения цилиндра от одной стенки к другой изменяется по закону (5), при этом в начальный момент времени на стенке она равна Γ_0. В момент касания стенки циркуляция мгновенно принимает значение $-\Gamma_0$, при движении цилиндра в обратную сторону изменяется по закону (5), затем процесс повторяется. Коэффициент n в формуле (2) в момент касания цилиндром стенки вычислялся с помощью интеграла Бернулли:

$$n = H_1 + \frac{1}{4\bar{\delta}} + \frac{H_2}{\bar{\delta}^{H_3}} \ln \bar{\delta},$$

где $H_1 = 0{,}65$; $H_2 = 0{,}0195$; $H_3 = -0{,}4$. Сила, вычисленная по формуле (2), хорошо согласуется с результатами расчетов в [6].

4. Полученные данные о коэффициентах присоединенных масс и циркуляции позволили приближенно описать процесс автоколебаний цилиндра между двумя стенками при сильном загромождении им потока реальной жидкости. Численные расчеты показали, что значение коэффициента k практически не влияет на число Струхаля вследствие значительной загроможденности канала, обусловливающей слабое изменение циркуляции в течение времени движения цилиндра от одной стенки к другой. Поэтому для простоты при моделировании считалось, что $k = 1$.

Зависимости безразмерных координаты и скорости цилиндра от безразмерного времени при $\rho/\rho_f = 1{,}29$, $\delta/D = 0{,}31$ представлены на рис. 3. Об эффекте присоединенных масс

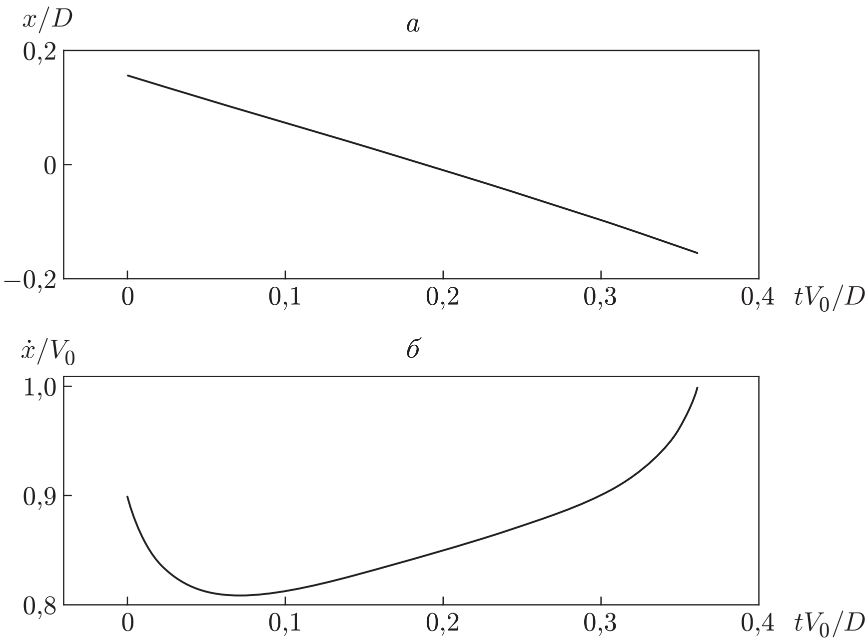

Рис. 3. Зависимости безразмерных координаты (*а*) и скорости (*б*) цилиндра от безразмерного времени за полупериод автоколебаний

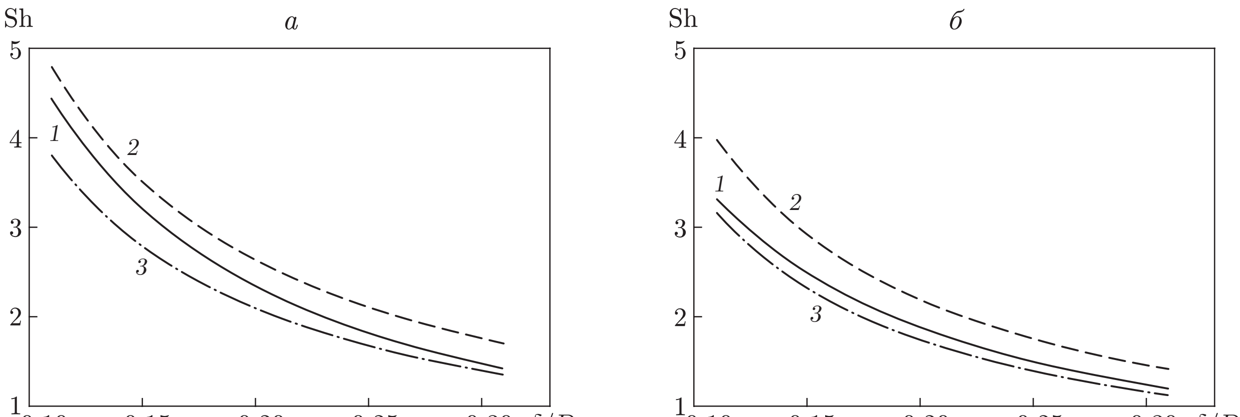

Рис. 4. Зависимость числа Струхаля от относительной ширины зазора:
а — $\rho/\rho_f = 1{,}29$, *б* — $\rho/\rho_f = 8{,}2$; *1* — результаты расчетов, *2, 3* — экспериментальные данные (*2* — $\mathrm{Re} = 1{,}5 \cdot 10^4$, *3* — $\mathrm{Re} = 7{,}2 \cdot 10^4$)

свидетельствует появление симметричной силы, направленной от центра канала, вследствие чего в начале движения от стенки цилиндр замедляется, затем ускоряется. Вследствие наличия циркуляции создается дополнительная сила, направление которой совпадает с направлением движения, и цилиндр начинает ускоряться, не достигнув центра канала.

С помощью сравнения результатов проведенных расчетов с результатами расчетов по экспериментальной формуле (1) для частоты автоколебаний цилиндра найдено решение, соответствующее значениям коэффициента сопротивления $C_d = 10$ и коэффициента восстановления $C_r = 0{,}9$ (рис. 4). Отметим, что, поскольку в модели отсутствует вязкость жидкости, число Струхаля не зависит от числа Рейнольдса, в то время как в экспериментах [1] эта зависимость была слабой. Сравнение результатов, приведенных на рис. 4, показывает, что при использовании принятой схемы определения частоты автоколебаний результаты расчетов и экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются. В рассматриваемом диапазоне экспериментальных данных погрешность не превышает 17 % и в среднем составляет 7 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карликов В. П., Хомяков А. Н., Шоломович Г. И.** Экспериментальное исследование поперечных автоколебаний круговых цилиндров, сильно загромождающих поток в плоском канале // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. № 5. С. 133–138.
2. **Харламов А. А.** О возможности моделирования поперечных автоколебаний свободного кругового цилиндра, сильно загромождающего поток в плоском канале // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2010. № 3. С. 60–63.
3. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
4. **Петров А. Г.** Квадратурные формулы для периодических функций и их применение в методе граничных элементов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 8. С. 1344–1361.
5. **Петров А. Г.** Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009.
6. **Карликов В. П., Толоконников С. Л.** О силе, действующей на примыкающий к стенке плоского канала цилиндр, сильно загромождающий стационарный поток идеальной несжимаемой жидкости // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2004. № 7. С. 105–110.

Поступила в редакцию 24/I 2011 г.,
в окончательном варианте — 12/V 2011 г.