УДК 539.3

# КОЛЕБАНИЯ ЛЬДИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА ТРЕУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

М.-Й. Ху, Ч.-Х. Чзан

Военно-морской инженерный университет, 430033 Ухань, Китай
E-mails: shuai_humingyong@163.com, zhangzhihong_999@163.com

С использованием преобразований Ханкеля и Лапласа получено аналитическое решение задачи о движении льдины под действием импульса треугольной формы. Построены зависимости прогиба от времени при различных значениях физических и геометрических параметров задачи, а также распределение прогиба по пространственной координате.

Ключевые слова: импульс треугольной формы, плавающая льдина, неустановившееся движение, преобразование Ханкеля, вязкоупругая пластина.

DOI: 10.15372/PMTF20170416

**Введение.** Интерес к исследованию поведения льдин при воздействии на них различных нагрузок обусловлен необходимостью осуществления перевозок морским путем в северных широтах. Такие исследования проводятся в США, России, Японии, Канаде и других странах. Результаты экспериментальных и теоретических исследований поведения льдин при воздействии на них нагрузок приведены в работах [1–13].

Впервые задача о воздействии на льдину импульсно-ударной нагрузки решена в работе [1], в которой рассматривалась нагрузка в виде дельта-функции по времени и пространственным координатам. Льдина моделировалась бесконечной упругой пластиной. В работах [14, 15] решена аналогичная осесимметричная двумерная задача. Льдина моделировалась вязкоупругой пластиной. В [16, 17] численно решена задача о воздействии на льдину ударной нагрузки. В работе [18] с использованием асимптотических методов исследовалось распространение волн по свободной или покрытой льдинами поверхности. Волны индуцировались либо взрывной нагрузкой, либо прогибами пластины. Распространение индуцированных заглубленным источником волн по покрытой льдинами поверхности изучено в [19]. В работах [20, 21] с использованием преобразований Ханкеля и Лапласа решена задача о движении льдины под действием взрывной нагрузки и нагрузки синусоидальной формы. Льдина моделировалась вязкоупругой пластиной.

В данной работе решается задача о движении льдины под действием импульса треугольной формы. С использованием преобразований Ханкеля и Лапласа получено аналитическое решение задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 51479202) и Фонда естественных наук Военно-морского инженерного университета (грант № 425517K002).

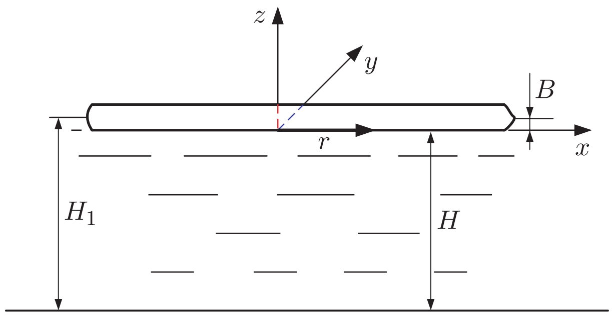


Рис. 1. Схема задачи

**1. Постановка задачи и ее решение.** Математическая задача формулируется при следующих предположениях:

1) льдина моделируется пластиной из изотропного однородного вязкоупругого материала (модель Кельвина — Фойгхта), имеющей постоянные толщину и плотность;

2) вода представляет собой идеальную несжимаемую жидкость, движение воды является потенциальным;

3) на пластину действует равномерная нагрузка, распределенная по кругу радиусом $r_0$, поэтому задача решается в осесимметричной постановке.

Предполагается, что в начальный момент времени недеформированная пластина из однородного изотропного вязкоупругого материала лежит на вязкоупругом основании (рис. 1). Плоскость $xy$ является границей между недеформированной пластиной и вязкоупругим основанием, ось $z$ перпендикулярна плоскости $xy$. На рис. 1 $H_1$ — глубина резервуара; $B = \rho_1 h/\rho_2$ — глубина погружения пластины в жидкость в состоянии равновесия; $h$, $\rho_1$ — толщина и плотность пластины соответственно; $\rho_2$ — плотность воды; $H = H_1 - B$.

Уравнение движения льдины, лежащей на вязкоупругом основании, под действием треугольного импульса записывается в виде [14]

$$\frac{Gh^3}{3}\Big(1 + \tau_\varphi \frac{\partial}{\partial t}\Big)\nabla^4 w + \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_2 g w + \rho_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{z=0} = F(r) f(t), \qquad (1)$$

где $w = w(r,t)$ — прогиб пластины; $G = E/(2(1+\mu))$ — модуль сдвига; $E$ — модуль упругости льда при растяжении и сжатии; $\mu$ — коэффициент Пуассона; $\tau_\varphi$ — время релаксации; $\Phi(r,z,t)$ — потенциальная функция скорости; $r$ — радиус-вектор точки, принадлежащей поверхности пластины; $F(r) = M(r_0 - r)/(\pi r_0^2)$; $M(r_0 - r)$ — функция Хевисайда; $f(t)$ — функция, задающая форму треугольного импульса:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ bt/a, & 0 \leqslant t < a, \\ -bt/a + 2b, & a \leqslant t < 2a, \\ 0, & t \geqslant 2a. \end{cases}$$

С использованием функции Хевисайда выражение для функции $f(t)$ записывается в следующем виде:

$$f(t) = \frac{bt}{a}[M(t) - M(t-a)] + \Big(-\frac{bt}{a} + 2b\Big)[M(t-a) - M(t-2a)]. \qquad (2)$$

Для прогиба пластины $w$ задаются начальные условия

$$t = 0: \qquad w = 0, \quad \dot w = 0,$$

на границе между льдиной и водой ставятся кинематические условия сопряжения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{3}$$

для функции $\Phi(r, z, t)$ задается условие на дне резервуара

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0. \tag{4}$$

К функциям $w(r, t)$ и $\Phi(r, z, t)$ применим преобразование Ханкеля нулевого порядка:

$$w_{\mathrm{H}}(\xi, t) = \int\limits_0^\infty r w(r, t) J_0(\xi r)\, dr, \qquad \Phi_{\mathrm{H}}(\xi, z, t) = \int\limits_0^\infty r \Phi(r, z, t) J_0(\xi r)\, dr$$

($w_{\mathrm{H}}(\xi, t)$, $\Phi_{\mathrm{H}}(\xi, z, t)$ — трансформанты функций $w(r, t)$ и $\Phi(r, z, t)$ соответственно; $\xi$ — параметр преобразования Ханкеля; $J_0(\xi r)$ — функция Бесселя нулевого порядка). Предполагается, что функцию $\Phi_{\mathrm{H}}(\xi, z, t)$ можно представить в виде

$$\Phi_{\mathrm{H}}(\xi, z, t) = A_1 \,\mathrm{e}^{-\xi z} + B_1 \,\mathrm{e}^{\xi z}, \tag{5}$$

где $A_1$, $B_1$ — неизвестные функции переменных $\xi$ и $t$. Применяя преобразование Ханкеля к уравнениям (3), (4), получаем

$$\frac{\partial \Phi_{\mathrm{H}}(\xi, z, t)}{\partial z}\Big|_{z=0} = \dot{w}_{\mathrm{H}}, \qquad \frac{\partial \Phi_{\mathrm{H}}(\xi, z, t)}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (6), для функций $A_1$, $B_1$ получаем следующие выражения:

$$A_1 = \frac{\dot{w}_{\mathrm{H}} \,\mathrm{e}^{-2\xi H}}{\xi(1 - \mathrm{e}^{-2\xi H})}, \qquad B_1 = \frac{\dot{w}_{\mathrm{H}}}{\xi(1 - \mathrm{e}^{-2\xi H})}. \tag{7}$$

После подстановки (7) в (5) находим

$$\Phi_{\mathrm{H}}(\xi, z, t) = \frac{\dot{w}_{\mathrm{H}}(\mathrm{e}^{-2\xi H} \,\mathrm{e}^{-\xi z} + \mathrm{e}^{\xi z})}{\xi(1 - \mathrm{e}^{-2\xi H})}. \tag{8}$$

Применяя преобразование Ханкеля к уравнению (1) с учетом выражений (2), (8), получаем уравнение

$$m(\xi)\ddot{w}_{\mathrm{H}} + k(\xi)\dot{w}_{\mathrm{H}} + c(\xi)w_{\mathrm{H}} = \frac{J_1(\xi r_0)}{\pi \xi r_0}\, f(t), \tag{9}$$

где $J_1(\xi r)$ — функция Бесселя первого порядка,

$$k(\xi) = \frac{G h^3 \tau_\varphi \xi^4}{3}, \qquad m(\xi) = \rho_1 h + \frac{\rho_2}{\xi \,\mathrm{th}\,(\xi H)}, \qquad c(\xi) = \frac{G h^3 \xi^4}{3} + \rho_2 g.$$

Площадь области пластины, на которую действует нагрузка, полагается малой, т. е.

$$\lim_{r_0 \to 0} \frac{J_1(\xi r_0)}{\pi \xi r_0} = \frac{1}{2\pi}.$$

Таким образом, уравнение (9) можно записать в виде

$$m\ddot{w}_{\mathrm{H}} + k\dot{w}_{\mathrm{H}} + c w_{\mathrm{H}} = f(t)/(2\pi), \tag{10}$$

где $k$, $m$, $c$ — функции переменной $\xi$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (10), получаем

$$\tilde{w}(\xi, s) = \tilde{w}_{1s} \tilde{w}_{2s}, \tag{11}$$

где $\tilde{w}(\xi, s)$ — трансформанта функции $w_{\text{Н}}$; $s$ — параметр преобразования Лапласа,

$$\tilde{w}_{1s} = \frac{b(1 - 2\,\mathrm{e}^{-as} + \mathrm{e}^{-2as})}{as^2}; \tag{12}$$

$$\tilde{w}_{2s} = \frac{1}{2\pi(ms^2 + ks + c)}. \tag{13}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (12), находим

$$w_{1t} = f(t),$$

где $w_{1t}$ — обратное преобразование Лапласа трансформанты $\tilde{w}_{1s}$. Очевидно, что функция $w_{1t}$ идентична функции $f(t)$. Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (13), получаем

$$w_{2t} = \begin{cases} (\mathrm{e}^{k_1 t} - \mathrm{e}^{k_2 t})/[2\pi m(k_1 - k_2)], & cm - k^2/4 < 0, \\ t\,\mathrm{e}^{-kt/(2m)}/(2\pi m), & cm - k^2/4 = 0, \\ \mathrm{e}^{-kt/(2m)} \sin\,(t\sqrt{cm - k^2/4}/m)/(2\pi\sqrt{cm - k^2/4}\,), & cm - k^2/4 > 0, \end{cases}$$

где

$$k_1 = -k/(2m) + \sqrt{k^2/(4m^2) - c/m}\,, \qquad k_2 = -k/(2m) - \sqrt{k^2/(4m^2) - c/m}\,.$$

Применим обратное преобразование Лапласа к уравнению (11) и используем интегральную свертку кусочно-непрерывной функции. В результате имеем

1) при $cm - k^2/4 < 0$

$$w_{\text{Н}} = \begin{cases} p_1 C_1, & 0 \leqslant t < a, \\ p_1(C_2 + C_3), & a \leqslant t < 2a, \\ p_1(C_2 + C_4), & t \geqslant 2a, \end{cases}$$

где

$$p_1 = b/[2\pi ma(k_1 - k_2)],$$

$$C_1 = \frac{(\mathrm{e}^{k_1 t} - 1)k_2^2 - k_1 k_2^2 t + k_1(1 - \mathrm{e}^{k_2 t} + k_2 t)}{k_1^2 k_2^2},$$

$$C_2 = \frac{\mathrm{e}^{k_1 t}}{k_1^2} - \frac{\mathrm{e}^{k_1(t-a)}(1 + ak_1)}{k_1^2} - \frac{\mathrm{e}^{k_2 t}}{k_2^2} + \frac{\mathrm{e}^{k_2(t-a)}(1 + ak_2)}{k_2^2},$$

$$C_3 = \frac{\mathrm{e}^{k_1(t-a)}(ak_1 - 1)}{k_1^2} + \frac{\mathrm{e}^{k_2(t-a)}(1 - ak_2)}{k_2^2} + \frac{1 - 2ak_1 + k_1 t}{k_1^2} - \frac{1 - 2ak_2 + k_2 t}{k_2^2},$$

$$C_4 = \frac{\mathrm{e}^{k_1(t-2a)}}{k_1^2} + \frac{\mathrm{e}^{k_1(t-a)}(ak_1 - 1)}{k_1^2} - \frac{\mathrm{e}^{k_2(t-2a)}}{k_2^2} + \frac{\mathrm{e}^{k_2(t-a)}(1 - ak_2)}{k_2^2};$$

2) при $cm - k^2/4 > 0$

$$w_{\text{Н}} = \begin{cases} p_2\,\mathrm{e}^{-vt} D_1, & 0 \leqslant t < a, \\ p_2[\mathrm{e}^{-vt}(D_2 - D_3) + D_4 - D_5], & a \leqslant t < 2a, \\ p_2[\mathrm{e}^{-vt}(D_2 - D_3) + D_6 + D_7], & t \geqslant 2a, \end{cases}$$

где

$$p_2 = b/[2\pi mau(u^2 + v^2)^2],$$

$$D_1 = \mathrm{e}^{vt}\, u(t(u^2+v^2)-2v) + 2uv\cos(ut) + (v^2-u^2)\sin(ut),$$
$$D_2 = \mathrm{e}^{av}\, u(a(u^2+v^2)-2v)\cos[(a-t)u] + 2uv\cos(ut),$$
$$D_3 = \mathrm{e}^{av}(v^2(av-1)+u^2(1+av))\sin[(a-t)u] - (v^2-u^2)\sin(ut),$$
$$D_4 = u[2v+(2a-t)(u^2+v^2)] + \mathrm{e}^{(a-t)v}[-u(2v+a(u^2+v^2))]\cos[(t-a)u],$$
$$D_5 = [u^2(av-1)+v^2(1+av)]\sin[(t-a)u],$$
$$D_6 = \mathrm{e}^{2av-tv}\{2uv\cos[(t-2a)u] + (v^2-u^2)\sin[(t-2a)u]\},$$
$$D_7 = \mathrm{e}^{(a-t)v}\{-u[2v+a(u^2+v^2)]\cos[(t-a)u] - [u^2(av-1)+v^2(1+av)]\sin[(t-a)u]\},$$
$$u = \sqrt{c/m - k^2/(4m^2)}\,, \qquad v = k/(2m);$$

3) при $cm - k^2/4 = 0$

$$w_{\text{H}} = \begin{cases} p_3\,\mathrm{e}^{-vt}[2+tv+\mathrm{e}^{vt}(tv-2)], & 0 \leqslant t < a, \\ p_3\,\mathrm{e}^{-vt}\{2+tv-\mathrm{e}^{vt}[2+v(t-2a+a(a-t)v)]\} + \\ \quad + p_3\{2+2av-tv-\mathrm{e}^{(a-t)v}[2+v(t+a(t-a)v)]\}, & a \leqslant t < 2a, \\ p_3\,\mathrm{e}^{-vt}\{2+tv-\mathrm{e}^{vt}[2+v(t-2a+a(a-t)v)]\} + \\ \quad + p_3\,\mathrm{e}^{(a-t)v}\{\mathrm{e}^{av}(2-2av+tv)-2-v[t+a(t-a)v]\}, & t \geqslant 2a, \end{cases}$$

где

$$p_3 = b/(2\pi mav^3).$$

Применяя обратное преобразование Ханкеля к функции $w_{\text{H}}$, получаем

$$w(r,t) = \int_0^\infty w_{\text{H}}\xi J_0(\xi r)\,d\xi. \tag{14}$$

**2. Результаты вычислений.** Приведенные ниже зависимости прогиба пластины от времени получены в результате вычислений интеграла в равенстве (14) при следующих значениях физических параметров пластины и жидкости: $E = 5\cdot 10^9$ Н/м$^2$, $h = 0{,}5 \div 2{,}0$ м, $\tau_\varphi = 0{,}05 \div 5{,}00$ с, $\rho_1 = 900$ кг/м$^3$, $H = 3 \div 30$ м, $\rho_2 = 1000$ кг/м$^3$, $\mu = 0{,}45$, $a = 0{,}1$ с, $b = 10^6$ Н. Воздействие импульсной нагрузки на пластину начинается в момент времени $t = 0$.

На рис. 2 представлена зависимость прогиба пластины в точке $x = 0$ от времени при различных значениях $\tau_\varphi$. Видно, что с увеличением времени релаксации $\tau_\varphi$ амплитуда прогиба уменьшается, а период колебаний пластины увеличивается, поскольку при этом улучшаются демпфирующие характеристики основания.

На рис. 3 приведена зависимость прогиба пластины в точке $x = 0$ от времени при различных значениях $h$. Видно, что амплитуда прогиба пластины уменьшается с увеличением ее толщины.

На рис. 4 показана зависимость прогиба пластины в точке $x = 0$ от времени при различных значениях $H$. Видно, что амплитуда прогиба увеличивается с увеличением $H$.

На рис. 5 приведена зависимость прогиба пластины в точке $x = 0$ от времени при различных значениях модуля упругости пластины $E$. Видно, что с увеличением $E$ прогиб пластины уменьшается.

На рис. 6 представлена зависимость прогиба пластины от координаты $r$ при $H = 20$ м, $h = 0{,}5$ м, $\tau_\varphi = 0{,}5$ с в различные моменты времени.

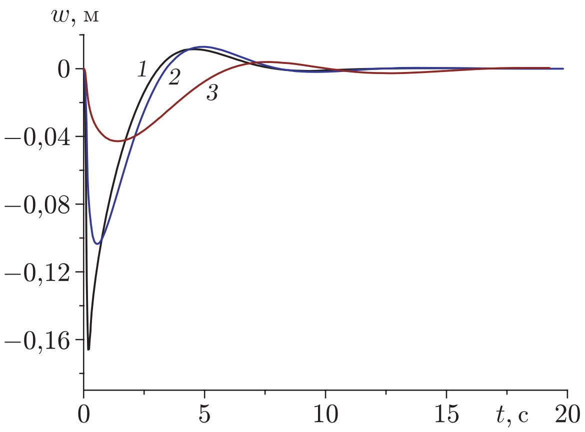


Рис. 2

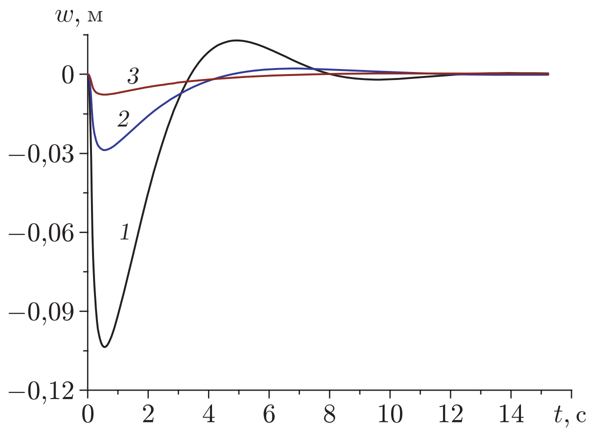


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость прогиба пластины в точке $x = 0$ от времени при $H = 20$ м, $h = 0{,}5$ м и различных значениях $\tau_\varphi$:
*1* — $\tau_\varphi = 0{,}05$ с, *2* — $\tau_\varphi = 0{,}5$ с, *3* — $\tau_\varphi = 5$ с

Рис. 3. Зависимость прогиба пластины в точке $x = 0$ от времени при $H = 20$ м, $\tau_\varphi = 0{,}5$ с и различных значениях $h$:
*1* — $h = 0{,}05$ м, *2* — $h = 1{,}0$ м, *3* — $h = 2{,}0$ м

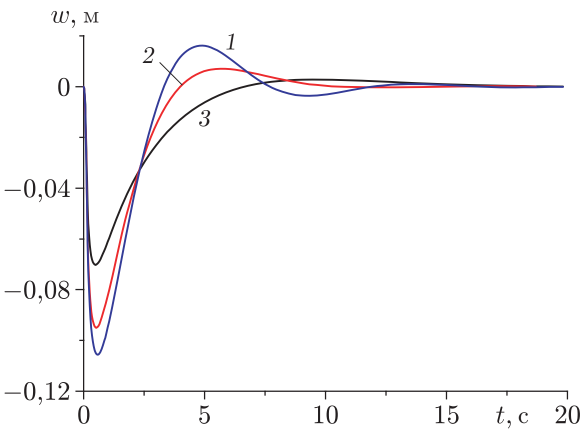


Рис. 4

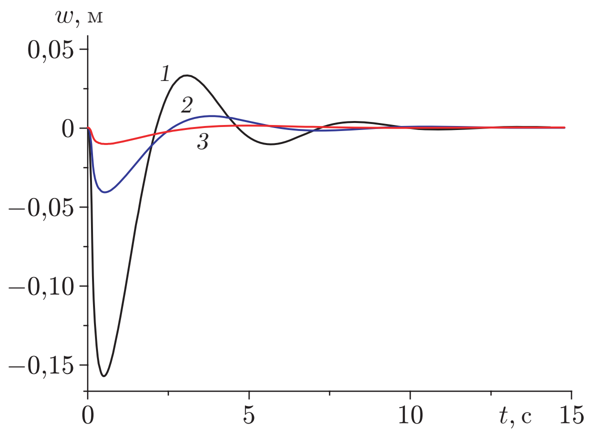


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость прогиба пластины в точке $x = 0$ от времени при $h = 0{,}5$ м, $\tau_\varphi = 0{,}5$ с и различных значениях $H$:
*1* — $H = 30$ м, *2* — $H = 10$ м, *3* — $H = 3$ м

Рис. 5. Зависимость прогиба пластины в точке $x = 0$ от времени при $H = 20$ м, $\tau_\varphi = 0{,}5$ с и различных значениях $E$:
*1* — $E = 5 \cdot 10^7$ Н/м$^2$, *2* — $E = 5 \cdot 10^8$ Н/м$^2$, *3* — $E = 5 \cdot 10^9$ Н/м$^2$

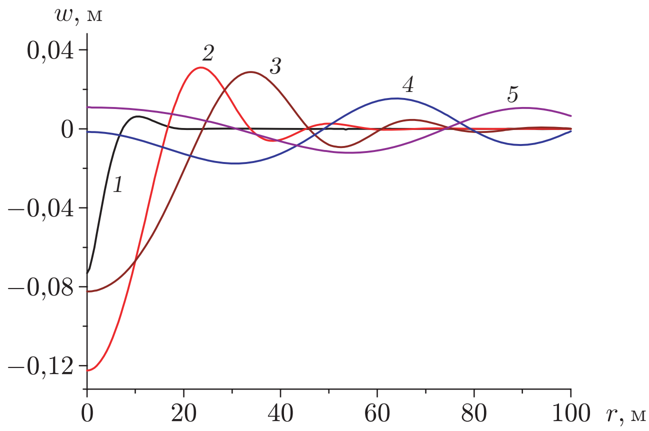


Рис. 6. Зависимость прогиба пластины от координаты $r$ при $H = 20$ м, $h = 0{,}5$ м, $\tau_\varphi = 0{,}5$ с в различные моменты времени:
*1* — $t = 0{,}1$ с, *2* — $t = 0{,}5$ с, *3* — $t = 1{,}0$ с, *4* — $t = 2{,}0$ с, *5* — $t = 3{,}0$ с

**Заключение.** В работе с использованием преобразований Ханкеля и Лапласа получено решение задачи о колебаниях льдины, лежащей на вязкоупругом основании, при действии на нее импульса треугольной формы. Получены зависимости прогиба от времени при различных значениях физических и геометрических параметров задачи, а также распределение прогиба по пространственной координате.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Kheisin D. Y.** Moving load on an elastic plate which floats on the surface of an ideal fluid // Izv. Akad. Nauk SSSR. OTN. Mekh. Mashinostroenie. 1963. N 1. P. 178–180 (in Russian).
2. **Eyre D.** The flexural motions of a floating ice sheet induced by moving vehicles // J. Glaciology. 1978. V. 19, iss. 81. P. 555–569.
3. **Kerr A. D.** The critical velocities of a load moving on a floating ice plate that is subjected to inplane forces // Cold Regions Sci. Technol. 1983. V. 6. P. 267–274.
4. **Squire V. A., Robinson W. H., Haskell T. G. Moore S. C.** Dynamic strain response of lake and sea ice to moning loads // Cold Regions Sci. Technol. 1985. V. 11. P. 123–139.
5. **Squire V. A.** Moving loading on ice plates / V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
6. **Takizawa T.** Response of a floating sea ice sheet to a moving vehicle // Proc. of the 5th Intern. offshore mechanics and arctic engineering symp. Tokyo: S. n., 1986. V. 4. P. 614–621.
7. **Miles J., Sneyd A. D.** The response of a floating ice sheet to an accelerating line load // J. Fluid Mech. 2003. V. 497. P. 435–439.
8. **Wang K., Hosking R. J., Milinazzo F.** Time-dependent response of a floating viscoelastic plate to an impulsively started moving load // J. Fluid Mech. 2004. V. 521. P. 435–439.
9. **Bonnefoy F., Meylan M. H., Ferrant P.** Nonlinear higher-order spectral solution for a two-dimensional moving load on ice // J. Fluid Mech. 2009. V. 621. P. 215–242.
10. **Squire V. A., Robinson W. H., Langhorne P. J., Haskell T. G.** Vehicles and aircraft on floating ice // Nature. 1988. V. 333. P. 159–161.
11. **Takizawa T.** Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // Cold Regions Sci. Technol. 1985. V. 11. P. 171–180.

12. **Takizawa T.** Field studies on response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // Contrib. Inst. Low Temperature. Sci. 1987. V. A36. P. 31–76.
13. **Takizawa T.** Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load // J. Geohpys. Res. 1988. V. 93. P. 5100–5112.
14. **Kozin V. M., Pogorelova A. V.** Effect of a shock pulse on a floating ice sheet // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2004. V. 45, N 6. P. 794–798.
15. **Kozin V. M., Pogorelova A. V.** Mathematical modeling of shock loading of a solid ice cover // Intern. J. Offshore Polar Engng. 2006. V. 16, N 1. P. 1–4.
16. **Zhestkaya V. D., Kozin V. M.** Numerical solution of the problem of the effect of a shock pulse on an ice sheet // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2008. V. 49, N 2. P. 285–290.
17. **Pogorelova A. V.** Plane problem of the impact of several shock pulses on a viscoelastic plate floating on a fluid surface // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2010. V. 51, N 2. P. 155–163.
18. **Lu D. Q., Dai S. Q.** Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2006. V. 76. P. 49–63.
19. **Lu D. Q., Li J. C., Dai S. Q.** Flexural-gravity waves due to transient disturbances in an inviscid fluid of finite depth // J. Hydrodyn. 2008. V. 20. P. 131–136.
20. **Hu M. Y., Zhang Z. H.** Research of dynamic response of viscoelastic floating ice plate under the unit-impulse loading // J. Naval Univ. Engng. 2011. V. 23. P. 5–7.
21. **Hu M. Y., Zhang Z. H.** Approximate analytical solutions of steady response of floating ice plate under the sinusoidal loading // J. Huazhong Univ. Sci. Technol. 2012. V. 40. P. 58–61.

*Поступила в редакцию 12/V 2016 г.,*
*в окончательном варианте — 16/VI 2016 г.*