УДК 539.3

СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТЕОРИИ ТИМОШЕНКО ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ

В. Н. Паймушин

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А. Н. Туполева, 420111 Казань, Россия
Казанский федеральный университет, 420008 Казань, Россия
E-mail: vpajmushin@mail.ru

Для описания процесса деформирования тонких оболочек при произвольных перемещениях и деформациях предложен новый модифицированный вариант теории типа теории Тимошенко, основанный на введении в качестве неизвестных функций вектора поворотов, компонентами которого в базисе, связанном с деформированной срединной поверхностью оболочки, являются компоненты вектора поперечных сдвигов и кратность удлинений в поперечном направлении по К. Ф. Черныху. В случае, когда срединная поверхность оболочки отнесена к произвольной неортогональной системе криволинейных координат, для внутренних усилий и моментов получены соотношения, основанные на введении истинных напряжений и истинных деформаций по В. В. Новожилову. С помощью построенных уравнений получено решение задачи о статической неустойчивости при расширении под действием внутреннего давления изотропной сферической оболочки, выполненной как из линейно-упругого материала, так и из эластомера (резины), для описания которого использованы соотношения К. Ф. Черныха.

Ключевые слова: тонкая оболочка, модель Тимошенко, нелинейная теория, конечные перемещения, конечные деформации, истинные напряжения, истинные деформации, сферическая оболочка, внутреннее давление, статическая неустойчивость, эластомер.

1. Модель типа модели Тимошенко. Отнесем пространство V недеформированной оболочки к системе криволинейных координат (x^1, x^2, z), связанной со срединной поверхностью σ, и определим положение произвольной точки $M(x^i, z)$ оболочки, задавая ее радиус-вектор равенством

$$\boldsymbol{R}(x^i, z) = \boldsymbol{r}(x^i) + z\boldsymbol{m}, \qquad -t/2 \leqslant z \leqslant t/2,$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^i)$ — радиус-вектор точки на поверхности σ; t — толщина оболочки; $\boldsymbol{m}$ — вектор единичной нормали к поверхности σ, связанный с базисными векторами $\boldsymbol{r}_i = \partial\boldsymbol{r}/\partial x^i$ формулой $\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)/\sqrt{a}$; $a = \det(a_{ij}) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$; $a_{ij} = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_j$ — компоненты первого метрического тензора на поверхности σ.

После деформации оболочки точка $M(x^i, z)$ с помощью вектора перемещений $\boldsymbol{U}(x^i, z)$ переходит в точку $M^*(x^i, z)$. Для этого вектора в соответствии с моделью типа модели

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00279) и за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Тимошенко принимается представление вида

$$\boldsymbol{U}(x^i, z) = \boldsymbol{u}(x^i) + z\boldsymbol{\gamma}. \tag{1.1}$$

При произвольных перемещениях и деформациях, когда для векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\gamma}$ используются разложения

$$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{r}^i + w\boldsymbol{m} = u^i\boldsymbol{r}_i + w\boldsymbol{m}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \gamma_i\boldsymbol{r}^i + \gamma\boldsymbol{m} = \gamma^i\boldsymbol{r}_i + w\boldsymbol{m}, \tag{1.2}$$

а в качестве искомых функций принимаются перемещения u_i, w точек срединной поверхности σ и компоненты γ_i, γ вектора поворотов $\boldsymbol{\gamma}$, нелинейная теория оболочек изложена в работах [1–3] и др. Поскольку уравнения, соответствующие представлению (1.1) и разложениям (1.2), являются громоздкими и нелинейными относительно всех указанных искомых функций, в [4, 5] предложен другой вариант соотношений нелинейной теории тонких оболочек при произвольных перемещениях и деформациях, основанный на представлениях вектора перемещений $\boldsymbol{U}$ и радиус-вектора точки $M^*(x^i z)$ в виде

$$\begin{gathered} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{u} + z(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{u} + z(\boldsymbol{m}^* - \boldsymbol{m} + \boldsymbol{\varphi}), \\ \boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r}^* + z(\boldsymbol{m}^* + \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u} + z(\boldsymbol{m}^* + \boldsymbol{\varphi}). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Особенностью этих представлений является то, что при $\boldsymbol{\varphi} = 0$ они переходят в представления классической модели Кирхгофа — Лява, а соответствующие им уравнения при разложении вектора $\boldsymbol{\varphi}$ по деформированным базисным векторам $\boldsymbol{r}_i^* = \partial\boldsymbol{r}^*/\partial x^i$, $\boldsymbol{m}^* = (\boldsymbol{r}_1^* \times \boldsymbol{r}_2^*)/\sqrt{a_*}$ ($a_* = \det(a_{ik}^*)$, $a_{ik}^* = \boldsymbol{r}_i^*\boldsymbol{r}_k^*$) при малых деформациях оказываются более компактными по сравнению с приведенными в [1–3] и линейными относительно компонент вектора $\boldsymbol{\varphi}$ для оболочек из линейно-упругого материала.

Ниже предлагается вариант рассматриваемой теории, соотношения которого при произвольных перемещениях и деформациях оболочки представляются более предпочтительными по сравнению с указанными выше.

2. Кинематические соотношения. Для радиус-вектора $\boldsymbol{R}^*$ и вектора перемещений $\boldsymbol{U}$ точки $M(x^i, z)$ примем представления вида

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u} + z\boldsymbol{\theta}, \qquad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{u} + z(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{m}), \tag{2.1}$$

в которых вектор $\boldsymbol{\theta}$ связан с вектором $\boldsymbol{\gamma}$ зависимостью $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{m}$. Принятому представлению (2.1) соответствуют основные базисные векторы

$$\boldsymbol{R}_i^* = \frac{\partial\boldsymbol{R}^*}{\partial x^i} = \boldsymbol{r}_i^* + z\boldsymbol{\theta}_i, \qquad \boldsymbol{R}_3^* = \boldsymbol{\theta}$$

и компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}^* = \boldsymbol{R}_\alpha^*\boldsymbol{R}_\beta^*$, записанные в приближении

$$g_{ik}^* \approx \boldsymbol{r}_i^*\boldsymbol{r}_k^* + z(\boldsymbol{r}_i^*\boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{r}_k^*\boldsymbol{\theta}_i), \qquad g_{i3}^* \approx \boldsymbol{R}_i^*\boldsymbol{\theta}, \qquad g_{33}^* = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\theta}_i = \partial\boldsymbol{\theta}/\partial x^i$. Так как до начала деформации оболочки $g_{ik} = (\delta_i^k - zb_i^k)\boldsymbol{r}_k$, $g_{i3} = 0$, $g_{33} = 1$, то ковариантные компоненты тензора деформаций Коши — Грина для тонкой оболочки равны

$$\begin{gathered} 2\eta_{ik} = g_{ik}^* - g_{ik} = 2(\varepsilon_{ik} + z\varkappa_{ik}) = 2[\varepsilon_{ik} + z(\chi_{ik} - b_{ik})]; \\ 2\eta_{i3} \approx 2\varepsilon_{i3} = \boldsymbol{r}_i^*\boldsymbol{\theta}, \qquad 2\eta_{33} = 2\varepsilon_{33} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta} - 1, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{gathered} 2\varepsilon_{ik} = \boldsymbol{r}_i\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{r}_k\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i\boldsymbol{u}_k, \qquad \boldsymbol{u}_i = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x^i}; \\ 2\chi_{ik} = \boldsymbol{r}_i^*\boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{r}_k^*\boldsymbol{\theta}_i, \qquad \varkappa_{ik} = \chi_{ik} - b_{ik}, \end{gathered} \tag{2.4}$$

$b_{ik} = -\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{m}_k = -\boldsymbol{r}_k\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{m}\,\partial\boldsymbol{r}_i/\partial x^k$ — ковариантные компоненты второго метрического тензора на поверхности σ.

Так как для базисных векторов $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i = a^{ik}\boldsymbol{r}_k$, $\boldsymbol{m}$ имеют место формулы дифференцирования вида

$$\nabla_i \boldsymbol{r}_k = b_{ik}\boldsymbol{m}, \quad \nabla_i \boldsymbol{r}^k = b_i^k \boldsymbol{m}, \quad \nabla_i \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_i = \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x^i} = -b_i^k \boldsymbol{r}_k = -b_{ik}\boldsymbol{r}^k \tag{2.5}$$

(∇_i — знак ковариантного дифференцирования по метрике a_{ik}), то при представлении вектора $\boldsymbol{u}$ в виде разложения (1.2) для базисных векторов $\boldsymbol{r}_i^*$ и тангенциальных компонент тензора деформаций $\varepsilon = \varepsilon_{ik}\boldsymbol{r}_*^i\boldsymbol{r}_*^k$ имеют место соотношения [1, 3]

$$\boldsymbol{r}_i^* = (\delta_i^k + e_i^k)\boldsymbol{r}_k + \omega_i\omega_k; \tag{2.6}$$

$$2\varepsilon_{ik} = e_{ik} + e_{ki} + e_{is}e_k^s + \omega_i\omega_k,$$

где

$$e_{ik} = \nabla_i u_k - b_{ik}w, \qquad e_i^k = a^{ks}e_{si} = \nabla_i u^k - b_i^k w, \qquad \omega_i = \nabla_i w + b_i^k u_k.$$

При использовании соотношений (2.6) для определения вектора единичной нормали $\boldsymbol{m}^*$ к деформированной срединной поверхности получаем формулу [1, 3]

$$\boldsymbol{m}^* = I^{-1/2}(E_i\boldsymbol{r}^i + E_3\boldsymbol{m}), \tag{2.7}$$

где

$$E_i = \omega_k e_i^k - \omega_i(1 + e_i^i), \qquad E_3 = (1 + e_1^1)(1 + e_2^2) - e_1^2 e_2^1,$$

$$I = a_*/a = 1 + 2I_1 + 4I_2, \qquad I_1 = 2(\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2),$$

$$I_2 = \varepsilon_1^1\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2\varepsilon_2^1, \qquad \varepsilon_i^k = \varepsilon_k^i = a^{ks}\varepsilon_{si}, \qquad a_* = a_{11}^* a_{22}^* - a_{12}^{*2}.$$

Для базисных векторов $\boldsymbol{r}_i^*$, $\boldsymbol{m}^*$ имеют место деривационные формулы Гаусса — Вейнгартена, аналогичные формулам (2.5):

$$\begin{gathered} \nabla_i^* \boldsymbol{r}_k^* = b_{ik}^*\boldsymbol{m}^*, \qquad \nabla_i^*\boldsymbol{m}^* = \nabla_i\boldsymbol{m}^* = -b_i^{*k}\boldsymbol{r}_k^* = -b_{ik}^*\boldsymbol{r}_*^k, \\ \nabla_i\boldsymbol{r}_k^* = A_{ik}^s\boldsymbol{r}_s^* + b_{ik}^*\boldsymbol{m}^*. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь ∇_i^* — знак ковариантного дифференцирования по метрике $a_{ik}^* = \boldsymbol{r}_i^*\boldsymbol{r}_k^*$; A_{is}^k — симметричные по нижним индексам компоненты тензора аффинной деформации, определяемые по формулам [1, 3, 5]

$$A_{is}^k = a_*^{kn}P_{n,is} = a_*^{kn}(\nabla_i\varepsilon_{ns} + \nabla_s\varepsilon_{ni} - \nabla_n\varepsilon_{is}),$$

b_{ik}^* — ковариантные компоненты второго метрического тензора на деформированной срединной поверхности σ_*:

$$b_{ik}^* = I^{-1/2}\{E_3\nabla_i\omega_k + E_j\nabla_i e_k^j + b_{ij}[E_3(\delta_k^j + e_k^j) - \omega_k E^j]\}.$$

Если для вектора $\boldsymbol{\theta}$ принять разложения

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_i^*\boldsymbol{r}_*^i + \theta_*\boldsymbol{m}^* = \theta_*^i\boldsymbol{r}_i^* + \theta_*\boldsymbol{m}^*, \tag{2.9}$$

то при использовании формул (2.8) для $\boldsymbol{\theta}_i = \partial\boldsymbol{\theta}/\partial x^i$ находим выражения

$$\boldsymbol{\theta}_i = \lambda_{ik}\boldsymbol{r}_*^k + \lambda_i\boldsymbol{m}^* = \lambda_i^k\boldsymbol{r}_k^* + \lambda_i\boldsymbol{m}^*, \tag{2.10}$$

где

$$\lambda_{ik} = \nabla_i^*\theta_k^* - b_{ik}^*\theta_*, \qquad \lambda_i^k = \nabla_i^*\theta_*^k - b_i^{*k}\theta_*, \qquad \lambda_i = \nabla_i^*\theta_* + b_i^{*k}\theta_k^*, \tag{2.11}$$

а при подстановке выражений (2.10) в равенство (2.4) для определения величин χ_{ik} получаем компактные соотношения

$$2\chi_{ik} = \lambda_{ik} + \lambda_{ki} = \nabla^*_i \theta^*_k + \nabla^*_k \theta^*_i - 2b^*_{ik}\theta_*, \tag{2.12}$$

линейные относительно неизвестных θ^*_i, θ_*.

Подставляя разложения (2.9) в равенства (2.2), имеем скалярные равенства

$$2\eta_{i3} = 2\varepsilon_{i3} = \theta^*_i; \tag{2.13}$$

$$2\eta_{33} = 2\varepsilon_{33} = \theta^2_* + \theta^*_i \theta^i_* - 1. \tag{2.14}$$

Так как при представлении вектора $\boldsymbol{\varphi}$, входящего в (1.3), в виде $\boldsymbol{\varphi} = \varphi^*_i \boldsymbol{r}^i_* + \varphi_* \boldsymbol{m}^*$ также имеет место равенство $2\varepsilon_{i3} = \varphi^*_i$, то в силу (2.13) получаем $\varphi^*_i = \theta^*_i$.

Если принять равенство $\theta^*_i = 0$, что в силу (2.13) соответствует введению кинематической гипотезы классической теории Кирхгофа — Лява о сохранении прямолинейности нормали к срединной поверхности оболочки в процессе ее деформирования, то формулу (2.14) можно записать в виде

$$2\varepsilon_{33} = \theta^2_* - 1. \tag{2.15}$$

По определению [6] истинной деформацией удлинения в направлении z является величина $\eta_3 = \varepsilon_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{33}} - 1$, выражение для которой при использовании (2.15) принимает вид $\varepsilon_3 = \theta_* - 1$. Следовательно, функция θ_* характеризует линейную деформацию оболочки в ее поперечном направлении, величина которой по определению [7] равна кратности удлинения в этом направлении. Поэтому выполнение равенства $\theta_* = 1$, в силу которого с учетом (2.15) получаем равенство $\varepsilon_{33} = 0$, а также равенств $\theta^*_i = 0$ соответствует переходу к классической модели Кирхгофа — Лява (см. [1, 5]). При $\theta_* \neq 1$, $\theta^*_i = 0$, $\boldsymbol{\theta} = \theta_* \boldsymbol{m}^*$ представление (2.1) соответствует предложенной в [8] модифицированной модели Кирхгофа — Лява, в которой в качестве искомой функции вместо θ_* принята функция φ_*.

При учете деформаций поперечных сдвигов $2\varepsilon_{i3} = \theta^*_i$ для вычисления ε_3 с использованием соотношения (2.14) получаем формулу

$$\varepsilon_3 = \sqrt{\theta^2_* + \theta^*_i \theta^i_*} - 1. \tag{2.16}$$

Если для деформаций поперечных сдвигов имеют место оценки $\theta^*_i \sim \sqrt{\varepsilon}$ (ε — некоторая величина, пренебрежимо малая по сравнению с единицей), то в силу $\theta_* \approx 1$ формула (2.14) даже при учете деформаций поперечных сдвигов допускает упрощенное представление вида

$$\varepsilon_3 \approx \theta_* - 1, \qquad \theta_* = 1 + \varepsilon_3. \tag{2.17}$$

Следовательно, даже в случае $2\varepsilon_{i3} \sim \sqrt{\varepsilon}$ (т. е. при средних деформациях поперечных сдвигов) функцию θ_* можно заменить на функцию ε_3, вычисляя $\varkappa_{ij}$ в соответствии с соотношениями (2.3), (2.11), (2.12) с помощью выражений

$$\varkappa_{ik} = (\nabla^*_i \theta^*_k + \nabla^*_k \theta^*_i)/2 - (1 + \varepsilon_3) b^*_{ik} + b_{ik}.$$

3. Вариационное уравнение принципа возможных перемещений. Пусть $\boldsymbol{F} = F^i \boldsymbol{r}^*_i + F^3 \boldsymbol{m}^*$ — вектор массовых сил, отнесенных к единице объема до деформации оболочки, $\boldsymbol{p}_{(\pm)} = p^i_{(\pm)} \boldsymbol{r}^*_i + p^3_{(\pm)} \boldsymbol{m}^*$ — векторы поверхностных сил, приложенных к лицевым поверхностям $z = \pm t/2$ и отнесенных к единицам их площадей до деформации; $\boldsymbol{p}_n = p_n \boldsymbol{n}^* + p_{n\tau} \boldsymbol{\tau}^* + p_3 \boldsymbol{m}^*$ — аналогичные поверхностные силы, приложенные к граничному срезу Σ, образовавшемуся в результате движения вектора $\boldsymbol{m}$ вдоль контурной линии C с элементом ds. Здесь $\boldsymbol{n}^*$, $\boldsymbol{\tau}^*$ — векторы единичной нормали и касательной к деформированной линии C_*, лежащие в плоскости базисных векторов $\boldsymbol{r}^*_1$, $\boldsymbol{r}^*_2$ и связанные с базисными векторами $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}^i$ зависимостями $\boldsymbol{r}_i^* = n_i^* \boldsymbol{n}^* + \tau_i^* \boldsymbol{\tau}^*$, $\boldsymbol{r}_*^i = n_*^i \boldsymbol{n}^* + \tau_*^i \boldsymbol{\tau}^*$, причем до деформации оболочки $\boldsymbol{r}_i = n_i \boldsymbol{n} + \tau_i \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{r}^i = n^i \boldsymbol{n} + \tau^i \boldsymbol{\tau}$.

Для тонкой оболочки вариация работы указанных внешних сил при возможных перемещениях $\delta \boldsymbol{U} = \delta \boldsymbol{u} + z\,\delta \boldsymbol{\theta}$ равна

$$\delta A = \iint\limits_{\sigma} (\boldsymbol{X}\,\delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{M}\,\delta \boldsymbol{\theta})\,d\sigma + \int\limits_{C} (\boldsymbol{\Phi}\,\delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}\,\delta \boldsymbol{\theta})\,ds, \tag{3.1}$$

где в предположении $p_3 = p_3(s)$, $F^\alpha = F^\alpha(x^i)$ используются представления

$$\boldsymbol{X} = X^i \boldsymbol{r}_i^* + X^3 \boldsymbol{m}^*, \qquad \boldsymbol{M} = M^i \boldsymbol{r}_i^* + M^3 \boldsymbol{m}^*,$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \int\limits_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{p}_n\,dz = \Phi_n \boldsymbol{n}^* + \Phi_{n\tau} \boldsymbol{\tau}^* + \Phi_3 \boldsymbol{m}^*, \quad \boldsymbol{L} = \int\limits_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{p}_n z\,dz = L_n \boldsymbol{n}^* + L_{n\tau} \boldsymbol{\tau}^*,$$

$$X^\alpha = p_{(+)}^\alpha + p_{(-)}^\alpha + \int\limits_{-t/2}^{t/2} F^\alpha\,dz, \qquad M^\alpha = t(p_{(+)}^\alpha - p_{(-)}^\alpha).$$

При использовании кинематических соотношений (2.3), (2.13), (2.14) для вариации потенциальной энергии деформации оболочки можно получить выражение

$$\begin{aligned} \delta \Pi = &\iiint\limits_{V} (\sigma^{ik}\,\delta\eta_{ik} + 2\sigma^{i3}\,\delta\eta_{i3} + \sigma^{33}\,\delta\eta_{33})\,dz\,d\sigma = \\ &= \iint\limits_{\sigma} [T^{ik}\,\delta\varepsilon_{ik} + M^{ik}\,\delta\chi_{ik} + (T^{i3} + T^{33}\theta_*^i)\,\delta\theta_i^* + \theta_* T^{33}\,\delta\theta_*]\,d\sigma = \\ &= \int\limits_{C} M^{ik} \boldsymbol{r}_k^* n_i\,\delta\boldsymbol{\theta}\,ds + \iint\limits_{\sigma} [(T^{ik}\boldsymbol{r}_k^* + M^{ik}\boldsymbol{\theta}_k)\nabla_i\,\delta\boldsymbol{u} - \nabla_i(M^{ik}\boldsymbol{r}_k^*)\,\delta\boldsymbol{\theta} + \\ &\qquad + (T^{i3} + T^{33}\theta_*^i)\,\delta\theta_i^* + \theta_* T^{33}\,\delta\theta_*]\,d\sigma, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $T^{\alpha\beta}$, M^{ik} — приложенные к срединной поверхности оболочки внутренние усилия и моменты:

$$T^{\alpha\beta} = \int\limits_{-t/2}^{t/2} \sigma^{\alpha\beta}\,dz, \qquad M^{ik} = \int\limits_{-t/2}^{t/2} \sigma^{ik} z\,dz. \tag{3.3}$$

При использовании формул (2.8) в силу $\boldsymbol{r}_i^* = \boldsymbol{r}_i + \nabla_i \boldsymbol{u}$ имеют место преобразования вида

$$\nabla_i(M^{ik}\boldsymbol{r}_k^*) = \nabla_i^* M^{ik}\boldsymbol{r}_k^* + M^{ik} b_{ik}^* \boldsymbol{m}^* = (\nabla_i M^{ik} + A_{is}^k M^{is})\boldsymbol{r}_k^* + M^{ik} b_{ik}^* \boldsymbol{m}^*,$$
$$\boldsymbol{r}_k^*\,\delta\boldsymbol{m}^* = -\boldsymbol{m}^*\nabla_k\delta\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{m}^*\,\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\theta_* + \theta_*^k \boldsymbol{m}^*\nabla_k\delta\boldsymbol{u},$$

с учетом которых после подстановки выражений (3.1), (3.2) в вариационное уравнение $\delta\Pi - \delta A = 0$ и проведения ряда преобразований получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{C} [(\boldsymbol{Q}^i n_i - \boldsymbol{\Phi})\,\delta\boldsymbol{u} + (M^{ik}\boldsymbol{r}_k^* n_i - \boldsymbol{L})\,\delta\boldsymbol{\theta}]\,ds - \\ &\qquad - \iint\limits_{\sigma} [(\nabla_i \boldsymbol{Q}^i + \boldsymbol{X})\,\delta\boldsymbol{u} + f^k\,\delta\theta_k^* + f^3\,\delta\theta_*]\,d\sigma = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь

$$\boldsymbol{Q}^i = Q^{ik}\boldsymbol{r}_k^* + Q^{i3}\boldsymbol{m}^*, \qquad Q^{ik} = T^{ik} + \theta_*^k(\nabla_s^* M^{si} + M^i) + M^{is}\lambda_s^k,$$
$$Q^{i3} = \theta_*(\nabla_s^* M^{si} + M^i) - \theta_*^i(M^{ns}b_{ns}^* + M^3) + M^{ik}\lambda_k; \tag{3.5}$$

$$f^k = \nabla_i^* M^{ik} - T^{k3} - T^{33}\theta_*^k + M^k, \qquad f^3 = M^{ik}b_{ik}^* - \theta_* T^{33} + M^3. \tag{3.6}$$

Из вариационного уравнения (3.4) следуют уравнения равновесия моментов $f^k = 0$, $f^3 = 0$, которые для дальнейших преобразований выражений (3.5) представим в виде

$$\nabla_s^* M^{is} + M^i = T^{i3} + T^{33}\theta_*^i, \qquad M^{ik}b_{ik}^* + M^3 = \theta_* T^{33}, \tag{3.7}$$

уравнение равновесия усилий в векторной форме

$$\nabla_i \boldsymbol{Q}^i + \boldsymbol{X} = 0 \tag{3.8}$$

и граничные условия на контуре C

$$\boldsymbol{Q}^i n_i = \boldsymbol{\Phi} \quad \text{при} \quad \delta\boldsymbol{u} \ne 0, \qquad M^{ik}n_i\boldsymbol{r}_k^* = \boldsymbol{L} \quad \text{при} \quad \delta\boldsymbol{\theta} \ne 0. \tag{3.9}$$

При использовании равенства (3.7) для определения компонент векторов $\boldsymbol{Q}^i = Q^{ik}\boldsymbol{r}_k^* + Q^{i3}\boldsymbol{m}^*$ получаем выражения

$$Q^{ik} = T^{ik} + \theta_*^k(T^{i3} + T^{33}\theta_*^i) + M^{is}\lambda_s^k,$$
$$Q^{i3} = M^{ik}\lambda_k + \theta_*(T^{i3} + T^{33}\theta_*^i) - \theta_*^i\theta_* T^{33} = M^{ik}\lambda_k + \theta_* T^{i3},$$

а при использовании формул (2.8) из уравнения (3.8) следуют скалярные уравнения равновесия усилий

$$y_*^i = \nabla_k^* Q^{ik} - b_k^{*i} Q^{k3} + X^i = 0, \qquad y_*^3 = \nabla_i Q^{i3} + Q^{ik}b_{ik}^* + X^3 = 0,$$

отнесенные к деформированным осям на срединной поверхности оболочки.

Подставляя в разложения $\boldsymbol{Q}^i = Q^{ik}\boldsymbol{r}_k^* + Q^{i3}\boldsymbol{m}^*$, $\boldsymbol{X} = X^i\boldsymbol{r}_i^* + X^i\boldsymbol{m}^*$ выражения (2.6), (2.7), получаем представления

$$\boldsymbol{Q}^i = Q_0^{is}\boldsymbol{r}_s + Q_0^{i3}\boldsymbol{m}, \qquad \boldsymbol{X} = X_0^i\boldsymbol{r}_i + X_0^3\boldsymbol{m}, \tag{3.10}$$

где

$$Q_0^{is} = Q^{ik}(\delta_k^s + e_k^s) + I^{-1/2}Q^{i3}E^s, \qquad Q_0^{i3} = Q^{ik}\omega_k + I^{-1/2}E^3Q^{i3},$$
$$X_0^k = X^i(\delta_i^k + e_i^k) + I^{-1/2}E^kX^3, \qquad X_0^3 = X^i\omega_i + I^{-1/2}E_3X^3.$$

После подстановки представлений (3.10) в векторное уравнение (3.8) используем формулы Гаусса — Вейнгартена (2.5). Приравняв коэффициенты при $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{m}$ к нулю, получаем три скалярных уравнения равновесия усилий в системе координат недеформированной оболочки следующего вида:

$$\nabla_i Q_0^{ik} - b_i^k Q_0^{i3} + X_0^k = 0, \qquad \nabla_i Q_0^{i3} + Q_0^{ik}b_{ik} + X_0^3 = 0. \tag{3.11}$$

Используя для деформированного состояния зависимости $\boldsymbol{r}_i^* = n_i^*\boldsymbol{n}^* + \tau_i^*\boldsymbol{\tau}^*$, статические граничные условия (3.9) представим в виде пяти скалярных условий

$$Q_n = \Phi_n \quad \text{при} \quad \boldsymbol{n}^*\delta\boldsymbol{u} \ne 0, \qquad Q_{n\tau} = \Phi_{n\tau} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\tau}^*\delta\boldsymbol{u} \ne 0,$$
$$Q_3 = \Phi_3 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{m}^*\delta\boldsymbol{u} \ne 0, \qquad M_n = L_n \quad \text{при} \quad \boldsymbol{n}^*\delta\boldsymbol{\theta} = 0,$$
$$M_{n\tau} = L_{n\tau} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\tau}^*\,\delta\boldsymbol{\theta} = 0,$$

в которых в силу принятых предположений $p_3 = p_3(s)$, $2\eta_{i3} \approx 2\varepsilon_{i3} = 2\varepsilon_{i3}(x^k)$ отсутствует условие вида $M_3 = L_3$ при $\boldsymbol{m}^* \,\delta\boldsymbol{u} \neq 0$. Левые части этих условий определяются по формулам

$$Q_n = T^{ik} n_i n_k^*, \quad Q_{n\tau} = T^{ik} n_i \tau_k^*, \quad Q^3 = Q^{i3} n_i, \quad M_n = M^{ik} n_i n_k^*, \quad M_{n\tau} = M^{ik} n_i \tau_k^*.$$

4. Соотношения нелинейной теории упругости при конечных перемещениях и деформациях. Введем компоненты тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma^{(\alpha\beta)} = \sigma^{\alpha\beta}\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}, \qquad \eta_{(\alpha\beta)} = \eta_{\alpha\beta}/\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}\,, \tag{4.1}$$

а также истинные деформации удлинений

$$\eta_\alpha = \sqrt{1 + 2\eta_{(\alpha\alpha)}} - 1. \tag{4.2}$$

Обозначив через $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}$ углы между базисными векторами R_α, R_β, а через $\gamma_{\alpha\beta}$ — их приращения, запишем выражение

$$\cos(\varphi_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}) - \cos\varphi_{\alpha\beta} = \cos\varphi_{\alpha\beta}\,(\sqrt{1 - \sin^2\gamma_{\alpha\beta}} - 1) + \sin\varphi_{\alpha\beta}\sin\gamma_{\alpha\beta}. \tag{4.3}$$

Так как величины $\gamma_{\alpha\beta}$ представляют собой углы сдвигов (сдвиговых деформаций), то при выполнении оценок $\sin\gamma_{\alpha\beta} \approx \sqrt{\varepsilon}$ с точностью $1 + \varepsilon \approx 1$ выражение (4.3) допускает упрощенное представление

$$\cos(\varphi_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}) - \cos\varphi_{\alpha\beta} \approx \sin\varphi_{\alpha\beta}\sin\gamma_{\alpha\beta}. \tag{4.4}$$

Для левой части этого выражения справедливо соотношение вида

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}) - \cos\varphi_{\alpha\beta} &= \frac{\boldsymbol{R}_\alpha^* \boldsymbol{R}_\beta^*}{|\boldsymbol{R}_\alpha^*||\boldsymbol{R}_\beta^*|} - \frac{\boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{R}_\beta}{|\boldsymbol{R}_\alpha||\boldsymbol{R}_\beta|} = \\ &= \frac{g_{\alpha\beta} + 2\eta_{\alpha\beta}}{(1+\eta_\alpha)(1+\eta_\beta)\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}} - \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}} = \\ &= \frac{g_{(\alpha\beta)} + 2\eta_{(\alpha\beta)}}{(1+\eta_\alpha)(1+\eta_\beta)} - g_{(\alpha\beta)} \approx \frac{2\eta_{(\alpha\beta)}}{(1+\eta_\alpha)(1+\eta_\beta)}\end{aligned} \tag{4.5}$$

($g_{(\alpha\beta)} = g_{\alpha\beta}/\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}$), выполняющееся с точностью до $g_{(\alpha\beta)}(\eta_\alpha + \eta_\beta + \eta_\alpha\eta_\beta) \approx 0$. Поэтому, приравняв правые части выражений (4.4), (4.5), получаем соотношения для вычисления сдвиговых деформаций с принятой степенью точности:

$$\sin\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2\eta_{(\alpha\beta)}}{(1+\eta_\alpha)(1+\eta_\beta)\sin\varphi_{\alpha\beta}}, \qquad \alpha \neq \beta, \tag{4.6}$$

к которым нужно добавить соотношения

$$\cos(\varphi_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}) = (1+\eta_\alpha)^{-1}(1+\eta_\beta)^{-1}(g_{(\alpha\beta)} + 2\eta_{(\alpha\beta)}), \tag{4.7}$$

необходимые для проведения дальнейших преобразований.

Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}_*^\alpha = \sigma_*^{\alpha\beta}\boldsymbol{R}_\beta^*$ векторы истинных напряжений, действующих на гранях криволинейного параллелепипеда объемом $dV_* = \sqrt{g_*}\,dx^1\,dx^2\,dx^3$ в деформированном состоянии и отнесенных к единицам их площадей dS_α^*. Эти векторы связаны с векторами условных напряжений $\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \sigma^{\alpha\beta}\boldsymbol{R}_\beta^*$, компоненты которых входят в выражения (3.2), (3.3), зависимостями [6]

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \frac{dS_\alpha^*}{dS_\alpha}\,\boldsymbol{\sigma}_*^\alpha. \tag{4.8}$$

Здесь dS_α — площади граней $x^\alpha = \text{const}$ выделенного элемента объемом $dV = \sqrt{g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3$ в недеформированном состоянии; $g = \det(g_{\alpha\beta})$, $g_* = \det(g^*_{\alpha\beta})$ — определители метрических тензоров до и после деформации.

Для отношения площадей dS^*_α/dS_α можно записать формулы вида

$$\frac{dS^*_1}{dS_1} = \sqrt{\frac{g^*_{22}g^*_{33} - g^{*2}_{23}}{g_{22}g_{33} - g^2_{23}}} = \frac{(1+\eta_2)(1+\eta_3)\sin(\varphi_{23} - \gamma_{23})}{\sin\varphi_{23}}, \qquad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2,3}} \tag{4.9}$$

(запись $\underleftarrow{\overrightarrow{1,2,3}}$ означает, что неприведенные соотношения получаются из приведенных путем циклической перестановки индексов 1, 2, 3), подставляя которые в равенства (4.8), связывающие компоненты напряжений $\sigma^{\alpha\beta}$ и $\sigma^{\alpha\beta}_*$, получаем зависимости

$$\sigma^{1\alpha} = \frac{\sigma^{1\alpha}_*(1+\eta_2)(1+\eta_3)\sin(\varphi_{23} - \gamma_{23})}{\sin\varphi_{23}}, \qquad \alpha = 1,2,3, \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2,3}}\,. \tag{4.10}$$

Заметим, что $\sigma^{\alpha\beta}_* \ne \sigma^{\beta\alpha}_*$, в то время как $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha}$.

При конечных деформациях для определения вариации потенциальной энергии деформаций имеют место выражения

$$\delta\Pi = \iiint\limits_V \sigma^{\alpha\beta}\,\delta\eta_{\alpha\beta}\,dV = \iiint\limits_V \sigma^{(\alpha\beta)}\,\delta\eta_{(\alpha\beta)}\,dV,$$

$$\delta\Pi = \iiint\limits_V \hat\sigma^{\alpha\beta}_*\,\delta\eta_{\alpha\beta}\,dV_* = \iiint\limits_V \sqrt{\frac{g_*}{g}}\,\hat\sigma^{\alpha\beta}_*\,\delta\eta_{\alpha\beta}\,dV = \iiint\limits_V \sqrt{\frac{g_*}{g}}\,\hat\sigma^{(\alpha\beta)}_*\,\delta\eta_{(\alpha\beta)}\,dV, \tag{4.11}$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \hat\sigma^{\alpha\beta}_*\sqrt{g_*/g}\,,$$

в которых для вариаций компонент тензора деформаций $\delta\eta_{(\alpha\beta)}$ в соответствии с выражениями (4.2), (4.6), (4.7) имеют место зависимости

$$\begin{gathered} \delta\eta_{(\alpha\alpha)} = (1+\eta_\alpha)\,\delta\eta_\alpha, \\ 2\delta\eta_{(\alpha\beta)} = (1+\eta_\alpha)(1+\eta_\beta)\,\delta\cos(\varphi_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}) + (1+\eta_\beta)\cos(\varphi_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta})\,\delta\eta_\alpha + \\ + (1+\eta_\alpha)\cos(\varphi_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta})\,\delta\eta_\beta \approx \sin\varphi_{\alpha\beta}\,[(1+\eta_\alpha)(1+\eta_\beta)\,\delta\sin\gamma_{\alpha\beta} + \\ + (1+\eta_\beta)\sin\gamma_{\alpha\beta}\,\delta\eta_\alpha + (1+\eta_\alpha)\sin\gamma_{\alpha\beta}\,\delta\eta_\beta], \qquad \alpha \ne \beta. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Введем также компоненты истинных напряжений по В. В. Новожилову $\tilde\sigma^{\alpha\beta}_*$, связанные с компонентами напряжений $\sigma^{\alpha\beta}_*$ зависимостями

$$\tilde\sigma^{\alpha\beta}_* = (1+\eta_\beta)\sigma^{\alpha\beta}_*, \tag{4.13}$$

причем в силу $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha}$ и зависимостей (4.10) компоненты напряжений $\tilde\sigma^{\alpha\beta}_*$ ($\alpha \ne \beta$) должны удовлетворять равенствам

$$\tilde\sigma^{(12)}_*\,\frac{\sin(\varphi_{23} - \gamma_{23})}{\sin\varphi_{23}} = \tilde\sigma^{(21)}_*\,\frac{\sin(\varphi_{13} - \gamma_{13})}{\sin\varphi_{13}}, \qquad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2,3}}\,. \tag{4.14}$$

С использованием зависимостей (4.12)–(4.14) для определения $\delta\Pi$ можно получить еще одно выражение

$$\begin{gathered} \delta\Pi = \iiint\limits_V [\tau^{(11)}_*\,\delta\eta_1 + \tau^{(22)}_*\,\delta\eta_2 + \tau^{(33)}_*\,\delta\eta_3 + \tau^{(12)}_*\,\delta\sin\gamma_{12} + \\ + \tau^{(13)}_*\,\delta\sin\gamma_{13} + \tau^{(23)}_*\,\delta\sin\gamma_{23}](1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\eta_3)\,dV, \end{gathered} \tag{4.15}$$

где $\tau_*^{(11)}$, $\tau_*^{(12)}$ — компоненты напряжений:

$$\begin{gathered}\tau_*^{(11)}=(\sigma_*^{(11)}+\tilde{\sigma}_*^{(12)}\sin\varphi_{12}\sin\gamma_{12}+\tilde{\sigma}_*^{(13)}\sin\varphi_{13}\sin\gamma_{13})\,\frac{\sin(\varphi_{23}-\gamma_{23})}{\sin\varphi_{23}},\\ \tau_*^{(12)}=\tilde{\sigma}_*^{(21)}\sin\varphi_{12}\,\frac{\sin(\varphi_{13}-\gamma_{13})}{\sin\varphi_{13}}=\tilde{\sigma}_*^{(12)}\sin\varphi_{12}\,\frac{\sin(\varphi_{23}-\gamma_{23})}{\sin\varphi_{23}},\qquad \overleftrightarrow{1,2,3}\,.\end{gathered}\tag{4.16}$$

Для оболочек в системе криволинейных координат, нормально связанной со срединной поверхностью, в силу $\varphi_{13}=\varphi_{23}=\pi/2$, $\sin(\varphi_{i3}-\gamma_{i3})=\cos\gamma_{i3}$ зависимости (4.10), (4.14), (4.16) принимают вид

$$\begin{gathered}\sigma^{1\alpha}=\sigma_*^{1\alpha}(1+\eta_2)(1+\eta_3)\cos\gamma_{23},\qquad \alpha=1,3,\quad \overleftrightarrow{1,2}\,,\\ \sigma^{3\alpha}=\sigma_*^{3\alpha}(1+\eta_1)(1+\eta_2)\sin(\varphi_{12}-\gamma_{12})/\sin\varphi_{12};\end{gathered}\tag{4.17}$$

$$\begin{gathered}\tau_*^{(12)}=\tau_*^{(21)}=\tilde{\sigma}_*^{(12)}\cos\gamma_{23}=\tilde{\sigma}_*^{(21)}\cos\gamma_{13},\\ \tau_*^{(13)}=\tau_*^{(31)}=\tilde{\sigma}_*^{(13)}\cos\gamma_{23}=\tilde{\sigma}_*^{(31)}\sin(\varphi_{12}-\gamma_{12})/\sin\varphi_{12},\\ \tau_*^{(23)}=\tau^{(32)}=\tilde{\sigma}_*^{(23)}\cos\gamma_{13}=\tilde{\sigma}_*^{(32)}\sin(\varphi_{12}-\gamma_{12})/\sin\varphi_{12};\end{gathered}\tag{4.18}$$

$$\begin{gathered}\tau_*^{(11)}=(\sigma_*^{(11)}+\tilde{\sigma}_*^{(12)}\sin\varphi_{12}\sin\gamma_{12}+\tilde{\sigma}_*^{(13)}\sin\gamma_{13})\cos\gamma_{23},\\ \tau_*^{(22)}=(\sigma_*^{(22)}+\tilde{\sigma}_*^{(21)}\sin\varphi_{12}\sin\gamma_{12}+\tilde{\sigma}_*^{(23)}\sin\gamma_{23})\cos\gamma_{13},\\ \tau_*^{(33)}=(\sigma_*^{(33)}+\tilde{\sigma}_*^{(31)}\sin\gamma_{13}+\tilde{\sigma}_*^{(32)}\sin\gamma_{23})\sin(\varphi_{12}-\gamma_{12})/\sin\varphi_{12}.\end{gathered}\tag{4.19}$$

Если материал оболочки является упругим и ортотропным и в указанной выше системе координат поверхность $x^3=\mathrm{const}$ представляет собой поверхность симметрии упругих свойств, причем направление $\boldsymbol{R}_3$ совпадает с одной из осей ортотропии, то в силу подынтегрального выражения в (4.15) для компонент напряжений $\tau_*^{(\alpha\beta)}$ можно записать соотношения

$$\begin{gathered}\tau_*^{(13)}=A^{(55)}\sin\gamma_{13}+A^{(56)}\sin\gamma_{23},\qquad \tau_*^{(23)}=A^{(65)}\sin\gamma_{13}+A^{(66)}\sin\gamma_{23},\\ \tau_*^{(11)}=A^{(11)}\eta_1+A^{(12)}\eta_2+A^{(13)}\eta_3+A^{(14)}\sin\gamma_{12},\qquad \overleftrightarrow{1,2,3},\\ \tau_*^{(12)}=\tau_*^{(21)}=A^{(41)}\eta_1+A^{(42)}\eta_2+A^{(43)}\eta_3+A^{(44)}\sin\gamma_{12},\end{gathered}\tag{4.20}$$

где истинные деформации удлинений η_α и сдвиговые деформации $\sin\gamma_{\alpha\beta}$ определяются по формулам (4.2), (4.6), а упругие характеристики удовлетворяют условиям симметрии $A^{(\alpha\beta)}=A^{(\beta\alpha)}$. В частности, при $\varphi_{12}=\pi/2$ величины $A^{(\alpha\beta)}$, очевидно, равны

$$\begin{gathered}A^{(56)}=A^{(65)}=0,\qquad A^{(14)}=A^{(24)}=A^{(34)}=0,\\ A^{(11)}=E_1\,\frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{\Delta},\quad A^{(12)}=E_2\,\frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{\Delta}=E_1\,\frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{\Delta},\quad \overleftrightarrow{1,2,3},\\ A^{(44)}=G_{12},\qquad A^{(55)}=G_{13},\qquad A^{(66)}=G_{23}.\end{gathered}\tag{4.21}$$

Здесь E_α — модули упругости первого рода; $G_{\alpha\beta}$ — модули сдвига; $\nu_{\alpha\beta}$ — коэффициенты Пуассона. Величины E_α, $G_{\alpha\beta}$, Δ связаны соотношениями

$$\begin{gathered}E_1\nu_{21}=E_2\nu_{12},\qquad E_2\nu_{32}=E_3\nu_{23},\qquad E_3\nu_{13}=E_1\nu_{31},\\ \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}=\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13},\qquad \Delta=1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}.\end{gathered}$$

При использовании соотношений (4.20) с учетом зависимостей (4.18) из (4.19) следуют равенства

$$\sigma_*^{(11)}\cos\gamma_{23} = (A^{(11)} - A^{(41)}\sin\varphi_{12}\sin\gamma_{12})\,\eta_1 + \\ + (A^{(12)} - A^{(42)}\sin\varphi_{12}\sin\gamma_{12})\,\eta_2 + (A^{(13)} - A^{(43)}\sin\varphi_{12}\sin\gamma_{12})\,\eta_3 + \\ + (A^{(14)} - A^{(44)}\sin\varphi_{12}\sin\gamma_{12})\sin\gamma_{12} - (A^{(55)} + A^{(56)}\sin\gamma_{23})\sin\gamma_{13}, \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}, \tag{4.22}$$

$$\sigma_*^{(33)}\sin(\varphi_{12}-\gamma_{12})/\sin\varphi_{12} = A^{(31)}\eta_1 + A^{(32)}\eta_2 + A^{(33)}\eta_3 + A^{(34)}\sin\gamma_{12} - \\ - A^{(55)}\sin^2\gamma_{13} - 2A^{(56)}\sin\gamma_{13}\sin\gamma_{23} - A^{(66)}\sin^2\gamma_{23};$$

$$\tilde\sigma_*^{(12)}\cos\gamma_{23} = \tilde\sigma_*^{(21)}\cos\gamma_{13} = A^{(41)}\eta_1 + A^{(42)}\eta_2 + A^{(43)}\eta_3 + A^{(44)}\sin\gamma_{12}, \\ \tilde\sigma_*^{(13)}\cos\gamma_{23} = \tilde\sigma_*^{(31)}\sin(\varphi_{12}-\gamma_{12})/\sin\varphi_{12} = A^{(55)}\sin\gamma_{13} + A^{(56)}\sin\gamma_{23}, \\ \tilde\sigma_*^{(23)}\cos\gamma_{13} = \tilde\sigma_*^{(32)}\sin(\varphi_{12}-\gamma_{12})/\sin\varphi_{12} = A^{(65)}\sin\gamma_{13} + A^{(66)}\sin\gamma_{23}. \tag{4.23}$$

При $\varphi_{12} = \pi/2$ в силу равенств (4.21) соотношения (4.22) принимают вид

$$\sigma_*^{(11)}\cos\gamma_{23} = A^{(11)}\eta_1 + A^{(12)}\eta_2 + A^{(13)}\eta_3 - G_{12}\sin^2\gamma_{12} - G_{13}\sin^2\gamma_{13}, \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2,3}}; \tag{4.24}$$

$$\sigma_*^{(33)}\cos\gamma_{12} = A^{(31)}\eta_1 + A^{(32)}\eta_2 + A^{(33)}\eta_3 - G_{13}\sin^2\gamma_{13} - G_{23}\sin^2\gamma_{23}, \\ \tilde\sigma_*^{(12)}\cos\gamma_{23} = \tilde\sigma_*^{(21)}\cos\gamma_{13} = G_{12}\cos\gamma_{12}, \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2,3}}.$$

Так как $A^{(\alpha\beta)} > G_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1,2,3$, $\beta = 1,2,3$), то даже в случае $\sin\gamma_{\alpha\beta} \approx \sqrt{\varepsilon}$ с точностью $1+\varepsilon \approx 1$ соотношения (4.24) можно представить в упрощенном виде

$$\sigma_*^{(11)}\cos\gamma_{23} \approx A^{(11)}\eta_1 + A^{(12)}\eta_2 + A^{(13)}\eta_3, \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2,3}}.$$

Следовательно, при $\varphi_{12} \ne \pi/2$ соотношения (4.22) также допускают упрощенное представление

$$\sigma_*^{(11)}\cos\gamma_{23} \approx A^{(11)}\eta_1 + A^{(12)}\eta_2 + A^{(13)}\eta_3 + A^{(14)}\sin\gamma_{12}, \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2}},$$

$$\sigma_*^{(33)}\sin(\varphi_{12}-\gamma_{12})/\sin\varphi_{12} \approx A^{(31)}\eta_1 + A^{(32)}\eta_2 + A^{(33)}\eta_3 + A^{(34)}\sin\gamma_{12},$$

в то время как соотношения (4.23) остаются без изменений. При их использовании с учетом зависимостей (4.13) для компонент напряжений $\sigma^{(\alpha\beta)} = \sigma^{(\beta\alpha)}$ в соответствии с зависимостями (4.17) и результатами работ [8–10] непротиворечивыми и корректными являются соотношения упругости следующего вида:

$$\sigma^{(11)} = (1+\eta_1)^{-1}(1+\eta_2)(1+\eta_3)(A^{(11)}\eta_1 + A^{(12)}\eta_2 + A^{(13)}\eta_3 + A^{(14)}\sin\gamma_{12}), \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2,3}},$$

$$\sigma^{(12)} = (1+\eta_3)(A^{(41)}\eta_1 + A^{(42)}\eta_2 + A^{(43)}\eta_3 + A^{(44)}\sin\gamma_{12}), \\ \sigma^{(13)} = (1+\eta_2)(A^{(55)}\sin\gamma_{13} + A^{(56)}\sin\gamma_{23}), \\ \sigma^{(23)} = (1+\eta_1)(A^{(65)}\sin\gamma_{13} + A^{(66)}\sin\gamma_{23}). \tag{4.25}$$

В отличие от (4.25) соотношения упругости

$$\sigma^{(11)} = A^{(11)}\eta_{(11)} + A^{(12)}\eta_{(22)} + A^{(13)}\eta_{(33)} + 2A^{(14)}\eta_{(12)}, \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2,3}},$$

$$\sigma^{(12)} = A^{(41)}\eta_{(11)} + A^{(42)}\eta_{(22)} + A^{(43)}\eta_{(33)} + 2A^{(44)}\eta_{(12)},$$

$$\sigma^{(13)} = 2(A^{(55)}\eta_{(13)} + A^{(56)}\eta_{(23)}), \qquad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}},$$

$$\sigma^{(11)} = \sqrt{g_*/g}\ (A^{(11)}\eta_{(11)} + \ldots + 2A^{(14)}\eta_{(12)}),\ \ldots,$$

$$\sigma^{(13)} = 2\sqrt{g_*/g}\ (A^{(55)}\eta_{(13)} + \ldots + A^{(56)}\eta_{(23)}), \qquad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2}},$$

записанные с учетом выражений (4.11), являются противоречивыми и некорректными [9, 10], поскольку их использование в ряде случаев приводит к физически недостоверным решениям.

5. Соотношения для тонких оболочек при конечных перемещениях и деформациях. Для тонкой оболочки с точностью до $\delta_i^k - zb_i^k \approx \delta_i^k$ компоненты тензора тангенциальных деформаций определим по формулам

$$\eta_{(ik)} = \frac{\eta_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}} \approx \frac{\eta_{ik}}{\sqrt{a_{ii}a_{kk}}} = \frac{\varepsilon_{ik} + z(\chi_{ik} - b_{ik})}{\sqrt{a_{ii}a_{kk}}} = \varepsilon_{(ik)} + z(\chi_{(ik)} + k_{ik}), \tag{5.1}$$

при этом компоненты вектора поперечных сдвигов и деформации поперечного обжатия в силу $g_{33} = 1$ равны

$$\eta_{(i3)} = \frac{\eta_{i3}}{\sqrt{g_{ii}}} \approx \frac{\eta_{i3}}{\sqrt{a_{ii}}} = \frac{\varepsilon_{i3}}{\sqrt{a_{ii}}} = 2\varepsilon_{i3}, \qquad \varepsilon_{(33)} = \varepsilon_{33}$$

($k_{ik} = -b_{ik}/\sqrt{a_{ii}a_{kk}}$ — величины, характеризующие кривизну и кручение координатных линий x^i на поверхности σ).

С учетом принятой степени точности истинные деформации удлинений $\eta_{(i)}$ в тангенциальных направлениях будем определять в приближении

$$\eta_i = \varepsilon_i + z\chi_i, \tag{5.2}$$

где для величин ε_i и χ_i в силу формул (4.2), (5.1) с принятой степенью точности имеют место соотношения

$$\varepsilon_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{(ii)}} - 1, \qquad \chi_i = \frac{\chi_{(ii)} + k_{ii}}{1 + \varepsilon_i}.$$

С такой же степенью точности в соответствии с выражениями (4.6), (5.1) определяется сдвиговая деформация

$$\sin\gamma_{12} \approx \frac{2[\varepsilon_{(12)} + z(\chi_{(12)} + k_{(12)})]}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\sin\varphi_{12}} \tag{5.3}$$

(φ_{12} — угол между базисными векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ на поверхности σ в принятой для оболочки системе координат).

Так как в соответствии с соотношениями (2.13) $2\eta_{(i3)} = 2\varepsilon_{(i3)} = \theta^*_{(i)}$, причем $\theta^*_i\theta^i_* = \theta^*_{(i)}\theta^{(i)}_*$, то в силу $g_{i3} = 0$, $g_{33} = 1$ из выражений (2.16), (4.6) следуют соотношения

$$\sin\gamma_{i3} \approx \frac{\theta^*_{(i)}}{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_3)}, \qquad \eta_3 = \varepsilon_3 = \sqrt{\theta_*^2 + \theta^*_{(i)}\theta^i_*} - 1, \tag{5.4}$$

где $\theta^*_{(i)} = \theta^*_i/\sqrt{a_{ii}}$; $\theta^{(i)}_* = \theta^i_*\sqrt{a_{ii}}$.

Таким образом, в соответствии с формулами (3.3), (5.2)–(5.4) корректные соотношения упругости для тонких оболочек с учетом принятой степени точности имеют вид

$$T^{(11)} = \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{1+\varepsilon_1}\, t\Big(A^{(11)}\varepsilon_1 + A^{(12)}\varepsilon_2 + A^{(13)}\varepsilon_3 + \frac{2A^{(14)}\varepsilon_{(12)}}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\sin\varphi_{12}}\Big), \quad \underleftarrow{\overrightarrow{1,2,3}},$$

$$
\begin{gathered}
T^{(12)} = (1+\varepsilon_3)\Big(A^{(41)}\varepsilon_1 + A^{(42)}\varepsilon_2 + A^{(43)}\varepsilon_3 + \frac{2A^{(44)}\varepsilon_{(12)}}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\sin\varphi_{12}}\Big),\\
T^{(13)} = (1+\varepsilon_2)tk^2\Big(A^{(55)}\,\frac{\theta^*_{(1)}}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)} + A^{(56)}\,\frac{\theta^*_{(2)}}{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}\Big),\\
T^{(23)} = (1+\varepsilon_1)tk^2\Big(A^{(65)}\,\frac{\theta^*_{(1)}}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)} + A^{(66)}\,\frac{\theta^*_{(2)}}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}\Big),
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

$$
M^{(11)} = \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}{1+\varepsilon_1}\,\frac{t^3}{12}\Big(A^{(11)}\,\frac{\chi_{(11)}+k_{11}}{1+\varepsilon_1} + A^{(12)}\,\frac{\chi_{(22)}+k_{22}}{1+\varepsilon_2} + {} + A^{(14)}\,\frac{2(\chi_{(12)}+k_{12})}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\sin\varphi_{12}}\Big),
$$

$$
M^{(12)} = (1+\varepsilon_3)\,\frac{t^3}{12}\Big(A^{(41)}\,\frac{\chi_{(11)}+k_{11}}{1+\varepsilon_1} + A^{(42)}\,\frac{\chi_{(22)}+k_{22}}{1+\varepsilon_2} + {} + A^{(44)}\,\frac{2(\chi_{(12)}+k_{12})}{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\sin\varphi_{12}}\Big), \quad \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{1,2}}\,.
$$

Здесь k^2 — поправочный коэффициент поперечного сдвига [1–3], равный $5/6$, если при построении соотношений для T^{i3} используется вариационный принцип Рейсснера [3], а для касательных напряжений σ^{i3} принимается аппроксимация вида $\sigma^{i3} = T^{i3}f(z)/t$, где $f(z)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$
f(-z) = f(z), \quad \frac{1}{t}\int\limits_{-t/2}^{t/2} f(z)\,dz = 1, \quad \frac{1}{t}\int\limits_{-t/2}^{t/2} f^2\,dz = \frac{1}{k^2}, \quad \int\limits_{-t/2}^{t/2} zf(z)\,dz = 0.
$$

Следует отметить, что в предлагаемом варианте нелинейной теории тонких оболочек, как и в [8], принципиально важным является учет конечности компонент деформаций, особенно деформации поперечного обжатия, путем введения функции θ_*, которая при средних деформациях поперечных сдвигов представляет собой кратность удлинения в направлении толщины оболочки. Для определения этой функции используется уравнение равновесия моментов $f^3 = 0$ системы (3.6), из которого в случае $M^{ik} = 0$ (безмоментное состояние оболочки) с помощью соотношения упругости для T^{33}, приведенного в (5.5), функция θ_* выражается через истинные деформации ε_1, ε_2, $2\varepsilon_{12}$ путем алгебраических преобразований. Только при использовании уравнений, полученных в описанном выше приближении, удается выявить неклассические формы статической неустойчивости оболочек, находящихся в условиях одностороннего или двустороннего растяжения, при их конечных деформациях. Данный вывод подтверждается решением рассмотренной ниже задачи о расширении сферической оболочки из эластомера под действием внутреннего давления.

6. Поведение сферической оболочки под действием внутреннего давления. Ряд задач об упругой и упругопластической неустойчивости деформирования тел, например при растяжении стержня [9, 10] с образованием шейки или при нагружении цилиндрической оболочки внутренним давлением [8], может быть дополнен аналогичной классической задачей о расширении сферической оболочки [11], результаты решения которой подтверждают сформулированные ранее выводы [8–10]. Известно, что на начальном этапе при надувании любого резинового шарика требуется большое давление, а после достижения некоторого критического размера необходимо существенно меньшее давление.

Обозначим через R начальный диаметр шара (сферической оболочки) из изотропного материала, имеющего начальную толщину t, а через p — избыточное внутреннее гидростатическое давление в расчете на единицу начальной площади срединной поверхности до деформации. Так как при любом значении p оболочка находится в безмоментном состоянии и $\sigma^{11} = \sigma^{22}$, то нетрудно показать, что в рассматриваемом случае имеют место равенства

$$e_{11} = e_{22} = w/R, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = e_{11}, \quad \varepsilon_3 = \theta_*, \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0,$$
$$Q_0^{(11)} = Q_0^{(22)} = T^{(11)}(1+e_{11}) = T^{(22)}(1+e_{22}) = T^{(22)}(1+e_{11}),$$
$$Q_0^{(33)} = T^{(33)}\theta_*, \quad T^{12} = 0, \quad T^{i3} = T^{3i} = 0, \quad M^{ik} = 0,$$
$$X_0^i = M^i = 0, \qquad X_0^3 = p,$$

а уравнения равновесия (3.11) с учетом зависимости $d\sigma_*/d\sigma = (1+e_{11})^2$ в силу $M^3 = -tp$ принимают вид

$$2T^{(11)}(1+e_{11}) = Rp = Rp^*(1+e_{11})^2, \qquad T^{(33)}\theta_* = -tp \tag{6.1}$$

(p^* — давление, отнесенное к единице площади деформированной поверхности σ_*). Из уравнений (6.1) с учетом соотношений (2.17), (3.3) следуют оценки $T^{(11)} \sim Rp/2$, $\sigma_*^{(33)} \sim -p_*$. Следовательно, при $t/R \ll 1$ $\sigma^{(33)} \ll \sigma^{(11)}$ и с большой степенью точности допустимо считать, что оболочка находится в однородном плосконапряженном состоянии, т. е.

$$T^{(33)} \approx 0. \tag{6.2}$$

Предположим, что оболочка выполнена из линейно-упругого материала, характеризующегося модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν. Для тонкой оболочки в соотношениях (5.5) в силу $E_\alpha = E$, $\nu_{\alpha\beta} = \nu$, $G_{\alpha\beta} = E/[2(1+\nu)]$ и равенств (4.21) следует принять

$$A^{(11)} = E(1-\nu^2)/\Delta, \qquad A^{(12)} = E\nu(1-\nu^2)/\Delta, \qquad \overrightarrow{\underleftarrow{1,2,3}}\,.$$

Тогда из равенства (6.2) в принятом приближении $\sigma_*^{(33)} \approx 0$ следует зависимость

$$\varepsilon_3 = -\frac{2\nu}{1-\nu}\,\varepsilon_1 = -\frac{2\nu}{1-\nu}\,e_{11} = -2\tilde{\nu}e_{11}, \qquad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu},$$

с учетом которой в силу $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = e_{11}$ первое соотношение в (5.5) принимает вид

$$T^{(11)} = Et\,\frac{1-2\tilde{\nu}e_{11}}{1-\nu}\,e_{11}.$$

Подставляя это соотношение в первое уравнение (6.1), получаем решение

$$\tilde{p} = \frac{1-2\tilde{\nu}e_{11}}{(1-\nu)(1+e_{11})}, \qquad p^* = 2\tilde{p}\,\frac{Et}{R}, \tag{6.3}$$

имеющее предельную точку (точку статической неустойчивости), которая характеризуется критическими значениями деформации и давления

$$e_{11}^{cr} = \sqrt{\frac{1+\nu}{2\nu}} - 1, \qquad \tilde{p}^{cr} = \frac{(1-2\tilde{\nu}e_{11}^{cr})e_{11}^{cr}}{(1-\nu)(1+e_{11}^{cr})}.$$

Эти значения для двух значений коэффициента Пуассона приведены в табл. 1. Из анализа полученных результатов следует, что найденное решение является физически содержательным.

Если оболочка выполнена из резины, относящейся к классу несжимаемых упругих эластомеров [7], то при возникновении в ней однородных деформаций истинные напряже-

Таблица 1

Критические значения деформации
и давления для линейно-упругого материала

ν	e_{11}^{cr}	p^{cr}
0,3	0,47	0,36
0,5	0,22	0,20

ния $\sigma_*^{\alpha\alpha}$ связаны с истинными деформациями ε_α зависимостями [7]

$$\sigma^{\alpha\alpha} = \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_\alpha} + q,$$

где $\lambda_\alpha = 1 + \varepsilon_\alpha$ — кратности удлинений; q — гидростатическое давление; Φ — упругий потенциал.

В работе [7] в дополнение к известным потенциалам (неогуковский, Муни, Бартенева — Хазановича и др.) предложен двухконстантный потенциал вида

$$\Phi = \mu[(1+\beta)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) + (1-\beta)(\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} - 3)], \qquad (6.4)$$

который даже при больших деформациях ($\lambda \approx 1 \div 3$) обеспечивает лучшее соответствие результатов расчетов экспериментальным данным, полученным для 14 типов резины.

При реализации плоского напряженного состояния в силу условия (6.2) ($\sigma_*^{33} = 0$) в соответствии с выражением (6.4) имеют место соотношения упругости вида

$$\begin{gathered} \sigma_*^{(11)} = \mu[(1+\beta)\lambda_1 - (1-\beta)\lambda_1^{-1}] + q, \qquad \sigma_*^{(22)} = \mu[(1+\beta)\lambda_2 - (1-\beta)\lambda_2^{-1}] + q, \\ 0 = \mu[(1+\beta)\lambda_3 - (1-\beta)\lambda_3^{-1}] + q. \end{gathered} \qquad (6.5)$$

Исключив из (6.5) неизвестную функцию q, с учетом равенства $\lambda_1 = \lambda_2$ и в соответствии с результатами работы [7] получаем соотношения вида (с учетом обозначения $\varepsilon_1 = e_{11}$)

$$\begin{gathered} \varepsilon_3 = \lambda_3 - 1 = (1 + e_{11})^{-1} - 1 = -e_{11}(1 + e_{11})^{-1}, \\ T_*^{(11)} = T_*^{(22)} = t\sigma_*^{(11)} = \mu t f(e_{11}), \\ f(e_{11}) = (1+\beta)[1 + e_{11} - (1 + e_{11})^{-2}] + (1-\beta)[(1+e_{11})^2 - (1+e_{11})^{-1}], \end{gathered} \qquad (6.6)$$

где μ, β — характеристики материала (для резины марки ИРП-2052 $\mu = 8{,}75$ МПа, $\beta = 1{,}43$ [7]), причем характеристика μ соответствует модулю упругости первого рода E.

Так как усилия $T^{(11)}$ и $T_*^{(11)}$ связаны зависимостью

$$T^{(11)} = (1 + \varepsilon_1)^{-1}(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)T_*^{(11)},$$

то в соответствии с соотношениями (6.6) при введении параметра нагрузки

$$\tilde{p} = p^* R/(2t\mu)$$

из первого равенства в (6.1) получаем решение вида

$$\tilde{p} = f(e_{11})/(1 + e_{11})^2. \qquad (6.7)$$

Проведено численное исследование построенного решения (6.7). Установлено, что это решение, как и решение (6.3), корректно описывает явление статической неустойчивости рассматриваемой оболочки, но в отличие от (6.3) оно учитывает реальную физическую нелинейность деформирования резины, описываемую функцией $f(e_{11})$.

В табл. 2 приведены критические значения параметров e_{11} и $\tilde{p}$, после достижения которых деформирование сферической оболочки из резины происходит при меньшем значении давления p_*.

Таблица 2

Критические значения деформации
и давления для резины

β	e_{11}^{cr}	$\tilde{p}^{cr}$
1,00	0,36	0,65
1,43	0,32	0,60
1,57	0,31	0,59

Заключение. Соотношения предложенного варианта нелинейной теории оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях, основанные на введении в качестве неизвестных компонент вектора поперечных сдвигов и кратности удлинений в поперечном направлении, являются наиболее компактными и представляются более предпочтительными по сравнению с известными соотношениями. С учетом полученных ранее результатов [9, 10] структуру построенных трехмерных и двумерных физических соотношений должны иметь и физические соотношения в случае физически нелинейных свойств материала, использование которых позволяет корректно описывать пластическую неустойчивость тонкостенных элементов конструкций при различных видах их напряженно-деформированного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галимов К. З.** Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975.
2. **Рикардс Р. Б.** Устойчивость оболочек из композитных материалов / Р. Б. Рикардс, Г. А. Тетерс. Рига: Зинатне, 1974.
3. **Галимов К. З.** Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / К. З. Галимов, Ю. П. Артюхин, С. Н. Карасев и др. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977.
4. **Паймушин В. Н.** Вариант нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 8. С. 50–57.
5. **Галимов К. З.** Основания нелинейной теории оболочек / К. З. Галимов, В. Н. Паймушин, И. Г. Терегулов. Казань: Фэн, 1996.
6. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
7. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986.
8. **Паймушин В. Н.** Теория тонких оболочек при конечных перемещениях и деформациях, основанная на модифицированной модели Кирхгофа — Лява // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, вып. 5. С. 813–829.
9. **Бережной Д. В., Паймушин В. Н.** О двух постановках упругопластических задач и теоретическое определение места образования шейки в образцах при растяжении // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, вып. 4. С. 635–659.
10. **Паймушин В. Н.** Исследование уравнений теории упругости и пластичности при произвольных перемещениях и деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 67–80.
11. **Пановко Я. Г.** Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 5/VIII 2013 г.,
в окончательном варианте — 6/XI 2013 г.