

УДК 533.9

К. П. Горшенин

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПЛАЗМЫ  
В УЗКОЙ ТРУБКЕ ПОТОКА

1. Введение. Для изучения свойств магнитогидродинамических течений плазмы в каналах в [1] предложена модель течения в узкой трубке потока. Стационарное аксиально-симметричное течение невязкой нетеплопроводной идеально проводящей среды в поперечном собственном магнитном поле описывается уравнениями

$$(1.1) \quad \rho v s = \text{const};$$

$$(1.2) \quad \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p / \rho}{\gamma - 1} + \frac{H^2}{4\pi \rho} = \text{const};$$

$$(1.3) \quad H / \rho r = \text{const};$$

$$(1.4) \quad p / \rho^\gamma = \text{const}.$$

Здесь  $s = 2\pi r$  — площадь поперечного сечения трубки;  $r$  — ее средний радиус;  $f$  — поперечный размер (рис. 1). Уравнения (1.2) — (1.4) описывают изменение параметров потока вдоль траектории  $r = r(z)$ . Уравнение (1.1) содержит, вообще говоря, значения  $\rho$  и  $v$ , усредненные по сечению трубки, однако в силу предполагаемой малости  $f$  можно считать их совпадающими со значениями  $\rho$  и  $v$  на траектории  $r(z)$ .

При исследовании течений в каналах весьма широко использовалось гидравлическое (квазидвумерное) приближение, в котором все МГД-величины усредняются в поперечном сечении. Обзор результатов можно найти, например, в [2]. К несомненным достоинствам гидравлического приближения следует отнести возможность учета влияния на течение разнообразных физических факторов (диссипативные процессы, внешнее электромагнитное поле и т. п.). В этой модели геометрия канала влияет на течение аналогично обычной газодинамике. Иная ситуация возникает при исследовании течения в узкой трубке потока. С одной стороны, эта модель опирается на следствия уравнений идеальной магнитной гидродинамики (уравнения (1.2) — (1.4) есть точные законы сохранения, выполняющиеся вдоль траектории). Поэтому весьма затруднен, например, учет диссипативных факторов. В [3] выписаны уравнения для плазмы с конечной проводимостью, но при жестком предположении, что траектории совпадают с эквипотенциалами (при бесконечной проводимости это выполнено автоматически). С другой стороны, в уравнениях (1.1) — (1.4) участвуют точные МГД-величины на некоторой траектории произвольной формы. Это позволяет в рамках модели течения в узкой трубке рассматривать и существенно двумерные эффекты. Так, в [4] показано, что при некоторых предположениях о форме узких трубок можно получить условия отсутствия в канале вихрей электрического тока, выраженные в виде ограничений на локальные параметры потока.

С математической точки зрения «квазидвумерность» модели течения в узкой трубке обусловлена тем, что все величины в уравнениях (1.1) — (1.4) рассматриваются в точках двумерного пространства с координатами  $(z, r(z))$ . С физической точки зрения эта модель учитывает важное обстоятельство, которое принципиально не может быть учтено при усреднении в поперечном сечении: вдоль траектории произвольной формы меняется не только напряженность магнитного поля, но и длина его силовых линий. Другими словами, в уравнении движения учитывается не только градиент магнитного давления, но и член  $\sim (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}$ , который означает, что поле совершает работу при сокращении своих силовых линий [1].

В качестве известного примера рассмотрим вопрос о переходе через скорость сигнала. Дифференцируя уравнения (1.1) — (1.4) и исключая  $dp$ ,  $dH$ , получаем [1]

$$(1.5) \quad (v^2 - c_m^2) \frac{dv}{v} = c_s^2 \frac{d(f/r)}{f/r} + c_a^2 \frac{d(f/r)}{f/r}$$

( $c_s^2 = \gamma p / \rho$ ,  $c_a^2 = H^2 / (4\pi \rho)$ ,  $c_{ri}^2 = c_s^2 + c_a^2$ ). В изогну-

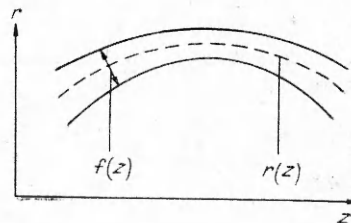


Рис. 1

тых трубках ( $r \neq \text{const}$ ) переход через местную скорость сигнала происходит при  $c_s^2 \gg c_c^2$  (газодинамическое течение) в точке минимума функции  $fr$  (площади поперечного сечения), при  $c_s^2 \ll c_c^2$  (течение в сильном магнитном поле) — в точке минимума функции  $f/r$ . В трубке с  $r = \text{const}$  или в случае плоского течения (чему формально соответствует  $r \rightarrow \infty$ ) характер течения определяется поведением  $f$ , т. е. фактически площади поперечного сечения, и наличие магнитного поля не влияет на положение точки перехода через скорость сигнала.

В настоящей работе рассматриваются особенности течения плазмы в узкой трубке потока, возникающие вследствие кривизны ее средней линии. Кроме того, исследуется вопрос о существовании стационарных течений в узких трубках.

## 2. Особенности течений в изогнутых трубках. Перепишем (1.5) в виде

$$(2.1) \quad (M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{df}{f} - \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{dr}{r}.$$

Здесь  $M = v/c_m$  — магнитное число Маха;  $\alpha = \gamma\beta/2$ ;  $\beta = 8\pi p/H^2$ . Согласно уравнениям (1.1)—(1.4), каждая МГД-величина может быть выражена через функции  $r(z)$ ,  $f(z)$  и константы уравнений, являющиеся комбинациями входных величин  $\rho_0$ ,  $v_0$ ,  $H_0$ ,  $p_0$ ,  $r_0$ ,  $f_0$ . То же самое справедливо и для функции  $\beta(z)$ . Следовательно, положение критического сечения (в котором возможен переход через скорость сигнала) в общем случае определяется не только геометрией трубки (функциями  $r(z)$  и  $f(z)$ ), но и входными параметрами потока. Это утверждение можно проиллюстрировать следующим примером. Поскольку из (1.3) и (1.4) вытекает

$$(2.2) \quad \beta r^2 - \gamma r^2 = \text{const},$$

то при  $\gamma = 2$   $\beta = \beta_0(r_0/r)^2$  и правую часть (2.1) можно записать в виде полного дифференциала. Окончательно получаем, что при  $\gamma = 2$  переход через скорость сигнала происходит в сечении  $z_*$ , где

$$(2.3) \quad rf/(r^2 + \beta_0 r_0^2) = \text{min}.$$

Очевидно, что (2.3) определяет неявную зависимость  $z_*(\beta_0)$ . Здесь и далее индексами 0 и \* отмечаются величины, относящиеся соответственно к входному и критическому сечениям. Однако если функции  $r(z)$  и  $f(z)$  таковы, что  $fr$  и  $f/r$  ведут себя одинаковым образом и имеют минимум в одной и той же точке  $z^0$ , то, согласно (1.5),  $z_*$  совпадает с  $z^0$  и не зависит от  $\beta_0$ .

В газодинамическом течении направления изменения плотности и скорости в узкой трубке различны. В МГД-течении они могут совпадать. Действительно, продифференцировав уравнения (1.1)—(1.4) и исключив  $dp$ ,  $dv$ ,  $dH$ , имеем соотношение

$$(2.4) \quad (M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = \left( \frac{2}{1 + \alpha} - M^2 \right) \frac{dr}{r} - M^2 \frac{df}{f},$$

которое будем рассматривать в совокупности с (2.1). Видно, что в обычной газодинамике ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) всегда  $d\rho dv < 0$ . Это выполнено и для МГД-течения в трубке с  $r = \text{const}$ . В трубке с  $r \neq \text{const}$  возможна ситуация, когда  $d\rho dv > 0$ . Ускорительные режимы с уплотнением наблюдались в расчетах стационарных двумерных течений плазмы в каналах [5]. В [1] такие режимы названы аномальными. Уточним условия их реализации.

Перемножив (2.1) и (2.4), находим

$$(M^2 - 1)^2 \frac{d\rho}{\rho} \frac{dv}{v} = \left[ \left( \frac{2}{1 + \alpha} - M^2 \right) \frac{dr}{r} - M^2 \frac{df}{f} \right] \left[ \frac{df}{f} - \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{dr}{r} \right].$$

Следовательно, в аномальном режиме одновременно выполнены неравенства

$$(2.5) \quad \left( \frac{2}{1 + \alpha} - M^2 \right) \frac{dr}{r} - M^2 \frac{df}{f} > 0, \quad \frac{df}{f} - \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{dr}{r} > 0,$$

или

$$(2.6) \quad \left( \frac{2}{1 + \alpha} - M^2 \right) \frac{dr}{r} - M^2 \frac{df}{f} < 0, \quad \frac{df}{f} - \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{dr}{r} < 0.$$

Условие совместности системы (2.5):

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{dr}{r} < \left( \frac{2/M^2}{1+\alpha} - 1 \right) \frac{dr}{r}$$

или

$$(2.7) \quad (M^2 - 1) dr < 0.$$

Аналогично условие совместности системы (2.6):

$$(2.8) \quad (M^2 - 1) dr > 0.$$

С учетом (2.5)–(2.8) можно выписать условия аномального поведения плотности:

а) в режиме ускорения ( $dv > 0$ )  $dr < 0$ ,

$$(M^2 - 1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{dr}{r} < (M^2 - 1) \frac{df}{f} < (M^2 - 1) \left( \frac{2/M^2}{1+\alpha} - 1 \right) \frac{dr}{r};$$

б) в режиме торможения ( $dv < 0$ )  $dr > 0$ ,

$$(M^2 - 1) \left( \frac{2/M^2}{1+\alpha} - 1 \right) \frac{dr}{r} < (M^2 - 1) \frac{df}{f} < (M^2 - 1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{dr}{r}.$$

Таким образом, независимо от характера течения — досигнального ( $M < 1$ ) или сверхсигнального ( $M > 1$ ) — аномальное ускорение возможно только на нисходящих траекториях ( $dr < 0$ ), аномальное торможение — на восходящих ( $dr > 0$ ).

В обычной газодинамике ускорение или торможение однозначно характеризуется направлением изменения теплового числа Маха  $M_s = v/c_s$ . В МГД-течении направления роста  $M$ ,  $M_s$  и параметра  $M_a$ , обратного числу Альфвена ( $M_a = v/c_a$ ), вдоль траектории могут не совпадать с направлением роста скорости. Действительно, из (1.1)–(1.4) следуют соотношения

$$(2.9) \quad (M^2 - 1) \frac{dM}{M} = \left[ \frac{M^2}{2} \frac{1+(\gamma-1)\alpha}{1+\alpha} + 1 \right] \frac{df}{f} - \left[ \frac{M^2}{2} \frac{1-(\gamma-1)\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{(\gamma-2)\alpha}{(1+\alpha)^2} \right] \frac{dr}{r};$$

$$(2.10) \quad (M^2 - 1) \frac{dM_s}{M_s} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{df}{f} - \left( \frac{\gamma-\alpha}{1+\alpha} - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{dr}{r};$$

$$(2.11) \quad (M^2 - 1) \frac{dM_a}{M_a} = \left( \frac{M^2}{2} + 1 \right) \frac{df}{f} - \left( \frac{M^2}{2} + \frac{1-2\alpha}{1+\alpha} \right) \frac{dr}{r}.$$

Не приводя выкладки, подобные предыдущим, выпишем условия аномального (в указанном смысле) поведения  $M$ ,  $M_s$ ,  $M_a$ :

а) в режиме ускорения ( $dv > 0$ )  $dM < 0$  при  $(\gamma - 2)dr < 0$  и

$$(M^2 - 1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{dr}{r} < (M^2 - 1) \frac{df}{f} < (M^2 - 1) \frac{M^2 [1 - (\gamma-1)\alpha] + 2 \frac{1+(\gamma-2)\alpha - \alpha^2}{1+\alpha}}{M^2 [1 + (\gamma-1)\alpha] + 2(1+\alpha)} \frac{dr}{r},$$

$dM_s < 0$  при  $dr < 0$  и

$$(M^2 - 1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{dr}{r} < (M^2 - 1) \frac{df}{f} < (M^2 - 1) \frac{\frac{\gamma-\alpha}{1+\alpha} - \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dr}{r},$$

$dM_a < 0$  при  $dr > 0$  и

$$(M^2 - 1) \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{dr}{r} < (M^2 - 1) \frac{df}{f} < (M^2 - 1) \frac{M^2 + 2 \frac{1-2\alpha}{1+\alpha}}{M^2 + 2} \frac{dr}{r};$$

б) в режиме торможения ( $dv < 0$ )  $dM > 0$  при  $(\gamma - 2)dr > 0$  и

$$(M^2 - 1) \frac{M^2 [1 - (\gamma - 1)\alpha] + 2 \frac{1 + (\gamma - 2)\alpha - \alpha^2}{1 + \alpha}}{M^2 [1 + (\gamma - 1)\alpha]} \frac{dr}{r} < \\ < (M^2 - 1) \frac{df}{f} < (M^2 - 1) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{dr}{r},$$

$dM_s > 0$  при  $dr < 0$  и

$$(M^2 - 1) \frac{\frac{\gamma - \alpha}{1 + \alpha} - \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dr}{r} < (M^2 - 1) \frac{df}{f} < (M^2 - 1) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{dr}{r},$$

$dM_a > 0$  при  $dr < 0$  и

$$(M^2 - 1) \frac{M^2 + 2 \frac{1 - 2\alpha}{1 + \alpha}}{M^2 + 2} \frac{dr}{r} < (M^2 - 1) \frac{df}{f} < (M^2 - 1) \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{dr}{r}.$$

Отметим, что при  $\gamma = 2$  всегда  $dM dv \geq 0$ .

Таким образом, при  $\gamma < 2$  на восходящих траекториях ускорение однозначно характеризуется ростом  $M_s$ , торможение — уменьшением  $M$  и  $M_a$ . На нисходящих траекториях ускорение однозначно характеризуется ростом  $M$  и  $M_a$ , торможение — уменьшением  $M_s$ .

Наконец, рассмотрим узкую трубку с постоянным поперечным размером  $f = \text{const}$ . Из (2.1) получаем

$$(2.12) \quad (M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{dr}{r}.$$

Знак ускорения в каждой точке определяется характером течения (досигнальное или сверхсигнальное), направлением роста функции  $r(z)$  и величиной  $\beta$  в этой точке. Переход функции  $\beta(z)$  через  $2/\gamma$  при монотонном изменении  $r(z)$  сопровождается сменой знака ускорения, т. е. появлением локального экстремума скорости. Из (2.9) получаем

$$(2.13) \quad (M^2 - 1) \frac{dM}{M} = - \left[ \frac{M^2}{2} \frac{1 - (\gamma - 1)\alpha}{1 + \alpha} + \frac{1 + (\gamma - 2)\alpha - \alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \right] \frac{dr}{r}.$$

Из (2.2) с учетом (2.4) находим

$$(2.14) \quad (M^2 - 1) \frac{d\beta}{\beta} = \left[ 2 \frac{\gamma - 1 + \alpha}{1 + \alpha} - \gamma M^2 \right] \frac{dr}{r}.$$

Из выражений (2.12)–(2.14) можно определить направления роста  $v$ ,  $M$ ,  $\beta$  в любой точке в зависимости от их значений в этой точке и направления изменения функции  $r(z)$ . Результаты исследования для  $3/2 < \gamma < 2$  графически представлены на рис. 2, 3 при  $dr > 0$  и  $dr < 0$  соответственно, линии I и II отвечают

$$M^2 = 2 \frac{(\gamma - 2)\alpha + 1 - \alpha^2}{(\gamma - 2)\alpha + (\gamma - 1)\alpha^2 - 1}, \quad M^2 = \frac{2}{\gamma} \frac{\gamma - 1 + \alpha}{1 + \alpha}.$$

Стрелки указывают направления изменения  $M^2$  и  $\alpha$  (т. е.  $\beta$ ). Так, на рис. 2 в квадрате, ограниченном прямыми  $M = 0$  и  $1$ ,  $\alpha = 0$  и  $1$ , имеем  $dM > 0$ ,  $d\beta < 0$  и т. д.

Рассмотрим для определенности трубку с  $d^2r/dz^2 < 0$ , на входе в которую поток досигнальный. При  $\alpha_0 < 1$  он ускоряется, в точке максимума функции  $r(z)$  возможен переход через скорость сигнала. Если переход происходит, то поток продолжает ускоряться, но  $\alpha$ , начиная с некоторой точки, растет, и при  $\alpha = 1$  скорость достигает максимума. При  $\alpha_0 > 1$  досигнальный поток тормозится. Как видно из рис. 2, 3, в зависимости от входных значений  $M_0$  и  $\alpha_0$  возможны такие режимы течения, в которых  $M$  возрастает в замедляющемся потоке, и в точке максимума функции

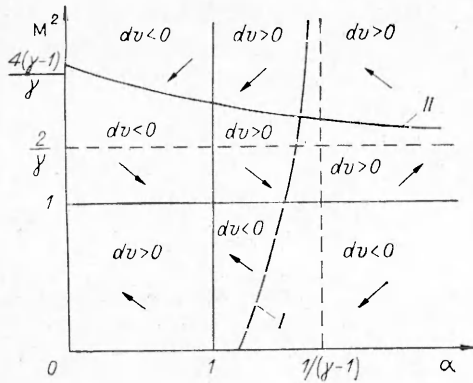


Рис. 2

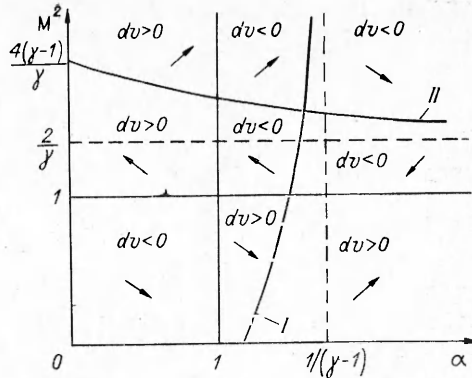


Рис. 3

$r(z)$  возможен переход через  $M = 1$ . Аналогичным образом на основе рис. 2, 3 рассматриваются и другие режимы течений.

**3. Существование стационарных течений.** В обычной газодинамике условия существования стационарного течения в квазиодномерном канале (сопле Лавала) выражаются ограничениями на входной параметр  $M_{s0}$ :

$$0 < M_{s0} \leq M_{s0}^-, \quad M_{s0} \geq M_{s0}^+, \quad M_{s0}^- < 1 < M_{s0}^+,$$

$M_{s0}^-$  и  $M_{s0}^+$  определяются условием перехода через скорость звука  $c_s$  в критическом (минимальном) сечении. В магнитной гидродинамике для узкой трубки произвольной формы положение критического сечения, как показано выше, заранее неизвестно, поэтому вопрос о существовании стационарного течения следует рассмотреть особо.

Перепишем систему уравнений (1.1)–(1.4) в безразмерном виде, приняв за единицы измерения соответствующих величин входные значения  $\rho_0, c_{m0}, H_0, p_0, s_0, r_0$ :

$$(3.1) \quad \rho v s = M_0, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{p/\rho}{\gamma-1} \frac{\alpha_0}{1+\alpha_0} + \frac{H^2}{\rho} \frac{1}{1+\alpha_0} = \frac{M_0^2}{2} + \frac{1 + \alpha_0/(\gamma-1)}{1+\alpha_0},$$

$$H/\rho r = 1, \quad p/\rho v = 1.$$

Здесь  $s = fr$ ;  $\alpha_0 = \gamma \beta_0/2$ . При таком выборе единиц течение в трубке заданной геометрии определяется безразмерными параметрами  $M_0$  и  $\beta_0$ . Найдем, при каких значениях этих параметров решение системы (3.1) существует в каждом сечении трубки (т. е. существует стационарное течение, описываемое уравнениями (3.1)).

Исключая из (3.1)  $v, H, p$ , получим уравнение для плотности:

$$(3.2) \quad \rho^3 r^2 + \rho^{\gamma+1} \frac{\alpha_0}{\gamma-1} - \left[ \frac{M_0^2}{2} (1 + \alpha_0) + \frac{\alpha_0}{\gamma-1} + 1 \right] \rho^2 + \frac{M_0^2}{2s^2} (1 + \alpha_0) = 0.$$

Поскольку все остальные МГД-величины однозначно выражаются через  $\rho$ , необходимо выяснить условия существования корней уравнения (3.2).

Рассмотрим левую часть (3.2) как функцию  $F(\rho)$  при фиксированных  $r, s, M_0, \alpha_0$ . Нетрудно убедиться, что  $F(\rho)$  имеет минимум при  $\rho = \rho_m$ , величина  $\rho_m$  определяется из уравнения

$$(3.3) \quad 3\rho_m r^2 + \alpha_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_m^{\gamma-1} = M_0^2 (1 + \alpha_0) + 2 \left( \frac{\alpha_0}{\gamma-1} + 1 \right).$$

При любых значениях  $r, M_0, \alpha_0$  это уравнение имеет единственный положительный корень. Для существования корней уравнения (3.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(3.4) \quad F(\rho_m) \leq 0.$$

Если  $F(\rho_m)$  — отрицательная величина, то уравнение (3.2) имеет корни

$\rho_-$  и  $\rho_+$ :  $\rho_- < \rho_m < \rho_+$ , причем  $F'(\rho_-) < 0$ ,  $F'(\rho_+) > 0$ . Используя выражение для  $M$  в безразмерных величинах

$$M^2 = \frac{(1 + \alpha_0) M_0^2}{\rho^2 s^2 (\alpha_0 \rho^{\gamma-1} + \rho r^2)},$$

представим (3.2) в виде

$$\frac{1}{2} (M^2 - 1) \left( \rho^3 r^2 + \frac{\alpha_0}{2} \rho^{\gamma+1} \right) + \frac{1}{2} \rho F'(\rho) = 0,$$

откуда следует, что  $\rho_+$  отвечает дозвуковому течению, а  $\rho_-$  — сверхзвуковому. Таким образом, решая уравнение (3.2) в каждой точке  $z$ , получим две функции:  $\rho_+(z)$  и  $\rho_-(z)$ . В точке  $z_*$ , где  $F(\rho_m) = 0$  и  $M = 1$ , значения их совпадают. Очевидно, поведение плотности в трубке при  $z \leq z_*$  однозначно описывается одной из этих функций, выбор которой определяется  $M_0$ . При  $z > z_*$  физический смысл имеют оба решения. Одно из них описывает трансзвуковое течение, другое соответствует режиму, в котором переход через скорость сигнала не происходит.

Уточним смысл условия (3.4). Выразим  $M_0^2$  из (3.3) и подставим в  $F(\rho_m)$ . Условие (3.4) эквивалентно

$$(3.5) \quad \Phi(\rho_m) \geq 0,$$

$$\Phi(\rho_m) = \rho_m^3 r^2 + \alpha_0 \rho_m^{\gamma+1} - \frac{3r^2}{s^2} \rho_m - \alpha_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_m^{\gamma-1}}{s^2} + 2 \frac{1 + \alpha_0/(\gamma-1)}{s^2}.$$

Функция  $\Phi(x)$  имеет минимум в точке  $x = 1/s$ . Условие (3.5) выполнено для любых  $\rho_m$ , если  $\Phi(1/s) \geq 0$  или

$$\frac{r^2}{s} + \frac{\alpha_0}{\gamma-1} \frac{1}{s^{\gamma-1}} \leq 1 + \frac{\alpha_0}{\gamma-1}.$$

Если же это неравенство не выполнено, т. е.

$$(3.6) \quad \frac{r^2}{s} + \frac{\alpha_0}{\gamma-1} \frac{1}{s^{\gamma-1}} > 1 + \frac{\alpha_0}{\gamma-1},$$

то (3.5) удовлетворяют значения  $\rho_m$  из интервалов

$$0 < \rho_m \leq \rho_m^-, \quad \rho_m \geq \rho_m^+,$$

где  $\rho_m^-$  и  $\rho_m^+$  — корни уравнения  $\Phi(\rho_m) = 0$ , для них выполнено

$$(3.7) \quad \rho_m^- < \frac{1}{s} < \rho_m^+.$$

Очевидно, смысл имеют  $\rho_m > \rho_m^0$ , где  $\rho_m^0$  находится из (3.3) при  $M_0 = 0$ :

$$\frac{3}{2} \rho_m^0 r^2 + \frac{\alpha_0}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\rho_m^0)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\alpha_0}{\gamma-1}.$$

С учетом (3.6) получим

$$\frac{3}{2} \frac{r^2}{s} + \frac{\alpha_0}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{s^{\gamma-1}} > 1 + \frac{\alpha_0}{\gamma-1}$$

и, следовательно,  $\rho_m^0 < 1/s$ . Так как  $\Phi(\rho_m^0) > 0$ , в чем можно убедиться непосредственно, то  $\rho_m^0 < \rho_m^-$ . Таким образом, допустимые значения  $\rho_m$  содержатся в интервалах  $\rho_m^0 < \rho_m \leq \rho_m^-$ ,  $\rho_m \geq \rho_m^+$ . С учетом (3.3) это означает, что при заданном  $\beta_0$  допустимые значения  $M_0$  содержатся в интервалах  $0 < M_0 \leq M_0^-$ ,  $M_0 \geq M_0^+$  ( $M_0^-$  и  $M_0^+$  получаются при подстановке в (3.3)  $\rho_m^-$  и  $\rho_m^+$ ).

Проводя подобное рассмотрение в каждом сечении трубки \*, получим функции  $M_0^-(z)$  и  $M_0^+(z)$ . Очевидно, если  $M_0$  выбирать из интервалов

$$0 < M_0 \leq M_{\min}^-, \quad M_0 \geq M_{\max}^+$$

$$\left( M_{\min}^- = \min_z M_0^-(z) = M_0^-(z_-), \quad M_{\max}^+ = \max_z M_0^+(z) = M_0^+(z_+) \right).$$

то решение уравнения (3.2) существует в любом сечении трубки. Если  $M_0$  в точности равно одному из предельных значений  $M_{\min}^-$  или  $M_{\max}^+$ , то соответственно в точках  $z_-$  или  $z_+$  величины  $\rho_m^-$  или  $\rho_m^+$  удовлетворяют уравнению (3.2). Это означает, что  $M(z_-) = 1$  или  $M(z_+) = 1$ . Заметим, что положение точки перехода через скорость сигнала оказывается связанным с полным набором входных значений размерных МГД-величин:  $\rho_0, p_0, v_0, H_0$ .

Таким образом, в трубке с заданной геометрией и фиксированным входным параметром  $\beta_0$  не существуют стационарные режимы течения, в которых  $M_0$  принимает значения из некоторого открытого интервала, зависящего от  $\beta_0$  и геометрии. Можно показать, что для узкой трубки, в которой функции  $fr$  и  $f/r$  имеют минимумы в одной и той же точке, этот интервал содержит  $M_0 = 1$ . Действительно, согласно (1.5), в такой трубке досигнальный на входе поток ускоряется, сверхсигнальный замедляется. Подставляя в первое уравнение системы (3.1)  $M_{\min}^-$  и  $M_{\max}^+$  и используя (3.7), получаем

$$v_- > M_{\min}^-, \quad v_+ < M_{\max}^+.$$

Здесь  $v_-$  и  $v_+$  — скорости в критическом сечении, отвечающие значениям плотности  $\rho_m^-$  и  $\rho_m^+$ . Но поскольку входное число Маха есть безразмерное значение входной скорости, то эти неравенства означают  $M_{\min}^- < 1 < M_{\max}^+$ .

Наконец, укажем частные случаи, когда уравнения, определяющие предельные значения числа Маха, могут быть выписаны явно. Из выражений (2.9)–(2.11) имеем (см. также, например, [6]) при  $\beta \gg 1$

$$\frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_s^2\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{M_s^2} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{s0}^2\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{M_{s0}^2} s^2,$$

при  $\beta \ll 1$

$$\frac{(M_a^2 + 2)^3}{M_a^2} = \frac{(M_{a0}^2 + 2)^3}{M_{a0}^2} (f/r)^2,$$

при  $\gamma = 2$

$$\frac{(M^2 + 2)^3}{M^2} = \frac{(M_0^2 + 2)^3}{M_0^2} \left[ \frac{(1 + \beta_0) s}{r^2 + \beta_0} \right]^2.$$

Напомним, что единицами измерения величин  $f, r, s$  являются их входные значения. В этих частных случаях положение критического сечения известно, и поэтому уравнения для предельных входных значений  $M_{s0}, M_{a0}, M_0$  имеют вид

$$(3.8) \quad \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{s0}^2\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{M_{s0}^2} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \frac{1}{s_*^2}, \quad s_* = \min_z s;$$

$$(3.9) \quad \frac{(M_{a0}^2 + 2)^3}{M_{a0}^2} = \frac{27}{(f_*/r_*)^2}, \quad \frac{f_*}{r_*} = \min_z \frac{f}{r};$$

$$(3.10) \quad \frac{(M_0^2 + 2)^3}{M_0^2} = 27 \left[ \frac{\beta_0 + r_*^2}{s_* (\beta_0 + 1)} \right]^2.$$

\* При  $r = \text{const}$ , согласно (3.3),  $\rho_m^-$ , а следовательно,  $M_0^-$  и  $M_0^+$  одинаковы во всех сечениях. Для нахождения предельных значений  $M_0$  достаточно решить уравнение  $\Phi(\rho_m) = 0$  в известном критическом сечении  $s_{\min}$ .

В последней формуле  $r_*$  и  $s_*$  удовлетворяют (2.3). Легко убедиться, что каждое из этих уравнений имеет два корня, ограничивающих интервалы запрещенных значений  $M_{s_0}$ ,  $M_{a_0}^2$ ,  $M_0$ , причем интервалы содержат единицу. Если указанные входные параметры принимают свои предельные значения, то скорость в критическом сечении достигает величины местной скорости сигнала. Поэтому равенства (3.8)—(3.10) есть необходимые условия транссигнального перехода в каждом из рассмотренных частных случаев.

В заключение заметим, что входной параметр  $M_0$  можно выразить через «интегральные» (для данной узкой трубки) характеристики течения: массовый расход плазмы  $\dot{m} = \rho_0 v_0 s_0$ , полный ток, протекающий в трубке,  $I = H_0 c r_0 / 2$  и разность потенциалов между траекториями, ограничивающими трубку,  $U = H_0 v_0 f_0 / c$ . Используя эти величины, находим

$$(3.11) \quad M_0^2 = \frac{c^4 r_0^2}{4 f_0^2} \frac{\dot{m} U}{I^3 (1 + \gamma \beta_0 / 2)}.$$

Таким образом, при фиксированном  $\beta_0$  условие транссигнального перехода, определяющее  $M_0$  в зависимости от  $\beta_0$  и геометрии трубки, есть условие для комбинации интегральных величин  $Q = \dot{m} U / I^3$ . Рассмотрим, в частности, случай  $\gamma = 2$ . Согласно (3.10), при  $r = \text{const}$  зависимость предельного значения  $M_0$  от  $\beta_0$  исчезает, и предельное значение  $Q_m$  есть линейная функция  $\beta_0$ . Если изменением  $r$  пренебречь нельзя, то при  $f_* \ll 1$  из (3.10) получим приближенные формулы

$$M_0^2 = \frac{8}{27} \left[ \frac{s_* (1 + \beta_0)}{r_*^2 + \beta_0} \right]^2, \quad M_0^2 = 3 \sqrt{3} \frac{\beta_0 + r_*^2}{s_* (\beta_0 + 1)},$$

первая из которых относится к досигнальному на входе течению, вторая — к сверхсигнальному. Подставляя их в (3.11), находим соответственно

$$Q_m^- = \frac{32 f_0^2}{27 c^4 r_0^2} \frac{s_*^2 (1 + \beta_0)^3}{(r_*^2 + \beta_0)^2}, \quad Q_m^+ = \frac{12 \sqrt{3} f_0^2}{c^4 r_0^2} \frac{\beta_0 + r_*^2}{s_*}.$$

Здесь  $s_*$  и  $r_*$  — по-прежнему безразмерные величины. Пусть они не зависят от  $\beta_0$ . Тогда  $Q_m^+(\beta_0)$  — линейная функция;  $Q_m^-(\beta_0)$  является возрастающей, если  $r_*^2 > 2/3$ , и имеет минимум при  $\beta_0 = 2/3 - r_*^2$ , если  $r_*^2 < 2/3$ .

Автор выражает благодарность К. В. Брушлинскому, прочитавшему рукопись и сделавшему немало полезных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1974.— Вып. 8.
2. Ватажин А. Б., Любимов А. Г., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах.— М.: Наука, 1970.
3. Морозов А. И., Соловьев Л. С. О симметричных течениях проводящей жидкости поперек магнитного поля // ДАН СССР.— 1964.— Т. 154, № 2.
4. Горшенин К. П. Стационарные двумерные течения плазмы с заданным расходом в канале плазменного ускорителя.— М., 1989.— (Препр./АН СССР, Ин-т прикл. математики; № 37).
5. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1974.— Вып. 8.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1973.

г. Москва

Поступила 19/VI 1990 г.