

УДК 533.9

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ: ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

А. Е. Дубинов

Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607188 Саров
E-mail: dubinov@rol.ru

Получено точное решение задачи о структуре ионно-звуковой волны в плазме. При этом оба компонента плазмы рассматриваются как газы с заданными начальными температурами и показателями адиабаты. Система уравнений, описывающих профиль волны, решена с помощью оригинального метода, состоящего в сведении ее к уравнению Бернулли. Приведен численный пример полученного общего решения задачи о профиле волны при произвольных параметрах. Построены кривые, ограничивающие в пространстве параметров область существования стационарной уединенной ионно-звуковой волны.

Ключевые слова: плазма, ионно-звуковая волна, нелинейная теория.

Введение. Распространение ионно-звуковых волн, являющееся одним из основных волновых процессов в плазме, изучается на протяжении нескольких десятилетий. Нелинейная теория этих волн впервые рассмотрена в работах [1, 2], в которых методом механической аналогии (в иностранной литературе — методом псевдопотенциала) изучены их основные особенности. Установлено, что стационарные волны могут существовать в виде периодической или уединенной волны, причем скорость волны ограничена сверху значением, приблизительно в 1,58 раза превышающим скорость линейного ионного звука. В работе [3] найдено точное выражение для предельной скорости. При этом в [1–3] считалось, что ионный компонент плазмы холодный, а электронный — изотермичен и безынерционен.

В дальнейшем нелинейная теория была развита в многочисленных работах, в которых учитывались влияние ионной температуры, наличие двух и более сортов ионов, в том числе отрицательных, наличие двух групп электронов с различной температурой, инерция электронов и т. п. (подробнее об этом см. [4]).

В перечисленных и большинстве других работ считалось, что нагретые компоненты плазмы вовлекаются волной в изотермический процесс, т. е. их температура постоянна. Такое упрощение оставляет открытым вопрос о внешнем источнике или стоке тепловой энергии, поскольку изотермический процесс обязательно сопровождается поступлением энергии при сжатии потока плазмы и выделением энергии при его разрежении.

Таким образом, при описании нелинейных волн в плазме более реалистичными являются модели, в которых процесс считается адиабатическим. Такой подход позволяет учесть изменение температуры в различных фазах волны, а также влияние этого изменения на формирование и свойства самой волны.

В последнее время газодинамический подход используется для изучения ионно-звуковых и пылезвуковых волн [5–8]. В работах [5–8] проведен анализ нелинейных уравнений, описывающих структуру волн, в рамках адиабатического подхода, когда ионный или пылевой компонент плазмы представляет собой газ. При этом уравнение состояния газа принимается в виде адиабаты с произвольным показателем γ_+ в диапазоне $\gamma_+ \in [1; 3]$.

В результате анализа определены границы режимов и предельные скорости волны. Однако в [5–8] не было получено общее точное решение задачи о профиле волн (как известно, анализ свойств решения можно проводить, не решая сами уравнения), хотя в работе [5] приведено точное решение для частного случая холодных ионов с показателем адиабаты электронного компонента $\gamma_- = 2$.

В данной работе впервые приводится точное решение задачи о структуре ионно-звуковой волны в плазме в рамках газодинамического подхода для любых значений γ_{\pm} в диапазоне $\gamma_{\pm} \in [1; 3]$.

1. Исходные уравнения и обозначения. Будем считать, что плазма является безграничной, бесстолкновительной, однородной и содержит только электроны и однозарядные ионы. Параметры электронного компонента невозмущенной плазмы обозначим следующим образом: m_- — масса частиц (в дальнейшем полагается, что электроны безынерционны, т. е. $m_- \rightarrow 0$), $e < 0$ — заряд частиц, T_{0-} — температура, γ_- — показатель адиабаты, P_- — давление; параметры ионного компонента: m_+ — масса частиц, $-e > 0$ — заряд частиц, T_{0+} — температура, γ_+ — показатель адиабаты, P_+ — давление, v_+ — скорость. В силу условия квазинейтральности концентрации частиц обоих знаков заряда в невозмущенной плазме $n_{0\pm} = n_0$. Возмущенные в волне параметры будем записывать без индекса 0.

Запишем одномерные уравнения, определяющие динамику ионного компонента плазмы:

— уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial (n_+ v_+)}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

— уравнение движения

$$m_+ \left(\frac{\partial v_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial x} \right) = e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_+} \frac{\partial P_+}{\partial x}; \quad (2)$$

— уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_+ - n_-) \quad (3)$$

(φ — электростатический потенциал).

Систему уравнений (1)–(3) дополним уравнением состояния ионного газа, описывающим адиабатический процесс:

$$P_+ = k T_{0+} n_0 (n_+/n_0)^{\gamma_+} \quad (4)$$

(k — постоянная Больцмана). В уравнении Пуассона (3) необходимо учесть вклад электронного компонента, который аналогично (4) будем описывать в рамках предположения об адиабатичности процесса. Тогда, записав уравнение динамики электронного газа в виде (2), где масса электронов стремится к нулю вследствие их безынерционности, можно вывести уравнение, связывающее концентрацию электронов с электростатическим потенциалом. В результате получим (см. [9])

$$n_- = n_0 \left(1 - \frac{\gamma_- - 1}{\gamma_-} \frac{e\varphi}{kT_{0-}} \right)^{1/(\gamma_- - 1)}. \quad (5)$$

Легко убедиться, что при $\gamma_- \rightarrow 1$ уравнение (5) переходит в экспоненциальное распределение Больцмана.

Введем следующие обозначения: λ_D — дебаевская длина, ω_+ — ионная плазменная частота, v_s — линейная скорость ионного звука:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\gamma_- k T_{0-}}{4\pi n_0 e^2}}, \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_+}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\gamma_- k T_{0-}}{m_+}}.$$

Для уравнений (1)–(5) удобно также ввести следующие нормировки:

$$n_{\pm} = n_0 n'_{\pm}, \quad T_{\pm} = T_0 - T'_{\pm}, \quad \varphi = (\gamma_- k T_0 - / e) \varphi', \quad v_{\pm} = v_s v'_{\pm}, \quad x = \lambda_D x', \quad t = \omega_+^{-1} t'.$$

Следует отметить, что размерный потенциал φ и безразмерный потенциал φ' имеют разные знаки, так как $e < 0$. В дальнейшем штрихи у безразмерных величин опускаются.

Таким образом, систему уравнений (1)–(3) с использованием уравнений состояния (4), (5) можно записать в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_+}{\partial t} + \frac{\partial (n_+ v_+)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_+}{\partial t} + v_+ \frac{\partial v_+}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\tau}{\gamma_+ - 1} \frac{\partial}{\partial x} (n_+^{\gamma_+ - 1}), \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= n_+ - [1 - (\gamma_- - 1) \varphi]^{1/(\gamma_- - 1)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tau = \gamma_+ T_{0+} / (\gamma_- T_{0-})$.

2. Стационарное решение уравнений. Рассмотрим стационарную ионно-звуковую волну, распространяющуюся в направлении x с безразмерной скоростью M (M — число Маха). Для этого введем автомодельную переменную

$$\xi = x - Mt, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -M \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}.$$

Это означает переход из лабораторной системы отсчета в новую систему, движущуюся вместе с волной. В результате система уравнений в частных производных (6) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -M \frac{dn_+}{d\xi} + \frac{d(n_+ v_+)}{d\xi} &= 0, \\ -M \frac{dv_+}{d\xi} + v_+ \frac{dv_+}{d\xi} &= \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{\tau}{\gamma_+ - 1} \frac{d}{d\xi} (n_+^{\gamma_+ - 1}); \\ \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} &= n_+ - [1 - (\gamma_- - 1) \varphi]^{1/(\gamma_- - 1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$(8)$$

Прежде чем перейти к решению данной системы, рассмотрим известные методы решения подобных систем. Наиболее часто используется метод псевдопотенциала [1, 2], который заключается в интегрировании уравнений непрерывности и движения, получении из интегралов зависимостей концентрации и скорости ионов от потенциала и подстановке этих зависимостей в уравнение Пуассона. В результате получается автономное дифференциальное уравнение второго порядка для потенциала, которое имеет вид уравнения движения некоторого осциллятора в одномерном псевдопотенциале, причем электростатический потенциал используется в качестве псевдокоординаты, а координата — в качестве псевдовремени. Другой метод разработан в [10] и состоит в исключении из системы уравнений концентрации ионов и потенциала и сведения ее к уравнению второго порядка относительно скорости ионов. Решение и анализ этого уравнения также проводятся методом псевдопотенциала, однако в качестве псевдокоординаты используется скорость ионов. Существует также метод, описанный в работах [11, 12], в соответствии с которым из уравнений исключаются потенциал и концентрация ионов, при этом система сводится к уравнению третьего порядка относительно скорости. Полученное уравнение исследуют с помощью фазового портрета. Авторам данной работы не удалось использовать перечисленные методы для решения уравнений (7), (8).

Однако данные уравнения можно решить методом, разработанным для решения задачи о структуре продольных волн пространственного заряда в нейтрализованном электронном пучке [13]. Метод состоит в исключении из системы уравнений потенциала и скорости ионов и сведении ее к автономному уравнению второго порядка для концентрации ионов, которое, в свою очередь, легко приводится к известному дифференциальному уравнению Бернулли.

Итак, проинтегрировав уравнение непрерывности с условием $\lim_{v_+ \rightarrow 0} n_+ = 1$, получим

$$n_+ = M/(M - v_+). \quad (9)$$

Следует отметить, что в системе отсчета, связанной с волной, невозмущенная плазма движется со скоростью $-M$ в противоположном направлении. Поэтому на первый взгляд в данном случае более уместно использовать условие $\lim_{v_+ \rightarrow -M} n_+ = 1$ (см., например, [14, п. 8.2.3]). Однако для невозмущенной плазмы, неподвижной в лабораторной системе отсчета, правильнее использовать условие $\lim_{v_+ \rightarrow 0} n_+ = 1$ (см. [1–3]), так как при переходе в новую систему отсчета граница, на которой задается это условие, также движется со скоростью $-M$. Иными словами, невозмущенная плазма не пересекает эту границу.

Разрешим (9) относительно v_+ :

$$v_+ = M(1 - 1/n_+). \quad (10)$$

Интегрируя уравнение движения с условиями $\lim_{v_+ \rightarrow 0} n_+ = 1$ и $\lim_{v_+ \rightarrow 0} \varphi = 0$, имеем

$$-Mv_+ + \frac{v_+^2}{2} = \varphi + \frac{\tau}{\gamma_+ - 1} (1 - n_+^{\gamma_+ - 1}). \quad (11)$$

Подставив (10) в (11) и разрешив полученное уравнение относительно потенциала φ , получим

$$\varphi = \frac{\tau}{\gamma_+ - 1} (n_+^{\gamma_+ - 1} - 1) + \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{n_+^2} - 1 \right). \quad (12)$$

Заметим, что аналитически разрешить (12) относительно концентрации n_+ при произвольном показателе адиабаты γ_+ не представляется возможным, что объясняет невозможность применения рассмотренных выше методов.

График зависимости $\varphi(n_+)$ (12) имеет вид кривой с минимумом. Кроме того, уравнение (12) обязательно должно иметь корень $n_+ = 1$. Это условие совместно с выражением (5) обеспечивает выполнение условия квазинейтральности невозмущенной плазмы. Типичные зависимости $\varphi(n_+)$ представлены на рис. 1. В случае, представленном на рис. 1,а, через точку квазинейтральности проходит правая ветвь, в случае, представленном на рис. 1,б, — левая ветвь. Ветви, пересекающие ось абсцисс в других точках, нефизичны (штриховые линии на рис. 1).

Для определения положения минимума зависимости $\varphi(n_+)$ найдем ее производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d\varphi}{dn_+} = -\frac{M^2 - \tau n_+^{\gamma_+ + 1}}{n_+^3} = 0. \quad (13)$$

В результате получим

$$n_{+, \max} = (M^2/\tau)^{1/(\gamma_+ + 1)}; \quad (14)$$

$$\varphi_{\min} = \frac{\tau}{\gamma_+ - 1} \left[\left(\frac{M^2}{\tau} \right)^{(\gamma_+ - 1)/(\gamma_+ + 1)} - 1 \right] + \frac{M^2}{2} \left[\left(\frac{M^2}{\tau} \right)^{-2/(\gamma_+ + 1)} - 1 \right].$$

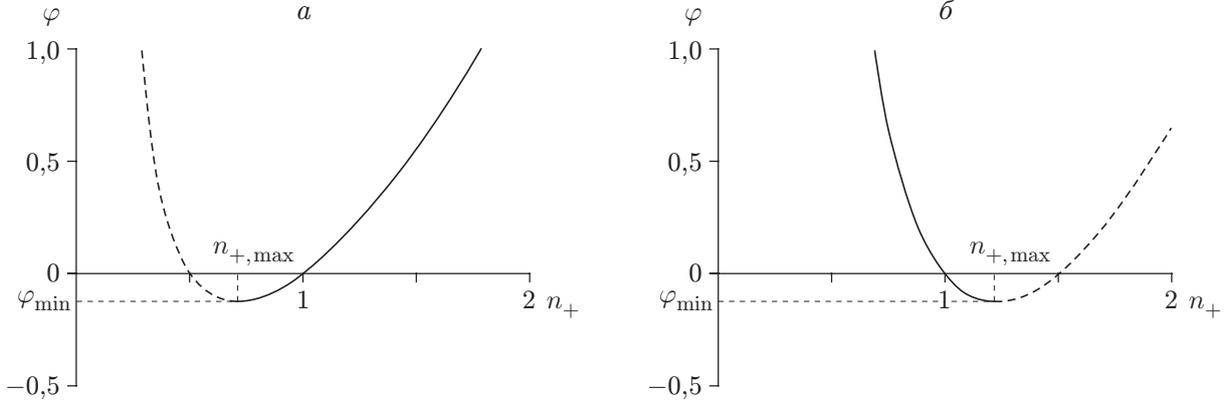


Рис. 1. Зависимость $\varphi(n_+)$ (12) при $\tau = 1$, $\gamma_+ = 3$:
 а — $M = 0,5$; б — $M = 1,5$; штриховые линии — ветви кривых, не имеющие физического смысла

Следует отметить, что в (14) для концентрации ионов использован индекс *max*, так как в тех случаях, когда безразмерный электростатический потенциал имеет минимум, плотность ионов максимальна (см. ниже).

Из (14) следует, что при $M < \sqrt{\tau}$ в зависимости $\varphi(n_+)$ физический смысл имеет только правая ветвь (см. рис. 1, а), при $M > \sqrt{\tau}$ — только левая ветвь (см. рис. 1, б).

В дальнейшем потребуется также вторая производная от (12):

$$\frac{d^2\varphi}{dn_+^2} = \frac{3M^2 + (\gamma_+ - 2)\tau n_+^{\gamma_++1}}{n_+^4}. \quad (15)$$

Рассмотрим уравнение Пуассона (8). С использованием правила дифференцирования сложной функции

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{d\varphi}{dn_+} \frac{d^2n_+}{d\xi^2} + \frac{d^2\varphi}{dn_+^2} \left(\frac{dn_+}{d\xi} \right)^2,$$

а также выражений (12), (13) и (15) уравнение Пуассона (8) сводится к автономному дифференциальному уравнению второго порядка относительно $n_+(\xi)$:

$$\begin{aligned} -\frac{M^2 - \tau n_+^{\gamma_++1}}{n_+^3} \frac{d^2n_+}{d\xi^2} + \frac{3M^2 + (\gamma_+ - 2)\tau n_+^{\gamma_++1}}{n_+^4} \left(\frac{dn_+}{d\xi} \right)^2 = \\ = n_+ - \left\{ 1 - (\gamma_- - 1) \left[\frac{\tau}{\gamma_+ - 1} (n_+^{\gamma_+-1} - 1) + \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{n_+^2} - 1 \right) \right] \right\}^{1/(\gamma_- - 1)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Порядок уравнения можно понизить, выполнив замену $p(n_+) = dn_+/d\xi$. В итоге получим дифференциальное уравнение Бернулли [15, п. 1.1.5]

$$\frac{dp}{dn_+} = f_1(n_+)p + f_N(n_+)p^N \quad (17)$$

с компонентами

$$N = -1, \quad f_1(n_+) = \frac{1}{n_+} \frac{3M^2 + (\gamma_+ - 2)\tau n_+^{\gamma_++1}}{M^2 - \tau n_+^{\gamma_++1}}, \quad (18)$$

$$f_{-1}(n_+) = -\frac{n_+^4 - n_+^3 \{ 1 - (\gamma_- - 1) [\tau (n_+^{\gamma_+-1} - 1) / (\gamma_+ - 1) + M^2 (1/n_+^2 - 1) / 2] \}^{1/(\gamma_- - 1)}}{M^2 - \tau n_+^{\gamma_++1}}.$$

Используя приведенное в [15] решение уравнения Бернулли, можно записать общее решение с постоянной интегрирования C_1 для уравнения (17) с компонентами (18):

$$p^2 = \frac{n_+^6}{(-M^2 + \tau n_+^{\gamma_+ + 1})^2} \left[C_1 + 2 \int \frac{-M^2 + \tau n_+^{\gamma_+ + 1}}{n_+^3} \times \right. \\ \left. \times \left(n_+ - \left\{ 1 - (\gamma_- - 1) \left[\frac{\tau}{\gamma_+ - 1} (n_+^{\gamma_+ - 1} - 1) + \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{n_+^2} - 1 \right) \right] \right\}^{1/(\gamma_- - 1)} \right) dn_+ \right]. \quad (19)$$

Из интеграла уравнения Бернулли (19) можно получить точное выражение для $n_+(\xi)$ в неявном виде с постоянной интегрирования C_2 :

$$\xi + C_2 = \int p(n_+) dn_+. \quad (20)$$

Совместно с (19) это выражение является точным решением задачи о профиле нелинейной ионно-звуковой волны.

3. Численный пример. Полученное точное решение задачи о профиле нелинейной ионно-звуковой волны (19), (20) является очень громоздким. Поэтому данное решение необходимо дополнить численным примером, позволяющим исследовать особенности волны в случае учета адиабатического изменения температуры в волне.

На рис. 2 показаны расчетные профили физических параметров в ионно-звуковой волне для двух частных случаев дозвуковой периодической и сверхзвуковой уединенной волн. Профили определялись следующим образом: сначала определялся профиль ионной концентрации $n_+(\xi)$ как решение исходного уравнения (16), затем профиль электростатического потенциала $\varphi(\xi)$ по формуле (12), профиль электронной концентрации $n_-(\xi)$ по безразмерной формуле (5), профиль разности $n_+(\xi) - n_-(\xi)$, пропорциональной величине пространственного заряда в волне, и, наконец, профили температур $T_{\pm}(\xi)$ по безразмерным формулам $T_+ = \tau(\gamma_-/\gamma_+)n_+^{\gamma_+ - 1}$ и $T_- = n_-^{\gamma_- - 1}$.

На рис. 2, а видно, что в данном примере профиль волны не является гармоническим, а амплитуда колебаний ионной концентрации и электронной температуры значительно больше амплитуды колебаний электронной концентрации и ионной температуры соответственно. Такое же соотношение амплитуд для уединенной волны наблюдается на рис. 2, б.

4. Режим с уединенной волной. Одним из главных вопросов теории ионного звука является вопрос о возможности существования режима уединенной волны (ионно-звукового солитона). Вид уравнения (16), сводящегося к уравнению Бернулли с параметром $N = -1$ (см. (18)), позволяет достаточно легко определить границу режима распространения уединенной волны, на которой происходит ее опрокидывание. Действительно, решение уравнения Бернулли (19) имеет вид закона сохранения энергии некоторого псевдоосциллятора во внешнем поле, при этом правая часть (19) может играть роль псевдопотенциала $U(n_+)$ с псевдокоординатой n_+ . Произвольная постоянная C_1 может быть выбрана таким образом, чтобы выполнялось условие $U(1) = 0$. В результате получаем

$$U(n_+) = \frac{2n_+^6}{(-M^2 + \tau n_+^{\gamma_+ + 1})^2} \int_1^{n_+} \frac{-M^2 + \tau n_+^{\gamma_+ + 1}}{n_+^3} \times \\ \times \left(n_+ - \left\{ 1 - (\gamma_- - 1) \left[\frac{\tau}{\gamma_+ - 1} (n_+^{\gamma_+ - 1} - 1) + \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{n_+^2} - 1 \right) \right] \right\}^{1/(\gamma_- - 1)} \right) dn_+.$$

Тогда уравнение границы опрокидывания уединенной волны $M = M_{cr}$ имеет вид

$$U(n_{+,max}) > 0. \quad (21)$$

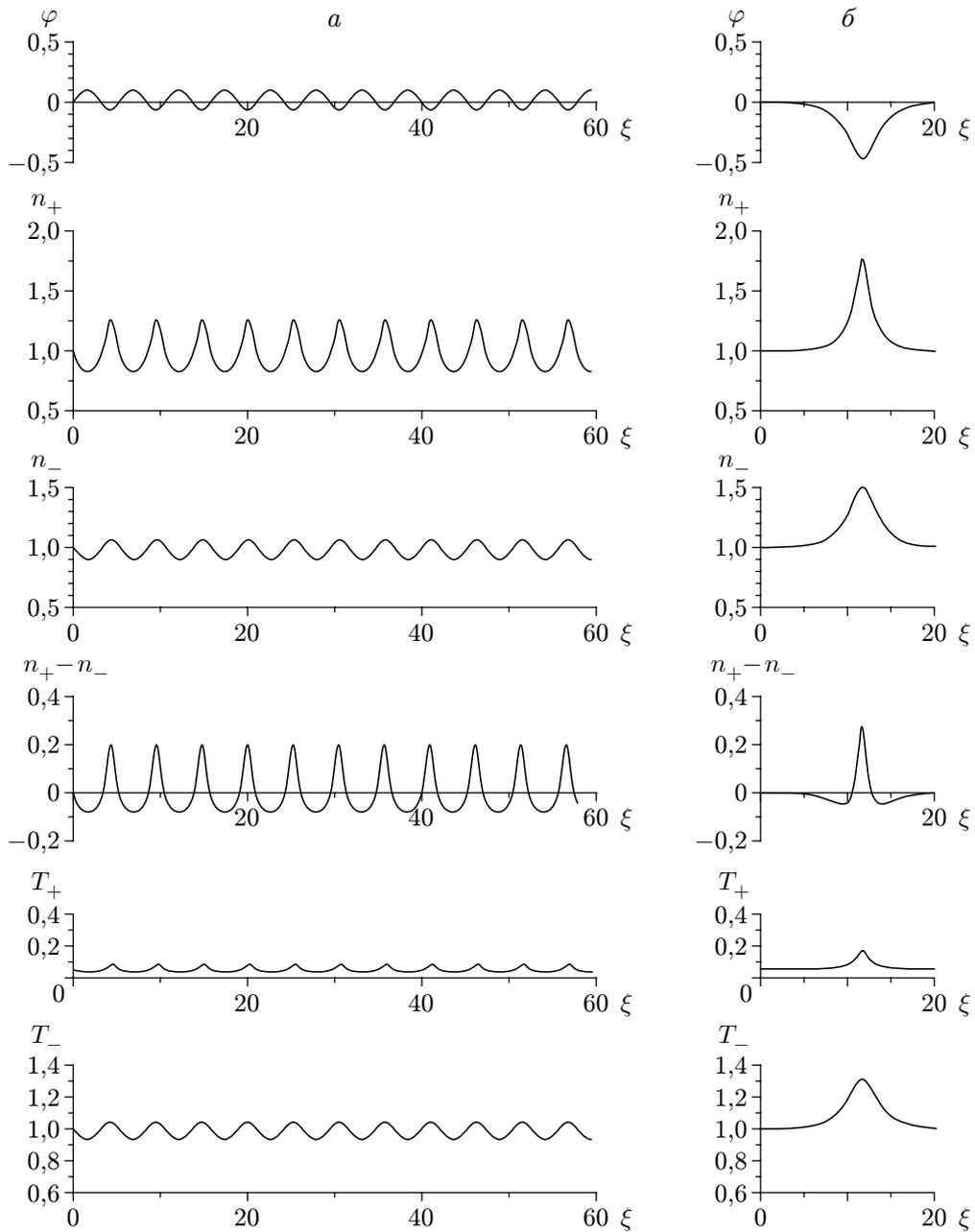


Рис. 2. Параметры в ионно-звуковой волне ($\gamma_- = 3, \gamma_+ = 5/3, \tau = 0,1$):
 а — дозвуковая периодическая волна ($M = 0,7$); б — сверхзвуковая периодическая волна ($M = 1,3$)

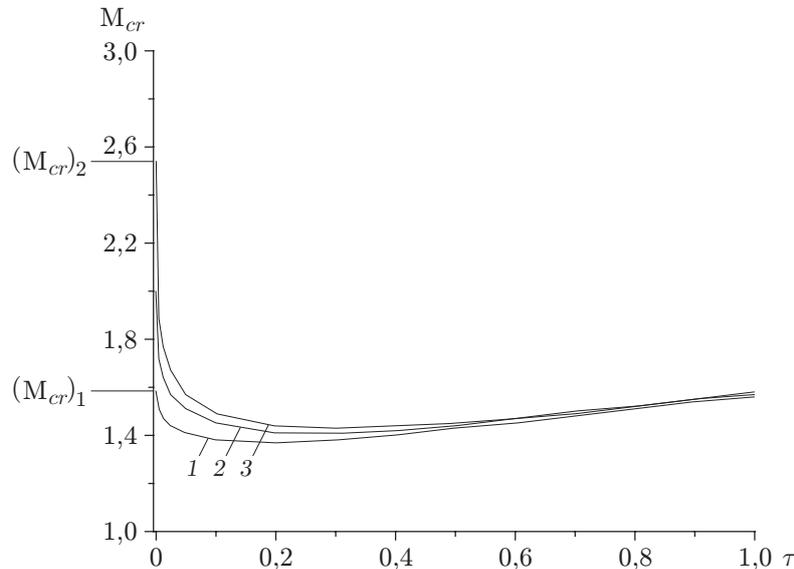


Рис. 3. Зависимость критического числа Маха опрокидывания уединенной волны от величины τ при различных значениях показателей адиабаты электронного и ионного компонентов газа γ_{\pm} :

1 — $\gamma_{\pm} = 1$; 2 — $\gamma_{\pm} = 2$; 3 — $\gamma_{\pm} = 3$; $(M_{cr})_1 = 1,58$ [1–3]; $(M_{cr})_2 = 2,54$ [5]

Это означает, что крайняя точка кривой псевдопотенциала $U(n_+)$ расположена не ниже локального максимума $U(1)$. Найти M_{cr} из условия (21) можно только численно.

На рис. 3 показана зависимость критического числа Маха опрокидывания уединенной волны от величины τ при различных значениях показателей адиабаты электронного и ионного компонентов газа γ_{\pm} (рассмотрен случай $\gamma_+ = \gamma_-$). Оказалось, что эти зависимости имеют минимум при $\tau \approx 0,2$.

Следует отметить, что при больших значениях показателей γ_{\pm} критические значения числа Маха большие ($M_{cr} \geq 2$), в то время как при $\gamma_{\pm} = 1$ и $\tau = 0$ (электроны изотермичны, а ионы холодные) $M_{cr} = 1,58$ [1–3]. При $\gamma_{\pm} = 3$ и $\tau \rightarrow 0$ (электроны адиабатичны, а ионы холодные) M_{cr} стремится к точному значению $\sqrt{3(\sqrt{4/3} + 1)} \approx 2,54$, найденному в [5].

В заключение отметим, что данная работа дополняет работу [5], в которой проведен качественный анализ аналогичной системы без получения точного решения. Таким образом, завершено построение теории ионного звука в плазме в рамках газодинамического подхода, начатое в работе [5].

Автор выражает благодарность Ю. Б. Кудасову и М. А. Сазонкину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ведынов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы // Ядер. синтез. 1961. Т. 1. С. 82–100.
2. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20–187.
3. Dubinov A. E., Dubinova I. D. How can one solve exactly some problems in plasma theory // J. Plasma Phys. 2005. V. 71, N 5. P. 715–728.

4. **Дубинова И. Д.** Теория нелинейных ионно-звуковых волн в плазме с учетом инерции электронов // *Вопр. атом. науки и техники. Сер. Теорет. и прикл. физика.* 2005. № 3. С. 18–23.
5. **McKenzie J. F.** The ion-acoustic soliton: a gas-dynamic viewpoint // *Phys. Plasma.* 2002. V. 9, N 3. P. 800–805.
6. **McKenzie J. F., Verheest F., Doyle T. B., Hellberg M. A.** Compressive and rarefactive ion-acoustic solitons in bi-ion plasmas // *Phys. Plasma.* 2004. V. 11, N 5. P. 1762–1769.
7. **McKenzie J. F., Doyle T. B., Hellberg M. A., Verheest F.** Compressive and rarefactive ion-acoustic solitons in a two component electron plasma // *J. Plasma Phys.* 2005. V. 71, N 2. P. 163–176.
8. **Maitra S., Roychoudhury R.** Gas dynamical approach to study dust acoustic solitary waves // *Phys. Plasma.* 2005. V. 12, N 6. P. 064502-1–064502-4.
9. **Sack Ch., Schamel H.** Evolution of a plasma expanding into vacuum // *Plasma Phys. Control. Fusion.* 1985. V. 27, N 7. P. 717–749.
10. **Johnston C. R., Epstein M.** On the exact amplitude, speed and shape of ion-acoustic waves // *Phys. Plasma.* 2000. V. 7, N 3. P. 906–910.
11. **Иванов М. Я.** К анализу ионных солитонов в плазме без магнитного поля // *Физика плазмы.* 1982. Т. 8, № 2. С. 384–389.
12. **Иванов М. Я.** Об одном классе солитонных решений гидродинамических уравнений движения ионов в однородной плазме при отсутствии внешних полей // *Физика плазмы.* 1982. Т. 8, № 3. С. 607–612.
13. **Дубинов А. Е.** Теория нелинейных волн пространственного заряда в нейтрализованных электронных потоках: газодинамический подход // *Физика плазмы.* 2007. Т. 33, № 3. С. 239–246.
14. **Ахиезер А. И.** Электродинамика плазмы / А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др. М.: Наука, 1974.
15. **Зайцев В. Ф.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. М.: Наука. Физматлит, 2001.

Поступила в редакцию 17/X 2006 г.
