

наличии пластического податливого основания уровень давления на линии контакта сред несколько снижается, т. е. в последнем случае отраженная волна является упругой волной разгрузки сильного разрыва, ибо на ее поверхности происходит скачкообразное уменьшение величины давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капустянский С. М. Распространение и отражение двумерных пластических волн // Изв. АН СССР. МТТ.— 1973.— № 1.
2. Айдозов А., Мамадалиев Н., Хакимов У. О воздействии подвижной нагрузки на нелинейно-сжимаемую полосу с жестким основанием // ПМТФ.— 1986.— № 3.
3. Рахматулин Х. А., Сагомоян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов.— М.: Изд-во МГУ, 1964.
4. Атабаев К. О воздействии подвижной нагрузки на полуплоскость // Докл. АН УзССР.— 1979.— № 9.
5. Рахматулин Х. А., Саатов Я. У., Сабодаш П. Ф., Филипов И. Г. Двумерные задачи по неустановившемуся движению сжимаемых сред.— Ташкент: Фан, 1969.

г. Андижан

Поступила 12/VII 1988 г.,
в окончательном варианте — 9/I 1989 г.

УДК 539.3

В. М. Александров, И. В. Воротынцева

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Рассматриваются осесимметричные контактные задачи для полупространства и слоя конечной толщины h , лежащего без трения на недеформируемом основании, предварительно напряженных однородными усилиями интенсивности p , приложенными на бесконечности. Предполагается, что материал деформируемых тел описывается уравнениями физически нелинейной теории упругости. Начальное напряженно-деформируемое состояние тел (режим преднапряжения) определяется как точное решение этих уравнений. Действие нагрузки на поверхность слоя (полупространства) рассматривается как малое возмущение основного нелинейного поля напряжений, вызванного предварительным нагружением. Это позволяет произвести линеаризацию всех уравнений относительно дополнительных напряжений, деформаций и перемещений. Для полученных линейных уравнений ставятся контактные задачи о вдавливании жесткого штампа в физически нелинейную среду, которые сводятся затем к интегральным уравнениям первого рода с симметричным нерегулярным ядром относительно функции распределения контактных давлений. Решения этих уравнений строятся с помощью асимптотических методов. Исследуются случаи потери устойчивости и деформируемости среды в результате преднапряжения. Изучается влияние режима преднапряжения на величину контактных давлений.

© 1990 Александров В. М., Воротынцева И. В.

1. Разрешающие уравнения физически нелинейной (геометрически линейной) теории упругости для случая осевой симметрии и при условии отсутствия массовых сил можно записать в следующем виде [1]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} - \frac{\tau_{rz}}{r} = 0;$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \psi \sigma_r + (\varphi - \psi) \sigma, \quad \varepsilon_\varphi = \psi \sigma_\varphi + (\varphi - \psi) \sigma, \\ \varepsilon_z &= \psi \sigma_z + (\varphi - \psi) \sigma, \quad \varepsilon_{rz} = \psi \tau_{rz}, \quad \varepsilon = \varphi \sigma, \quad \gamma = 2\psi \tau, \\ \sigma &= (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)/3, \quad \varepsilon = (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_r + \varepsilon_z)/3, \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + 6\tau_{rz}^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} [(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{rz}^2 + \gamma_{\varphi z}^2)]^{1/2},$$

$$\varepsilon_r = \partial u / \partial r, \quad \varepsilon_\varphi = u/r, \quad \varepsilon_z = \partial w / \partial z,$$

$$\varepsilon_{rz} = (1/2)(\partial u / \partial z + \partial w / \partial r), \quad u = u(r, z), \quad w = w(r, z),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z}, \quad \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}{r}.$$

Здесь $(2\psi)^{-1}$ — приведенный модуль сдвига (обобщает понятие модуля сдвига G); φ^{-1} — приведенный модуль объемной деформации (обобщает понятие модуля всестороннего сжатия K); функции $\psi = \psi(|\sigma|, \tau)$ и $\varphi = \varphi(|\sigma|, \tau)$ непрерывны, монотонны, положительны и являются четными функциями своих аргументов.

Для всякого упругого материала существует функция шести компонентов напряжения $\Phi(\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \dots, \sigma_{\varphi z})$, обладающая свойствами

$$(1.3) \quad \varepsilon = (1/3) \partial \Phi / \partial \sigma, \quad \gamma = \partial \Phi / \partial \tau$$

и называемая удельной дополнительной работой деформации [2]. С учетом (1.2) и (1.3) имеем

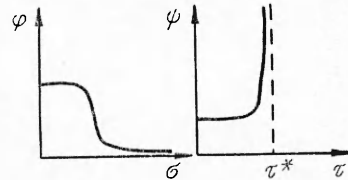
$$\varphi = (1/3\sigma) \partial \Phi / \partial \sigma, \quad \psi = (1/2\tau) \partial \Phi / \partial \tau.$$

Тогда условие существования потенциала можно записать как]

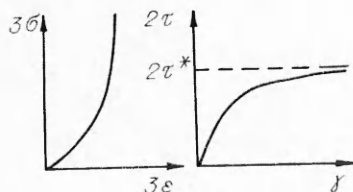
$$(1.4) \quad (\partial / \partial \tau)(3\sigma\varphi) = (\partial / \partial \sigma)(2\tau\psi).$$

Уравнения (1.1), (1.2) применимы для описания напряженно-деформированного состояния торфяных, глинистых, песчаных и мерзлых грунтов.

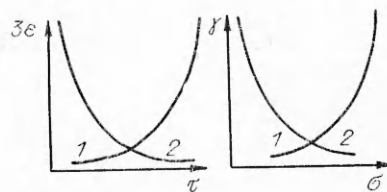
Известно, что для грунтов при гидростатическом сжатии объемный модуль $K = E(1 - 2\nu)^{-1}$ обычно увеличивается, стремясь к бесконечности, а при нарастании деформаций сдвига модуль G уменьшается, стремясь к нулю, причем $-\infty < \varphi'_\sigma \leq 0$, а $\infty > \psi'_\tau \geq 0$ (рис. 1, 2). Для грунтов присуще также свойство дилатансии — изменения объема при сдвиге. Грунты достаточно плотного сложения при сдвиге начинают увеличиваться в объеме (явление дилатансии), а грунты рыхлого сложения — уменьшаться



Р и с. 2



Р и с. 1



Р и с. 3

(явление контракции). Из условия существования потенциала (1.4) следует (рис. 3): $\psi'_\sigma \geq 0$ при дилатансии (кривая 1) и $\psi'_\sigma < 0$ при контракции (2) [2].

Рассмотрим вопрос о независимости функций φ и ψ и возможности обратимости соотношений $\varepsilon = \varphi\sigma$ и $\gamma = 2\psi\tau$, т. е. возможности их представления в виде, разрешенном относительно σ и τ : $\sigma = \eta(3\varepsilon, \gamma)\varepsilon$, $2\tau = \zeta(3\varepsilon, \gamma)\gamma$. Для этого необходимо, чтобы якобиан

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\sigma, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} & \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} & \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \end{vmatrix} = \varphi'_\sigma\psi'_\tau - \varphi'_\tau\psi'_\sigma \neq 0.$$

Выше показано, что φ'_σ и ψ'_τ имеют разные знаки, а φ'_τ и ψ'_σ — одинаковые, следовательно, якобиан отрицателен и не равен нулю.

Предположим, что в начальном состоянии среда находится в условиях однородного поля напряжений. Начальное напряженное состояние среды зададим как

$$\sigma_r^0 = \sigma_\varphi^0 = -p, \sigma_z^0 = \tau_{rz}^0 = 0, \sigma_z^0 = -\frac{2}{3}p, \tau^0 = \frac{p}{\sqrt{3}}.$$

Тогда начальные деформации в соответствии с (1.1), (1.2) имеют вид

$$\varepsilon_\varphi^0 = \varepsilon_r^0 = -\frac{\psi^0 + 2\varphi^0}{3}p, \varepsilon_z^0 = -\frac{2(\varphi^0 - \psi^0)}{3}p, \varepsilon_{rz}^0 = 0.$$

Далее положим

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r^*, \dots, \varepsilon_r = \varepsilon_r^0 + \varepsilon_r^*, \dots, u = u^0 + u^*, \dots, \\ \sigma = \sigma^0 + \sigma^*, \tau = \tau^0 + \tau^*, \psi = \psi^0 + \psi^*, \varphi = \varphi^0 + \varphi^*,$$

причем $\psi^* = \psi'_{|\sigma|}\sigma^* + \psi'_{|\tau|}\tau^*$, $\varphi^* = \varphi'_{|\sigma|}\sigma^* + \varphi'_{|\tau|}\tau^*$, где величины со звездочками — малые возмущения основного поля напряжений, деформаций и перемещений. Линеаризуем (1.1), (1.2) относительно этих возмущений:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \partial\sigma_r^*/\partial r + \partial\tau_{rz}^*/\partial z + (\sigma_r^* - \sigma_z^*)/r &= 0, \\ \partial\tau_{rz}^*/\partial r + \partial\sigma_z^*/\partial z + \tau_{rz}^*/r &= 0, \\ 3\varepsilon_r^* &= \psi^0[\Sigma_{1r}\sigma_r^* + \Sigma_{1\varphi}\sigma_\varphi^* + \Sigma_{1z}\sigma_z^*], \\ 3\varepsilon_\varphi^* &= \psi^0[\Sigma_{1\varphi}\sigma_r^* + \Sigma_{1r}\sigma_\varphi^* + \Sigma_{1z}\sigma_z^*], \\ 3\varepsilon_z^* &= \psi^0[\Sigma_{3r}(\sigma_r^* + \sigma_\varphi^*) + \Sigma_{3z}\sigma_z^*], \varepsilon_{rz}^* = \psi^0\tau_{rz}^*, \\ \Sigma_{1r} &= 2 + n + s, \Sigma_{1\varphi} = n - 1 + s, \Sigma_{1z} = n - 1 + r_1, \\ \Sigma_{3r} &= n - 1 + q_1, \Sigma_{3z} = n + 2 + t, s = s_1 + 2s_2, \\ r_1 &= s_3 + 2s_4, q_1 = 2(s_2 - s_1), t = 2(s_4 - s_3), \\ \sigma^* &= (1/2)(\sigma_r^* + \sigma_\varphi^* + \sigma_z^*), \\ \tau &= (1/2\sqrt{3})(2\sigma_z^* - \sigma_r^* - \sigma_\varphi^*), \\ \frac{\partial^2\varepsilon_r^*}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z^*}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial^2\varepsilon_{rz}^*}{\partial r\partial z}, \frac{\partial\varepsilon_\varphi^*}{\partial r} = \frac{\varepsilon_r^* - \varepsilon_\varphi^*}{r}, \\ \varepsilon_r^* &= \frac{\partial u^*}{\partial r}, \varepsilon_\varphi^* = \frac{u^*}{r}, \varepsilon_z^* = \frac{\partial w^*}{\partial z}, \varepsilon_{rz}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial r}\right); \\ (1.6) \quad n &= \varphi^0/\psi^0, s_1 = p\frac{\psi'_{|\sigma|}}{3\psi^0} - p\frac{\psi'_{|\tau|}}{2\sqrt{3}\psi^0}, s_2 = p\frac{\varphi'_{|\sigma|}}{3\psi^0} - p\frac{\psi'_{|\tau|}}{2\sqrt{3}\psi^0}, \\ s_3 &= p\frac{\psi'_{|\sigma|}}{3\psi^0} + p\frac{\psi'_{|\tau|}}{\sqrt{3}\psi^0}, s_4 = p\frac{\varphi'_{|\sigma|}}{3\psi^0} + p\frac{\psi'_{|\tau|}}{\sqrt{3}\psi^0}. \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные параметры n, s_1, s_2, s_3, s_4 , характеризующие механические свойства материала рассматриваемой среды и учитывающие режим преднапряжения.

Из (1.5) получим формулы для определения добавочных напряжений:

$$(1.7) \quad \sigma_r^* = (\psi^0 \Delta)^{-1} \left[\Sigma_1 \frac{\partial u^*}{\partial r} + \Sigma_2 \frac{u^*}{r} + \Sigma_3 \frac{\partial w^*}{\partial z} \right], \sigma_\varphi^* = (\psi^0 \Delta)^{-1} \times \\ \times \left[\Sigma_2 \frac{\partial u^*}{\partial r} + \Sigma_1 \frac{u^*}{r} + \Sigma_3 \frac{\partial w^*}{\partial z} \right], \\ \sigma_z^* = (\psi^0 \Delta)^{-1} \left[\Sigma_4 \left(\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{u^*}{r} \right) + \Sigma_5 \frac{\partial w^*}{\partial z} \right], \tau_{rz}^* = (2\psi^0)^{-1} \left[\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial r} \right], \\ \Delta = (n + 2 + t)(1 + 2n + 2s) - 2(n - 1 + r_1)(n - 1 + q_1), \\ \Sigma_1 = \Sigma_{1r} \Sigma_{3z} - \Sigma_{3r} \Sigma_{1z}, \Sigma_2 = \Sigma_{3r} \Sigma_{1z} - \Sigma_{1\varphi} \Sigma_{3z}, \\ \Sigma_3 = -3\Sigma_{1z}, \Sigma_4 = -3\Sigma_{3r}, \Sigma_5 = 3(\Sigma_{1r} + \Sigma_{1\varphi}).$$

Добавочные напряжения в форме (1.7) подставляем в уравнения равновесия из (1.5), в результате приходим к системе уравнений относительно добавочных перемещений среды:

$$(1.8) \quad \left[L_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + L_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u^* + L_3 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} w^* = 0, \\ L_4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u^* + \left[L_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + L_5 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] w^* = 0,$$

где $L_i = L_i(n, s_1, s_2, s_3, s_4)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — функции параметров преднапряжения (1.6), причем $L_1 = 2\Sigma_1$, $L_2 = \Delta$, $L_3 = \Delta + 2\Sigma_3$, $L_4 = \Delta + 2\Sigma_4$, $L_5 = 2\Sigma_5$.

Условия эллиптичности системы уравнений (1.8) имеют следующий вид: а) случай комплексно сопряженных корней определителя системы (1.8)

$$(1.9) \quad B^2 - 4AC < 0, \mu_1 = c + id, \mu_2 = \bar{\mu} = c - id, \\ \mu_3 = -\mu_1, \mu_4 = -\mu_2, \\ c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{B}{2A} + \left(\frac{C}{A} \right)^{1/2} \right]^{1/2}, d = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{B}{2A} + \left(\frac{C}{A} \right)^{1/2} \right]^{1/2};$$

б) случаи вещественных корней определителя системы (1.8)

$$B^2 \geq 4AC, A > 0, B < 0, C > 0; \\ B^2 \geq 4AC, A < 0, B > 0, C < 0; \\ \mu_1 = \left[\frac{-B + (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A} \right]^{1/2}, \mu_2 = \left[\frac{-B - (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A} \right]^{1/2}, \\ \mu_3 = -\mu_1, \mu_4 = -\mu_2 \\ (A = L_2 L_5, B = L_3 L_4 - L_1 L_5 - L_2^2, C = L_1 L_2).$$

В качестве примера выпишем условия эллиптичности для частного случая функций φ и ψ , а именно, когда $\psi = \psi(r)$, а $\varphi = \text{const}$. При этом $s_2 = s_4 = 0$, $n \neq 0$, $s_1 = s \neq 0$, $s_3 = -2s$, тогда система (1.8) эллиптическая, если

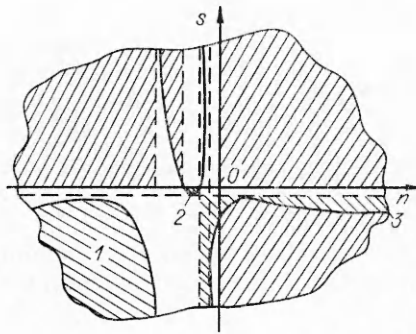
$$(1.10) \quad \text{а) } n < -2, \quad 0 < s < -(n + 2); \\ -2 < n < -0,5, \quad -(n + 2) < s < 0; \\ n > -0,5, \quad s < -(n + 2), \quad s > 0; \\ \text{б) } n < -2, \quad -0,5 < s < 0, \quad -(n + 2) < s < -(1 + 2n)/2;$$

$$\begin{aligned}
-2 \leq n < -1,5, \quad -0,5 < s < -(n+2), \quad 0 \leq s < -(1+2n)/2; \\
-1,5 \leq n \leq -0,75, \quad -0,666 \leq n < -0,5, \quad 0 < s < -(1+2n)/2; \\
n > 0, \quad -0,5 < s < 0; \\
n = -2, \quad -0,5 < s < -(1+2n)/2; \\
n \leq -1,5, \quad n > 0, \quad -(1+2n)/(2+3n) < s < -0,5; \\
-1,5 < n < -1, \quad -(1+2n)/(2+3n) < s \leq -(n+2); \\
-0,5 < n < 0, \quad -(1+2n)/2 < s < 0.
\end{aligned}$$

Критические значения величин n и s , как следует из (1.10), удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
s &= -(n+2), \quad n \leq -1,5, \quad n \geq 1; \\
s &= 0, \quad n < -2, \quad n \geq -1,5; \\
s &= -(1+2n)/2, \quad s = -(1+2n)/(2+3n), \\
s &= -0,5 \quad (-\infty < n < \infty).
\end{aligned}$$

На рис. 4 заштрихована область эллиптичности для рассматриваемого вида функций φ и ψ . С механической точки зрения случаи потери эллиптичности системой уравнений (1.8) можно трактовать как случаи



Р и с. 4

потери внутренней устойчивости среды в результате преднапряжения [3, 4].

2. Рассмотрим теперь контактную задачу для преднапряженного физически нелинейного слоя. Пусть слой, занимающий область $(-\infty < r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -h \leq z \leq 0)$ и изготовленный из материала, подчиняющегося соотношениям (1.2), лежит без трения на жестком основании. В границу слоя $z = 0$ силой P вдавливается круглый в плане жесткий штамп. Считаем, что силы трения в области контакта штампа и слоя малы и ими можно пренебречь, а радиус области контакта не

зависит от величины приложенной силы. Воздействие штампа на слой будем рассматривать как малое возмущение основного поля напряжений (1.2). Запишем граничные условия для сформулированной задачи:

$$\begin{aligned}
(2.1) \quad \tau_{rz}^*(r, -h) = 0, \quad w^*(r, -h) = 0, \quad \tau_{rz}^*(r, 0) = 0 \quad (r < \infty); \\
\sigma_z^*(r, 0) = 0 \quad (r > a); \quad w^*(r, 0) = -[\delta - f(r)] \quad (r \leq a).
\end{aligned}$$

К ним необходимо добавить требование затухания напряжений (добавочных по отношению к полю начальных напряжений) на бесконечности. Здесь δ — поступательное перемещение штампа вдоль оси z ; $f(r)$ — форма основания штампа.

Для того чтобы построить решение поставленной задачи, применим интегральное преобразование Ханкеля—Фурье по переменной r к уравнениям системы (1.8) в области ее эллиптичности (1.9), т. е. будем искать возмущения перемещений u^* и w^* в форме

$$(2.2) \quad u^*(r, z) = \int_0^\infty U(\alpha, z) \alpha J_1(\alpha r) d\alpha, \quad w^*(r, z) = \int_0^\infty W(\alpha, z) \alpha J_0(\alpha r) d\alpha.$$

При этом (1.8) для трансформант Ханкеля—Фурье U и W примет вид

$$\begin{aligned}
(2.3) \quad L_2 U''(\alpha, z) - \alpha^2 L_1 U(\alpha, z) - \alpha L_3 W'(\alpha, z) = 0, \\
L_5 W''(\alpha, z) - \alpha^2 L_2 W(\alpha, z) + \alpha L_4 U'(\alpha, z) = 0.
\end{aligned}$$

Решение системы (2.3) дается формулами

$$(2.4) \quad U(\alpha, z) = \frac{L_3 \mu_1}{L_2 \mu_1^2 - L_1} [C_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \mu_1 z + C_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \mu_1 z] + \\ + \frac{L_2 \mu_2}{L_2 \mu_2^2 - L_1} [C_4(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \mu_2 z + C_3(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \mu_2 z], \\ W(\alpha, z) = C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \mu_1 z + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \mu_1 z + \\ + C_3(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \mu_2 z + C_4(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \mu_2 z$$

($C_i(\alpha)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий задачи).

Далее вводим в рассмотрение функцию распределения контактного давления $q(r)$:

$$(2.5) \quad \sigma_z^*(r, 0) = -q(r) \quad (r \leq a)$$

и, полагая ее временно известной, подвергнем интегральному преобразованию Ханкеля—Фурье (2.2) первые три граничных условия из (2.1) вместе с (2.5). Затем, удовлетворив преобразованным краевым условиям с помощью (2.4) и учитывая, что добавочные напряжения при $r \rightarrow \infty$ исчезают в силу свойств интегралов Ханкеля, найдем

$$C_2(\alpha) = C_1(\alpha) \operatorname{th} \alpha \mu_1 h, \\ C_1(\alpha) = \frac{[(L_3 - L_2) \mu_2^2 + L_1] (\mu_1^2 - \mu_2^2) L_1}{(L_2 \mu_2^2 - L_1)^2 (L_2 \mu_1^2 - L_1)} \operatorname{ch} \alpha \mu_1 h \operatorname{sh} \alpha \mu_2 h \frac{\psi^0 \Delta}{\Delta_1(\alpha)} \frac{Q(\alpha)}{\alpha}, \\ C_3(\alpha) = \frac{[(L_3 - L_2) (\mu_1^2 + L_1)] (\mu_1^2 - \mu_2^2) L_1}{(L_2 \mu_2^2 - L_1) (L_2 \mu_1^2 - L_1)^2} \operatorname{sh} \alpha \mu_1 h \operatorname{ch} \alpha \mu_2 h \frac{\psi^0 \Delta}{\Delta_1(\alpha)} \frac{Q(\alpha)}{\alpha}, \\ C_4(\alpha) = C_3(\alpha) \operatorname{th} \alpha \mu_2 h, \\ \Delta_1(\alpha) = \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2) L_1}{(L_2 \mu_1^2 - L_1)^2 (L_2 \mu_2^2 - L_1)^2} \{ \mu_2 [(L_3 - L_2) \mu_1^2 + L_1] \times \\ \times [L_3 \Sigma_4 + \Sigma_5 (L_2 \mu_2^2 - L_1)] \operatorname{sh} \alpha \mu_1 h \operatorname{ch} \alpha \mu_2 h - \mu_1 [(L_3 - L_2) \mu_2 + L_1] \times \\ \times [L_3 \Sigma_4 + \Sigma_5 (L_2 \mu_1^2 - L_1)] \operatorname{sh} \alpha \mu_2 h \operatorname{ch} \alpha \mu_1 h \}.$$

Здесь $Q(\alpha) = \int_0^a q(\rho) \rho J_0(\alpha \rho) d\rho$ — трансформанта Ханкеля—Фурье функции распределения контактного давления. Теперь можно записать выражение для определения осадки штампа:

$$w^*(r, z) = \frac{L_1 (\mu_1^2 - \mu_2^2)}{(L_2 \mu_2^2 - L_1)^2 (L_2 \mu_1^2 - L_1)^2} \psi^0 \Delta \int_0^a q(\rho) \rho d\rho \times \\ \times \int_0^\infty \Delta_1^{-1}(\alpha) \{ [(L_3 - L_2) \mu_2^2 + L_1] \operatorname{sh} \alpha \mu_1 (z + h) \operatorname{sh} \alpha \mu_2 h - \\ - [(L_3 - L_2) \mu_1^2 + L_2] \operatorname{sh} \alpha \mu_2 (z + h) \operatorname{sh} \alpha \mu_1 h \} J_0(\alpha \rho) J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Удовлетворяя последнему граничному условию из (2.1), сведем рассматриваемую контактную задачу к интегральному уравнению первого рода относительно функции $q(\rho)$:

$$(2.6) \quad \int_0^1 q(\rho) \rho k \left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda} \right) d\rho = \lambda \theta [\delta - f(r)] \quad (r < 1).$$

Ядро интегрального уравнения (2.6) имеет вид

$$(2.7) \quad k\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right) = \int_0^{\infty} L(\alpha) J_0\left(\frac{\alpha\rho}{\lambda}\right) J_0\left(\frac{\alpha r}{\lambda}\right) d\alpha,$$

где

$$(2.8) \quad L(\alpha) = \frac{\mu_1 b_4 - b_3 \mu_2}{\mu_1 b_4 \operatorname{cth} \alpha \mu_1 - \mu_2 b_3 \operatorname{cth} \alpha \mu_2}, \quad \theta = \frac{\mu_1 b_4 - \mu_2 b_3}{\Delta L_1 L_3 (\mu_1^2 - \mu_2^2)},$$

$$b_3 = [(L_3 - L_2)\mu_1^2 + L_1][\Sigma_4 L_3 + \Sigma_5(L_2 \mu_2^2 - L_1)],$$

$$b_4 = [(L_3 - L_2)\mu_2^2 + L_1][\Sigma_4 L_3 + \Sigma_5(L_2 \mu_1^2 - L_1)].$$

В соотношениях (2.6)–(2.8) λ , α , ρ , r , δ , f — безразмерные величины, а $\lambda = ha^{-1}$ характеризует относительную толщину слоя. Следует отметить, что при $\lambda \rightarrow \infty$ интегральное уравнение для преднапряженного физически нелинейного слоя (2.6) переходит в интегральное уравнение соответствующей контактной задачи для преднапряженного физически нелинейного полупространства

$$\int_0^1 q(\rho) \rho d\rho \int_0^{\infty} J_0(\alpha\rho) J_0(\alpha r) d\alpha = \theta [\delta - f(r)] \quad (0 < r < 1).$$

Важной характеристикой задачи для полупространства является параметр θ , который в этом случае можем называть контактной жесткостью. Ниже приведем результаты исследования величины контактной жесткости для частного случая функций φ и ψ , а именно $\psi = \psi(\tau)$, $\varphi = \text{const}$:

$$\theta = \frac{2(n+2+s)}{[(1+2n) + (2+3n)s][1+2n-s + \sqrt{1+2n+(2+3n)s}(1+2n+2s)]}.$$

В области изменения параметров n и s , где имеет место эллиптичность уравнений системы (1.8), θ принимает вещественные значения, но может быть как положительной, так и отрицательной. Вне указанной области θ становится комплексной. Области отрицательных значений контактной жесткости, которые на рис. 4 обозначены 1–3, необходимо исключить из рассмотрения, ибо отрицательное значение θ противоречит физическому смыслу задачи. Интересно отметить, что данные области ограничены контурами, при переходе через которые происходит поверхностная потеря либо деформируемости среды ($\theta = \infty$), либо ее устойчивости ($\theta = 0$). Контактная жесткость обращается в ∞ на контурах

$$s = -(1+2n)(2+3n)^{-1} \quad (n < -1, n \geq 0);$$

$$n = 0 \quad (s \leq -2); \quad n = -0,5 \quad (|s| < \infty)$$

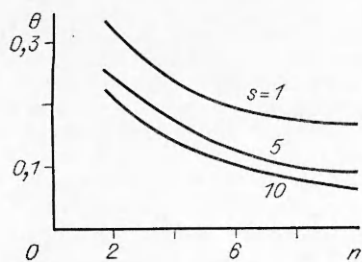
и принимает нулевое значение при

$$s = -(n+2) \quad (|n| < \infty);$$

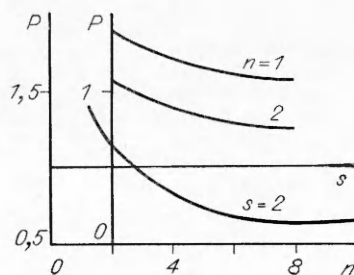
$$s = -0,5 \quad (n = -0,5); \quad s = 0 \quad (n = -2).$$

Эти процессы сопровождаются одновременным нарушением внутренней устойчивости материала среды в результате преднапряжения. На рис. 5 приведены графики зависимости θ от механических свойств материала и предварительного напряжения.

3. Рассмотрим подробнее интегральное уравнение контактной задачи для преднапряженного физически нелинейного слоя (2.6). По внешнему виду оно полностью совпадает с интегральным уравнением контактной задачи для линейно-упругого слоя без начальных напряжений и отличается от него лишь видом функции символа ядра $L(\alpha)$ и значением безразмерного параметра θ . Анализ выражений (2.8) показал, что функция $L(\alpha)$ обладает всеми характерными свойствами из [5]:



Р и с. 5



Р и с. 6

1) в плоскости комплексного переменного $z = \alpha + i\beta$ функция $L(z)z^{-1}$ четная и мероморфная, а при $\beta = 0$ действительная и регулярная;

$$2) \lim_{z \rightarrow 0} L(z)z^{-1} = D, \quad D = \frac{\mu_1 b_4 - \mu_2 b_3}{b_4 - b_3} > 0;$$

3) на действительной оси при $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеет место оценка $L(\alpha) \cong \cong 1 + O(e^{-\nu|\alpha|})$, $\nu = 2(\mu_1 + \mu_2) > 0$. Поэтому для решения интегрального уравнения (2.6) можно применять асимптотические методы «больших и малых λ » [5]. Результаты исследования (2.6) с помощью этих методов представлены на рис. 6 в форме зависимостей вдавливающей силы $P = \int_0^1 q(r) dr$ при фиксированной осадке штампа ($\delta = \text{const}$) и $\lambda = 3,1$ от механических свойств среды ($\psi = \psi(\tau)$, $\varphi = \text{const}$) и условий преднапряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Высш. шк., 1979.
2. Цытович И. А. Механика грунтов. — М.: Высш. шк., 1979.
3. Гузь А. Н. О трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Внутренняя устойчивость // Прикл. механика. — 1985. — № 11.
4. Biot M. A. Mechanics of incremental deformations. — N. Y.: Wiley, 1965.
5. Ворович И. И., Александров В. М., Бабенко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М.: Наука, 1974.

г. Москва

Поступила 10/1 1989 г.

УДК 539.373 : 624.074 : 678.067

А. Г. Козюк, Г. И. Старостин

СТРУКТУРНЫЕ ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

Характерная особенность конструкций из композитных материалов — наличие в них полей остаточных напряжений и деформаций, образующихся в результате технологического процесса изготовления и влияющих на прочность готовой конструкции и отклонение ее формы от первоначально заданной. В настоящее время достаточно подробно исследована задача об образовании таких полей в слоистых армированных цилиндрических телах, изготовленных методом намотки (см. [1]). Решений задачи для конструкций, отличных от цилиндрических, значительно меньше [2]. В существующих работах остаточные напряжения в композиционном материале определяются на макроуровне, а формирование остаточных напряжений в арматуре и связующем (структурные напряжения) не рассматривается. Между тем эксперименты на простей-