

УДК 532.528

## МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ КЭССОНА ПРИ НАЛИЧИИ ПАРЦИАЛЬНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ И ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. А. Шехзад, Т. Хайат<sup>\*,\*\*</sup>, А. Алсаеди<sup>\*\*</sup>, М. А. Мерадж

Институт информационных технологий COMSATS, 57000 Сахивал, Пакистан

\* Университет Куэд-и-Азам, 44000 Исламабад, Пакистан

\*\* Университет короля Абдул-Азиза, 21589 Джедда, Саудовская Аравия

E-mails: ali\_qau70@yahoo.com, fmgpak@gmail.com, aalsaedi@hotmail.com,  
asad@ciitsahival.edu.pk

С использованием метода гомотопического анализа исследовано магнитогиродинамическое течение жидкости Кэссона на растягивающейся поверхности при наличии скольжения, теплообмена и теплового излучения. Численно анализируется влияние коэффициента поверхностного трения и локального числа Нуссельта на параметры потока. Проведено сравнение полученных результатов с известными решениями.

Ключевые слова: магнитогиродинамические течения, условия скольжения, жидкость Кэссона, тепловое излучение.

DOI: 10.15372/PMTF20160520

**Введение.** Интерес к исследованию течений неньютоновских жидкостей при наличии теплообмена обусловлен применением их в пищевой промышленности, энергетике, нефтяной промышленности, при обработке полимеров и получении пластмасс. Некоторые жидкости, используемые в химической промышленности (многофазные смеси, краски, синтетические смазки и др.), являются неньютоновскими и описываются уравнениями более высокого порядка по сравнению с уравнением Навье — Стокса. Предложены различные модели неньютоновских жидкостей [1–10]. Ряд жидкостей, относящихся к числу жидкостей Кэссона (пены, некоторые виды суспензий, косметика и др.), описан в работах [11–13]. В модели жидкости Кэссона учитывается, что напряжение сдвига на стенке существенно больше напряжения сдвига в самой жидкости. Течение в пограничном слое неньютоновской жидкости, обусловленное растяжением, используется в различных технологических процессах (производство картона, бумаги, аэродинамическая экструзия пластмассовых форм и др.) и исследовалось в [14]. В [15] проведен анализ влияния скольжения на течение в пограничном слое вязкой жидкости на экспоненциально растягивающейся поверхности при наличии химической реакции. Процесс теплообмена в нестационарном потоке максвелловской жидкости через пористую среду исследован в работе [16]. В ряде работ изучалось течение на растягивающейся поверхности при наличии теплового излучения [17–22].

Целью данной работы является исследование влияния скольжения и теплового излучения на магнитогидродинамическое (МГД) течение жидкости Кэссона. Уравнения, описывающие течение, сводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям даже в случае использования приближения пограничного слоя. Более того, при учете излучения уравнения энергии становятся сильнонелинейными. Условия скольжения и температурного скачка на границе затрудняют определение температуры и вектора скорости. Условия скольжения особенно важны при изучении течений неньютоновских жидкостей, таких как полимеры. Экспериментально подтверждено, что течение скольжения реализуется, если средняя длина свободного пробега молекул жидкости сравнима с расстоянием между стенками в каналах, имеющих нано- или микро размеры [23].

**1. Формулировка задачи.** Исследуется МГД-течение несжимаемой жидкости Кэссона на проницаемой растягивающейся поверхности при наличии скольжения. Ось  $x$  направлена параллельно поверхности, ось  $y$  — перпендикулярно ей. Жидкость движется в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ), растягивающаяся поверхность расположена в плоскости  $y = 0$ . Жидкость полагается электропроводящей. Течение происходит при наличии постоянного магнитного поля с напряженностью  $B_0$ . Реологическое уравнение состояния для изотропного течения жидкости Кэссона имеет вид [12]

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2(\mu_B + p_y/\sqrt{2\pi})e_{ij}, & \pi > \pi_c, \\ 2(\mu_B + p_y/\sqrt{2\pi_c})e_{ij}, & \pi < \pi_c, \end{cases}$$

где  $e_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $\pi = e_{ij}e_{ij}$  — произведение компонент тензора скоростей деформации;  $\pi_c$  — критическое значение величины  $\pi$  для неньютоновской жидкости;  $\mu_B$  — динамическая вязкость неньютоновской жидкости;  $p_y$  — результирующее напряжение в жидкости.

Уравнение пограничного слоя записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u; \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{16\sigma^* T_\infty^3}{3k^*} + \varkappa \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (3)$$

где  $\beta = \mu_B \sqrt{2\pi_c}/p_y$  — параметр жидкости Кэссона;  $\sigma$  — электропроводность;  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура;  $\varkappa$  — теплопроводность;  $c_p$  — удельная теплоемкость;  $\nu = \mu_B/\rho$  — кинематическая вязкость;  $u, v$  — компоненты скорости в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;  $\sigma^*$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $\mu$  — молекулярная вязкость. В уравнении (3) для радиационного теплового потока использовано приближение Росселанда.

Сформулируем граничные условия:

$$y = 0: \quad u = U_w + N_0 \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v = -v_w, \quad T = T_w + K_0 \frac{\partial T}{\partial y}, \\ y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_\infty.$$

Здесь  $U_w = ax$  — скорость растяжения;  $T_w = T_\infty + bx$ ;  $N_0$  — параметр скольжения;  $K_0$  — параметр температурного скачка. При  $N_0 = K_0 = 0$  скольжение отсутствует.

Переход к обыкновенным дифференциальным уравнениям осуществляется с использованием следующих преобразований:

$$\eta = \sqrt{\frac{U_w}{\nu x}} y, \quad \psi = \sqrt{U_w \nu x} f(\eta), \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty},$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

( $\psi$  — функция тока). При этом уравнение (1) удовлетворяется тождественно, а уравнения (2), (3) и граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} (1 + 1/\beta)f''' + ff'' - f'^2 - M^2 f' &= 0, \\ (1 + N_r)\theta'' + \text{Pr}(f\theta' - \theta f') + \text{Pr Ec}(1 + 1/\beta)f''^2 &= 0, \\ \eta = 0: \quad f = S, \quad f' = 1 + (1 + 1/\beta)S_f f''(0), \quad \theta = 1 + S_T \theta'(0), \\ \eta \rightarrow \infty: \quad f' \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь штрих обозначает производную по  $\eta$ ;  $M^2 = \sigma B_0^2 / (\rho a)$  — число Гартмана;  $\text{Pr} = \mu c_p / \varkappa$  — число Прандтля;  $\text{Ec}$  — число Эккерта;  $N_r = 3k^* \varkappa / (16\sigma^* T_\infty^3)$  — параметр излучения;  $S_f = N_0 \rho \sqrt{a\nu}$ ,  $S_T = K_0 \sqrt{a/\nu}$  — безразмерная скорость и параметр температурного скачка.

Коэффициент поверхностного трения  $C_f$  и число Нуссельта  $\text{Nu}_x$  определяются выражениями

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_w^2 / 2}, \quad \text{Nu}_x = \frac{x q_w}{\varkappa (T_w - T_\infty)}. \quad (4)$$

Выражения для поверхностного трения  $\tau_w$  и теплового потока  $q_w$  имеют вид

$$\tau_w = \mu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \Big|_{y=0}, \quad q_w = -\varkappa \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) \Big|_{y=0}.$$

В безразмерных переменных выражения (4) записываются в виде

$$\frac{1}{2} C_f \text{Re}_x^{1/2} = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f''(0), \quad \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x^{1/2}} = -\theta'(0).$$

**2. Решение уравнений методом гомотопического анализа.** Полученные выше уравнения решаются методом гомотопического анализа [24–34].

Введем базисные функции  $\{\eta^k e^{-n\eta}, k \geq 0, n \geq 0\}$  и представим распределения скорости  $f$  и температуры  $\theta$  в виде разложений по базисным функциям

$$f_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{m,n}^k \eta^k e^{-n\eta}, \quad \theta_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,n}^k \eta^k e^{-n\eta},$$

где  $a_{m,n}^k, b_{m,n}^k$  — коэффициенты.

Начальное приближение функций  $f_0(\eta)$  и  $\theta_0(\eta)$  выбрано в виде

$$f_0(\eta) = S + \frac{1}{1 + S_f(1 + 1/\beta)}(1 - e^{-\eta}), \quad \theta_0(\eta) = \frac{e^{-\eta}}{1 + S_T}.$$

Соответствующие выражения для линейных операторов имеют вид

$$L_f = f''' - f', \quad L_\theta = \theta'' - \theta.$$

Эти операторы обладают следующими свойствами:

$$L_f(C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}) = 0, \quad L_\theta(C_4 e^\eta + C_5 e^{-\eta}) = 0.$$

Здесь  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) — константы.

2.1. *Уравнения деформации нулевого порядка.* Выражения для нелинейных операторов  $N_f$  и  $N_\theta$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} N_f[\hat{f}(\eta, p)] &= \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^3} + \hat{f}(\eta, p) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta}\right)^2 - M^2 \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta}, \\ N_\theta[\hat{\theta}(\eta, p), \hat{f}(\eta, p)] &= (1 + N_r) \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \left( \hat{f}(\eta, p) \frac{\partial \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta} - \text{Pr} \hat{\theta}(\eta, p) \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} \right) + \\ &\quad + \text{Pr Ec} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Тогда задачи о деформации нулевого порядка формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} (1-p)L_f[\hat{f}(\eta; p) - f_0(\eta)] &= ph_f N_f[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta, p)], \\ (1-p)L_\theta[\hat{\theta}(\eta; p) - \theta_0(\eta)] &= ph_\theta N_\theta[\hat{f}(\eta; p), \hat{\theta}(\eta, p)], \\ \hat{f}(0; p) = S, \quad \hat{f}'(0; p) &= 1 + S_f(1 + 1/\beta)f''(0, p), \quad \hat{f}'(\infty; p) = 0, \\ \hat{\theta}(0, p) = 1 + S_T\theta'(0, p), \quad \hat{\theta}(\infty, p) &= 0 \end{aligned}$$

( $h_f, h_\theta$  — вспомогательные параметры, отличные от нуля). При  $p = 0$  и  $p = 1$  имеем

$$\hat{f}(\eta; 0) = f_0(\eta), \quad \hat{\theta}(\eta, 0) = \theta_0(\eta), \quad \hat{f}(\eta; 1) = f(\eta), \quad \hat{\theta}(\eta, 1) = \theta(\eta).$$

При  $0 < p < 1$  значения функций  $f_0(\eta)$ ,  $\theta_0(\eta)$  стремятся к значениям  $f(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$ . Используя разложение в ряд Тейлора, получаем выражения

$$\begin{aligned} f(\eta, p) &= f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)p^m, \quad f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f(\eta; p)}{\partial \eta^m} \Big|_{p=0}, \\ \theta(\eta, p) &= \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta)p^m, \quad \theta_m(\eta) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \theta(\eta; p)}{\partial \eta^m} \Big|_{p=0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Сходимость рядов в (5) существенно зависит от линейных операторов и параметров  $h_f, h_\theta$ . Значения  $h_f, h_\theta$  выбраны таким образом, что при  $p = 1$  ряды (5) сходятся. Из уравнений (5) следует

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad \theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta). \quad (6)$$

2.2. *Уравнения деформации  $m$ -го порядка.* Задачи для деформации  $m$ -го порядка формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] &= h_f R_f^m(\eta), \quad L_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = h_\theta R_\theta^m(\eta), \\ f_m(0) = f'_m(0) - (1 + 1/\beta)S_f f''_m(0) &= f'_m(\infty) = 0, \quad \theta_m(0) - S_T \theta'_m(0) = \theta_m(\infty) = 0, \\ R_f^m(\eta) &= \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f'''_{m-1}(\eta) + \sum_{k=0}^{m-1} [f_{m-1-k} f''_k - f'_{m-1-k} f'_k] - M^2 f'_{m-1}(\eta), \end{aligned}$$

$$R_\theta^m(\eta) = (1 + N_r)\theta''_{m-1} + \text{Pr} \sum_{k=0}^{m-1} [f_{m-1-k} \theta'_k - \theta_{m-1-k} f'_k] + \text{Pr Ec} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \sum_{k=0}^{m-1} f''_{m-1-k} f''_k.$$

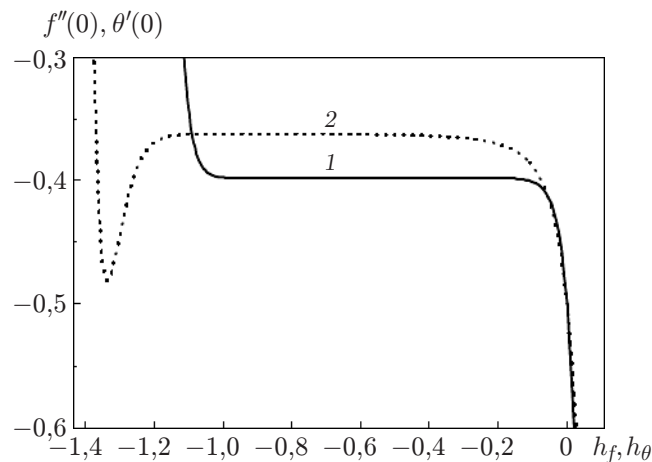


Рис. 1.  $h$ -кривые для функций  $f''(0)$  (1) и  $\theta'(0)$  (2) в приближении 21-го порядка при  $\beta = 1,0$ ,  $M = 0,3$ ,  $S = S_T = 0,5$ ,  $Pr = 0,6$ ,  $S_f = 1,0$ ,  $N_r = 0,3$ ,  $Ec = 0,4$

Таблица 1

Сходимость решений, полученных с использованием метода гомотопического анализа, при  $\beta = 1,0$ ,  $M = 0,3$ ,  $S = 0,5$ ,  $Pr = 0,6$ ,  $S_f = 1,0$ ,  $S_T = 0,5$ ,  $Ec = 0,4$ ,  $N_r = 0,3$ ,  $h_f = h_\theta = -0,6$

Порядок приближения	$-f''(0)$	$-\theta'(0)$
1	0,414 688	0,435 500
10	0,397 984	0,366 838
15	0,397 982	0,364 065
30	0,397 982	0,362 479
50	0,397 982	0,362 302
55	0,397 982	0,362 295
60	0,397 982	0,362 295
70	0,397 982	0,362 295

Поскольку  $f_m^*(\eta)$  и  $\theta_m^*(\eta)$  — частные решения, общее решение записывается в виде

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1 + C_2 e^\eta + C_3 e^{-\eta}, \quad \theta_m(\eta) = \theta_m^*(\eta) + C_4 e^\eta + C_5 e^{-\eta}.$$

**3. Сходимость полученных решений.** Решения в виде рядов (6) содержат вспомогательные параметры  $h_f$  и  $h_\theta$ , обеспечивающие сходимость этих рядов. Для того чтобы получить допустимые значения вспомогательных параметров, были построены  $h$ -кривые для приближения 21-го порядка (рис. 1). Из рис. 1 следует, что  $-1,0 \leq h_f \leq -0,1$  и  $-1,2 \leq h_\theta \leq -0,4$ . Заметим, что при  $h_f = h_\theta = -0,6$  ряды сходятся во всей области  $\eta$ . Результаты расчетов для различных порядков приближения приведены в табл. 1.

**4. Результаты исследования и их обсуждение.** Исследовалось влияние параметра жидкости Кэссона  $\beta$ , параметров скольжения  $S_f$  и температурного скачка  $S_T$ , а также параметра излучения  $N_r$  на скорость, температуру, поверхностное трение и число Нуссельта. На рис. 2 показано влияние параметра  $S_f$  на скорость. Видно, что с увеличением  $S_f$  скорость, а следовательно, и толщина пограничного слоя уменьшаются. С увеличением параметра жидкости Кэссона  $\beta$  скорость сначала увеличивается, а при  $\eta = 1$  начинает уменьшаться (рис. 3). Это обусловлено тем, что при увеличении параметра жидкости Кэссона увеличивается сопротивление течению жидкости и уменьшаются скорость и толщина пограничного слоя. На рис. 4 показано влияние параметра  $\beta$  на безразмерную температуру. Видно, что увеличение  $\beta$  приводит к уменьшению температуры и зависящей от нее толщины теплового пограничного слоя. Влияние параметра скольжения  $S_f$  на темпера-

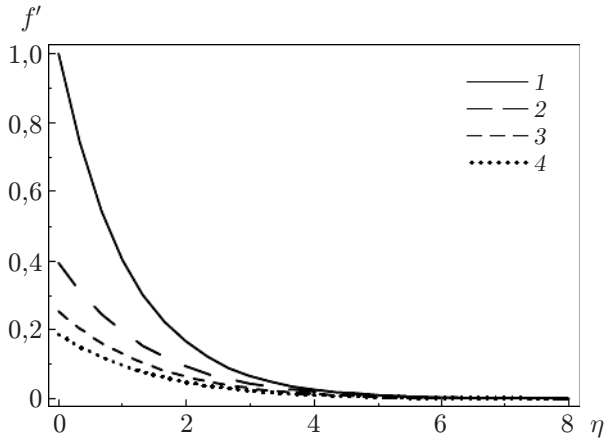


Рис. 2

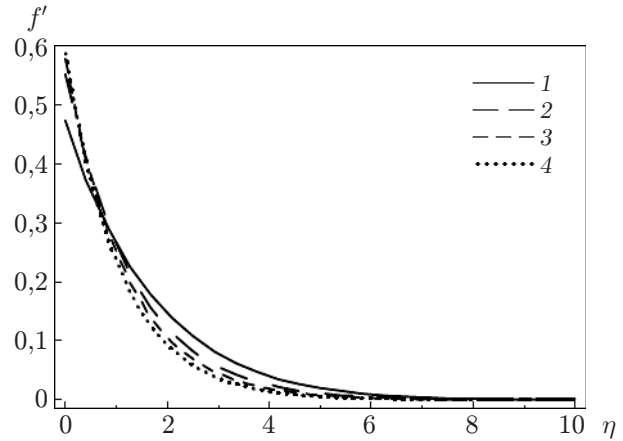


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость  $f'(\eta)$  при  $\beta = 1,0$ ,  $M = 0,4$ ,  $S = 0,5$  и различных значениях параметра скольжения  $S_f$ :

1 —  $S_f = 0$ , 2 —  $S_f = 1$ , 3 —  $S_f = 2$ , 4 —  $S_f = 3$

Рис. 3. Зависимость  $f'(\eta)$  при  $S_f = 0,5$ ,  $M = 0,4$ ,  $S = 0,5$  и различных значениях параметра жидкости Кэссона  $\beta$ :

1 —  $\beta = 0,6$ , 2 —  $\beta = 1,0$ , 3 —  $\beta = 1,5$ , 4 —  $\beta = 2,0$

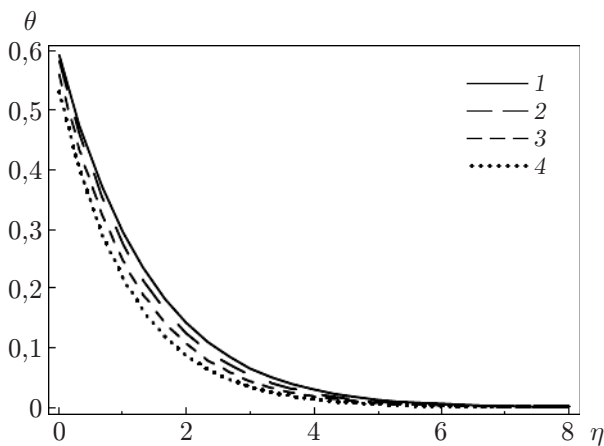


Рис. 4

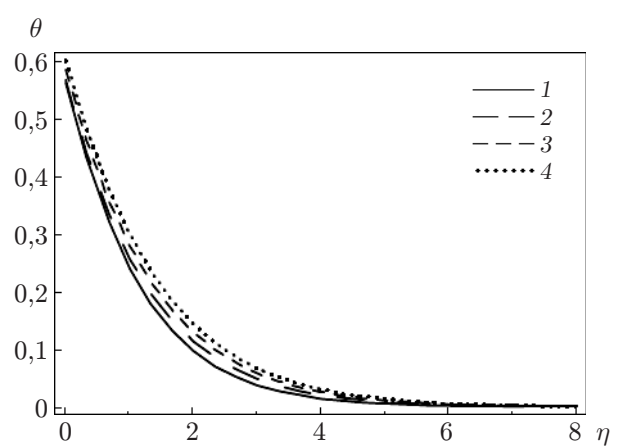


Рис. 5

Рис. 4. Зависимость  $\theta(\eta)$  при  $Pr = 0,7$ ,  $Ec = 0,4$ ,  $M = 0,5$ ,  $S = 0,5$ ,  $S_f = 0,5$ ,  $S_T = 1,0$ ,  $N_r = 0,3$  и различных значениях параметра жидкости Кэссона  $\beta$ :

1 —  $\beta = 0,3$ , 2 —  $\beta = 1,0$ , 3 —  $\beta = 2,0$ , 4 —  $\beta = 3,0$

Рис. 5. Зависимость  $\theta(\eta)$  при  $Pr = 0,7$ ,  $Ec = 0,4$ ,  $\beta = 1,0$ ,  $M = 0,5$ ,  $S = 0,5$ ,  $S_T = 1,0$ ,  $N_r = 0,3$  и различных значениях параметра скольжения  $S_f$ :

1 —  $S_f = 0$ , 2 —  $S_f = 1$ , 3 —  $S_f = 2$ , 4 —  $S_f = 3$

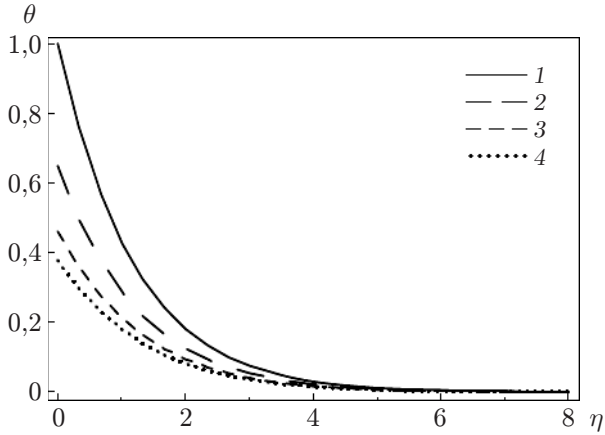


Рис. 6

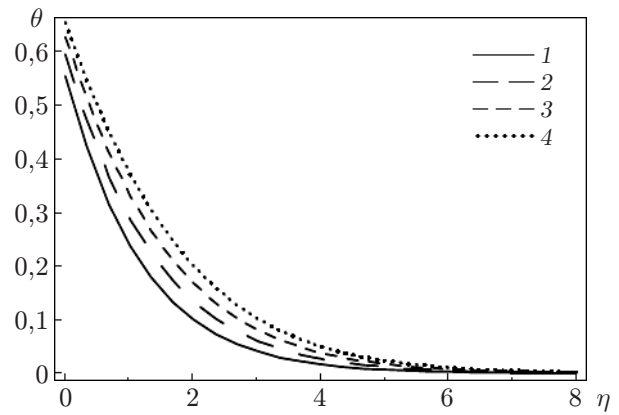


Рис. 7

Рис. 6. Зависимость  $\theta(\eta)$  при  $\text{Pr} = 0,7$ ,  $\text{Ec} = 0,4$ ,  $\beta = 1,0$ ,  $M = 0,5$ ,  $S = 0,5$ ,  $S_f = 0,5$ ,  $N_r = 0,3$  и различных значениях параметра температурного скачка  $S_T$ : 1 —  $S_T = 0$ , 2 —  $S_T = 0,7$ , 3 —  $S_T = 1,6$ , 4 —  $S_T = 2,4$

Рис. 7. Зависимость  $\theta(\eta)$  при  $\text{Pr} = 0,7$ ,  $\text{Ec} = 0,4$ ,  $\beta = 1,0$ ,  $M = 0,5$ ,  $S = 0,5$ ,  $S_f = 0,5$ ,  $S_T = 1,0$  и различных значениях параметра излучения  $N_r$ : 1 —  $N_r = 0$ , 2 —  $N_r = 0,4$ , 3 —  $N_r = 0,8$ , 4 —  $N_r = 1,2$

Таблица 2

Значения скорости  $f'(0)$  и коэффициента трения  $-f''(0)$  при  $\beta \rightarrow \infty$  и различных значениях  $S_f$

$S_f$	$f'(0)$		$-f''(0)$	
	Данные [35]	Данные настоящей работы	Данные [35]	Данные настоящей работы
0	1,0000	1,000 00	1,0000	1,000 00
0,1	0,9128	0,912 79	0,8721	0,872 08
0,2	0,8447	0,844 72	0,7764	0,776 37
0,5	0,7044	0,704 40	0,5912	0,591 19
1,0	0,5698	0,569 84	0,4302	0,430 16
2,0	0,4320	0,432 04	0,2840	0,283 98
5,0	0,2758	0,277 99	0,1448	0,144 84
10,0	0,1876	0,187 56	0,0812	0,081 24
20,0	0,1242	0,124 21	0,0438	0,043 78
50,0	0,0702	0,702 23	0,0186	0,018 58
100,0	0,0450	0,045 24	0,0095	0,009 55

Таблица 3

Значения коэффициента поверхностного трения  $(1 + 1/\beta)f''(0)$   
при  $\beta = 1,0$  и различных значениях  $M, S_f, S$

$M$	$S_f$	$S$	$-(1 + 1/\beta)f''(0)$
0	0,5	0,5	0,767 236
0,4	0,5	0,5	0,816 740
0,9	0,5	0,5	0,966 208
1,5	0,5	0,5	1,165 340
0,4	0	0,5	1,793 530
0,4	0,6	0,5	0,738 314
0,4	1,2	0,5	0,469 494
0,4	1,7	0,5	0,360 354
0,4	1,7	0	0,714 956
0,4	1,7	0,7	0,859 546
0,4	1,7	1,3	0,991 214
0,4	1,7	2,0	1,141 550

Таблица 4

Значения числа Нуссельта  $-\theta'(0)$  при  $M = 0,4, S = 1,0$   
и различных значениях  $N_r, Pr, Ec, S_T, S_f, \beta$

$N_r$	Pr	Ec	$S_T$	$S_f$	$\beta$	$-\theta'(0)$
0	0,6	0,4	1,0	0,5	1,0	0,458 798
0,4	0,6	0,4	1,0	0,5	1,0	0,393 685
0,7	0,6	0,4	1,0	0,5	1,0	0,356 906
0,3	0,4	0,4	1,0	0,5	1,0	0,331 713
0,3	0,8	0,4	1,0	0,5	1,0	0,463 717
0,3	1,3	0,4	1,0	0,5	1,0	0,556 686
0,3	1,3	0,7	1,0	0,5	1,0	0,390 838
0,3	1,3	1,0	1,0	0,5	1,0	0,373 743
0,3	1,3	1,5	1,0	0,5	1,0	0,345 249
0,3	1,3	1,5	0,5	0,5	1,0	0,519 891
0,3	1,3	1,5	0,9	0,5	1,0	0,426 292
0,3	1,3	1,5	1,4	0,5	1,0	0,347 976
0,3	1,3	1,5	1,4	0,6	1,0	0,405 669
0,3	1,3	1,5	1,4	1,0	1,0	0,396 140
0,3	1,3	1,5	1,4	1,5	1,0	0,385 909
0,3	1,3	1,5	1,4	1,5	0,5	0,413 656
0,3	1,3	1,5	1,4	1,5	1,4	0,404 566
0,3	1,3	1,5	1,4	1,5	2,0	0,401 159



туру показано на рис. 5. При увеличении параметра скольжения температура и толщина теплового пограничного слоя увеличиваются. На рис. 6 показано влияние параметра температурного скачка  $S_T$  на температуру. Видно, что с увеличением  $S_T$  температура и толщина теплового пограничного слоя уменьшаются. Влияние параметра излучения  $N_r$  на температуру показано на рис. 7. Видно, что увеличение  $N_r$  приводит к увеличению температуры и толщины теплового пограничного слоя. Для проверки точности полученных результатов аналитических расчетов проведено сравнение решений, найденных с использованием метода гомотопического анализа в настоящей работе, и результатов численных расчетов [35] (табл. 2). Эти результаты хорошо согласуются при  $M = S = 0$  и  $\beta \rightarrow \infty$ . Из табл. 3 следует, что с увеличением параметра  $M$  поверхностное трение увеличивается, а с увеличением параметра  $S_f$  — уменьшается. Значения величины теплового потока на стенке  $-\theta'(0)$  при различных значениях  $\beta$ ,  $S_f$ ,  $S_T$ ,  $Pr$ ,  $Ec$ ,  $N_r$  приведены в табл. 4, из которой следует, что при увеличении  $\beta$ ,  $S_f$ ,  $S_T$ ,  $Ec$ ,  $N_r$  значения  $-\theta'(0)$  уменьшаются, а при увеличении  $Pr$  — увеличиваются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Jamil M., Fetecau C., Imran M.** Unsteady helical flows of Oldroyd-B fluids // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2011. V. 16. P. 1378–1386.
2. **Nazar M., Fetecau C., Vieru D., Fetecau C.** New exact solutions corresponding to the second problem of Stokes for second grade fluids // *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* 2010. V. 11. P. 584–591.
3. **Fetecau C., Hayat T., Zierep J., Sajid M.** Energetic balance for the Rayleigh — Stokes problem of an Oldroyd-B fluid // *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* 2011. V. 12. P. 1–13.
4. **Wang S. W., Tan W. C.** Stability analysis of double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium heated from below // *Phys. Lett. A.* 2008. V. 372. P. 3046–3050.
5. **Tan W. C., Xu M. Y.** Unsteady flows of a generalized second grade fluid with the fractional derivative model between two parallel plates // *Acta Mech. Sinica.* 2004. V. 20. P. 471–476.
6. **Zhang Z. Y., Fu C. J., Tan W. C., Wang C. Y.** On set of oscillatory convection in a porous cylinder saturated with a viscoelastic fluid // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19. P. 98–104.
7. **Rashidi M. M., Chamkha A. J., Keimanesh M.** Application of multi-step differential transform method on flow of a second grade fluid over a stretching or shrinking sheet // *Amer. J. Comput. Math.* 2011. V. 6. P. 119–128.
8. **Ali N., Hayat T., Asghar S.** Peristaltic flow of Maxwell fluid in a channel with compliant walls // *Chaos, Solitons Fractals.* 2009. V. 39. P. 407–416.
9. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Obaidat S.** Flow of second grade fluid with convective boundary conditions // *Thermal Sci.* 2011. V. 15. P. 253–261.
10. **Alsaadi F. E., Shehzad S. A., Hayat T., Monaquel S. J.** Soret and Dufour effects on the unsteady mixed convection flow over a stretching surface // *J. Mech.* 2013. V. 29. P. 623–632.
11. **Casson N.** Rheology of dispersed systems. Oxford: Pergamon Press, 1959.
12. **Nakamura M., Sawada T.** Numerical study on the flow of a non-Newtonian fluid through an axisymmetric stenosis // *Trans. ASME. J. Biomech. Engng.* 1988. V. 110. P. 137–143.
13. **Bird R. B., Dai G. C., Yarusso B. J.** The rheology and flow of viscoplastic materials // *Rev. Chem. Engng.* 1983. V. 1. P. 1–83.
14. **Crane L. J.** Flow past a stretching plate // *Z. angew. Math. Phys.* 1970. Bd 21. S. 645–647.
15. **Mukhopadhyay S., Arif Golam M., Ali Wazed M.** Effects of partial slip on chemically reactive solute transfer in the boundary layer flow over an exponentially stretching sheet with suction/blowing // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 6. P. 928–936.

16. **Mukhopadhyay S., De P. R., Layek G. C.** Heat transfer characteristics for the Maxwell fluid flow past an unsteady stretching permeable surface embedded in a porous medium // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 3. P. 385–396.
17. **Hayat T., Qasim M., Abbas Z.** Radiation and mass transfer effects on the magnetohydrodynamic unsteady flow induced by a stretching sheet // *Z. Naturforsch. A.* 2010. Bd 64. S. 231–239.
18. **Hayat T., Qasim M.** Influence of thermal radiation and Joule heating on MHD flow of a Maxwell fluid in the presence of thermophoresis // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2010. V. 53. P. 4780–4788.
19. **Mukhopadhyay S.** Effect of thermal radiation on unsteady mixed convection flow and heat transfer over a stretching surface in a porous medium // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2009. V. 52. P. 3261–3265.
20. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M.** Mixed convection flow of a micropolar fluid with radiation and chemical reaction // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2011. V. 67. P. 1418–1436.
21. **Hayat T., Shehzad S. A., Alsaedi A.** Three-dimensional stretched flow of Jeffery fluid with variable thermal conductivity and thermal radiation // *Appl. Math. Mech. (English Ed.).* 2013. V. 34. P. 823–832.
22. **Hayat T., Shehzad S. A., Al-Sulami H. H., Asghar S.** Influence of thermal stratification on the radiative flow of Maxwell fluid // *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Engng.* 2013. V. 35. P. 381–389.
23. **Derek C., Tretheway D. C., Meinhart C. D.** Apparent fluid slip athydrophobic microchannel walls // *Phys. Fluids.* 2002. V. 14. P. 1–9.
24. **Liao S. J.** Beyond perturbation: Introduction to homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2003.
25. **Xu H., Liao S. J.** Laminar flow and heat transfer in the boundary-layer of non-Newtonian fluids over a stretching flat sheet // *Comput. Math. Appl.* 2009. V. 57. P. 1425–1431.
26. **Abbasbandy S.** Homotopy analysis method for the Kawahara equation // *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* 2010. V. 11. P. 307–312.
27. **Abbasbandy S., Shirzadi A.** A new application of the homotopy analysis method: Solving the Sturm — Liouville problems // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2011. V. 16. P. 112–126.
28. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Obaidat S.** Radiative flow of Jeffery fluid in a porous medium with power law heat flux and heat source // *Nuclear Engng Design.* 2012. V. 243. P. 15–19.
29. **Hashim I., Abdulaziz O., Momani S.** Homotopy analysis method for fractional IVPs // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2009. V. 14. P. 674–684.
30. **Rashidi M. M., Pour S. A. M.** Analytic approximate solutions for unsteady boundary-layer flow and heat transfer due to a stretching sheet by homotopy analysis method // *Nonlinear Anal.: Modelling Control.* 2010. V. 15. P. 83–95.
31. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Obaidat S.** Steady flow of Maxwell fluid with convective boundary conditions // *Z. Naturforsch. A.* 2011. Bd 66. S. 417–422.
32. **Hayat T., Shehzad S. A., Qasim M., Obaidat S.** Thermal radiation effects on the mixed convection stagnation-point flow in a Jeffery fluid // *Z. Naturforsch. A.* 2011. Bd 66. S. 606–614.
33. **Shehzad S. A., Alsaedi A., Hayat T.** Influence of thermophoresis and Joule heating on the radiative flow of Jeffery fluid with mixed convection // *Brazil. J. Chem. Engng.* 2013. V. 30. P. 897–908.
34. **Shehzad S. A., Hayat T., Alsaedi A.** Flow of a thixotropic fluid over an exponentially stretching sheet with heat transfer // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. V. 57, N 4. P. 672–680.
35. **Andersson H. I.** Slip flow past a stretching surface // *Acta Mech.* 2002. V. 158. P. 121–125.