УДК 532.59.6, 517.958

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПУЗЫРЬКОВОГО ТЕЧЕНИЯ

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Для описания процессов коллективного взаимодействия газовых пузырьков, движущихся в идеальной несжимаемой жидкости, используется кинетический подход, основанный на приближенном вычислении потенциала течения жидкости и формулировке системы уравнений Гамильтона для обобщенных координат и импульсов пузырьков. Выведены кинетические уравнения, описывающие эволюцию функции распределения пузырьков, близкие к уравнениям Власова.

В последнее время в ряде работ [1–4] развивается кинетический подход к описанию течения жидкости с пузырьками газа. Некоторые полученные системы уравнений сходны по структуре с уравнениями Власова, используемыми при моделировании течений плазмы. При выводе таких уравнений используется система гамильтоновых обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая движение индивидуальных частиц. Если в качестве частиц рассматриваются пузырьки газа, движущиеся в идеальной несжимаемой жидкости, то для получения указанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений нужно знать потенциал течения жидкости в области между пузырьками. Для упрощенной ситуации, когда пузырьки считаются несжимаемыми, приближенный гамильтониан, определяющий движение пузырьков, был найден для разреженной пузырьковой среды в работе Д. Руссо и П. Смереки [4] и использован для вывода системы кинетических уравнений, описывающей эволюцию одночастичной функции распределения. Допущение о несжимаемости пузырьков можно использовать при описании реальных течений с пузырьками достаточно малых размеров, когда силы поверхностного натяжения, сохраняющие форму пузырьков, существенно превышают вариации гидродинамического давления. Такая модель может использоваться для описания волн концентрации при малых перепадах давления.

При моделировании движения системы сжимаемых пузырьков в жидкости часто используются осредненные уравнения, дополненные уравнением Рэлея — Ламба для одиночного пузырька. Различные модели этого класса, отличающиеся дополнительными членами уравнений, связанными с описанием реальных эффектов, обсуждаются в ряде работ (см. [5, 6]). Некоторые гидродинамические эффекты, связанные с движением пузырьков в жидкости, рассмотрены в монографии М. А. Лаврентьева, Б. В. Шабата [7]. Применение кинетического подхода к моделированию пузырьковых течений, в котором эволюция функции распределения пузырьков задается уравнениями, аналогичными уравнениям Больцмана или Власова, позволяет более полно описывать процесс движения и регулярным образом выводить осредненные уравнения. В частности, этот подход позволяет в принципе получать некоторые определяющие соотношения, которые при гидродинамическом описании постулировались.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00660).

В данной работе выводится система кинетических уравнений пузырькового течения, описывающая движение сжимаемых газовых пузырьков в идеальной несжимаемой жидкости. Вначале формулируется система уравнений Гамильтона для обобщенных координат сферических пузырьков (пространственных координат центров и радиусов) и соответствующих им импульсов. Эта система легко выписывается, если известен потенциал безвихревого течения жидкости в области между пузырьками. При приближенном вычислении указанного потенциала используется асимптотическое разложение решения уравнения Лапласа по малому параметру — отношению среднего радиуса пузырьков к среднему расстоянию между ними. Из закона сохранения энергии вытекают уравнения Лагранжа, описывающие эволюцию системы пузырьков. Эти уравнения стандартным образом преобразуются в уравнения Гамильтона. Далее выписывается уравнение для N-частичной функции распределения, осреднением которого по координатам и импульсам $N-1$ частицы получаются уравнения Власова для одночастичной функции распределения. В работе получены кинетические уравнения, соответствующие главному члену асимптотического разложения потенциала течения жидкости. Рассмотрены стационарные решения этих уравнений.

1. Уравнения Гамильтона для газовых пузырьков, движущихся в жидкости. Рассматривается N сферических газовых пузырьков, движущихся в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. Течение жидкости в области между пузырьками считается потенциальным, а вектор скорости — обращающимся в нуль при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$. Потенциал вектора скорости жидкости $\varphi(t, \boldsymbol{x})$ является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bigcup_j B_j; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_j} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_j + s_j; \quad \nabla\varphi \to 0, \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{v}_j(t) = \boldsymbol{x}'_j(t)$ — скорости движения центров сферических пузырьков, $s_j = b'_j(t)$ — скорости их расширения; $\boldsymbol{x}_j(t)$ — радиус-векторы центров; $b_j(t)$ — радиусы пузырьков ($j = 1, \ldots, N$); B_j и Γ_j — шар и сфера радиуса $b_j(t)$ с центром в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_j(t)$ соответственно; $\boldsymbol{n}_j$ — нормаль к Γ_j, направленная в сторону жидкости; штрихом обозначена производная по времени.

Искомый потенциал безвихревого течения можно представить в виде

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{\psi}_j + s_j\varphi_j), \tag{1.2}$$

где гармонические функции $\boldsymbol{\psi}_j(t, x)$, $\varphi_j(t, x)$ в силу (1.1) удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial\boldsymbol{\psi}_j}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \delta_{jk}\boldsymbol{n}_j, \qquad \frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \delta_{jk} \tag{1.3}$$

и имеют исчезающий на бесконечности градиент ($\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$, $\delta_{jj} = 1$).

Пусть $\bar{b}$ характеризует средний радиус пузырька, $\bar{R}$ — среднее расстояние между пузырьками. Далее рассматривается разреженная пузырьковая жидкость, для которой $\beta = \bar{b}(\bar{R})^{-1} \ll 1$. Используя асимптотические разложения по малому параметру, найдем приближенные значения потенциала течения в окрестности каждого пузырька.

Гармоническая вне шара B_j функция $\varphi_{j0} = -b_j^2/r_j$ ($r_j = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j|$) удовлетворяет на Γ_j условию $\partial\varphi_j/\partial n = 1$ и условию убывания при больших $|\boldsymbol{x}|$. В окрестности i-го пузырька $r_j^2 = r_{ij}^2|\boldsymbol{n}_{ji} - r_{ij}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)|^2 = r_{ij}^2(1 - 2\cos\theta_{ji}(r_i/r_{ij}) + (r_i/r_{ij})^2)$, $r_{ij} = |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|$, $\boldsymbol{n}_{ji} = (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i)r_{ij}^{-1}$, $\cos\theta_{ji} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{n}_{ji}r_i^{-1}$, $r_i = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i|$.

Используя производящую функцию для полиномов Лежандра [8] и выписанное представление для r_j, получаем разложение в ряд функции φ_{j0}

$$\varphi_{j0} = -b_j \frac{b_j}{r_{ij}} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{r_i}{b_i}\Big)^n \Big(\frac{b_i}{r_{ij}}\Big)^n P_n(\cos\theta_{ji}), \tag{1.4}$$

справедливое в окрестности i-го пузырька ($r_i/r_{ij} < 1$). При $r_i = b_i$ (1.4) задает разложение в ряд по степеням b_i/r_{ij} следа функции φ_{j0} на Γ_i. Отметим, что величина b_i/r_{ij} имеет порядок $\beta \ll 1$. В (1.4) $P_n(t)$ — полином Лежандра степени n. Известно, что наряду с $r^n P_n(\cos\theta)$ функция $r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа. Введем гармоническую функцию

$$\varphi_{ji} = -\frac{b_j^2}{r_{ij}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \Big(\frac{b_i}{r_i}\Big)^{n+1} \Big(\frac{b_i}{r_{ij}}\Big)^n P_n(\cos\theta_{ji}). \tag{1.5}$$

Легко проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial r_i}(\varphi_{j0} + \varphi_{ji}) = 0 \tag{1.6}$$

при $r_i = b_i$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_j = \varphi_{j0} + \sum_{i\neq j} \varphi_{ji}^{(2)}, \tag{1.7}$$

где $\varphi_{ji}^{(2)}$ определяется формулой (1.5) с заменой полной суммы ряда частичной суммой членов до $n = 2$. Легко видеть, что $\partial\varphi_j/\partial n\big|_{\Gamma_i} = \delta_{ik} + O(\bar b/\bar R)^4$ в силу формул (1.6), (1.7) и оценок $\varphi_{ji}\big|_{\Gamma_k} = O(\bar b/\bar R)^4$, $\nabla\varphi_{ji}\big|_{\Gamma_k} = O(\bar b/\bar R)^4$. Здесь $i \neq k$. Следовательно, функция φ_j, определенная формулой (1.7), является приближенным решением задачи (1.3) для уравнения Лапласа. Разность приближенного и точного решений имеет порядок, не меньший чем $(\bar b/\bar R)^4$.

Рассмотрим гармоническую функцию $\boldsymbol{\psi}_{j0} = (b_j^3/2)\nabla(r_j^{-1}) = -(b_j/r_j)^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j)/2$, удовлетворяющую граничному условию $(\partial\boldsymbol{\varphi}_{j0}/\partial n)\big|_{\Gamma_j} = \boldsymbol{n}_j$ на поверхности j-го пузырька. В окрестности i-го пузырька $\boldsymbol{\psi}_{j0}$ допускает приближенное представление отрезком ряда Тейлора с остаточным членом порядка $(\bar b/\bar R)^4$:

$$\boldsymbol{\psi}_{j0} = (b_j/2)[(b_j/r_{ij})^2\boldsymbol{n}_{ji} - (b_j/r_{ij})^2(r_i/b_i)(b_i/r_{ij})B_{ij}\langle(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)r_i^{-1}\rangle] + O((\bar b/\bar R)^4),$$

где $B_{ij} = I - 3\boldsymbol{n}_{ji} \otimes \boldsymbol{n}_{ji}$; I — единичная матрица; $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ — диада двух векторов. Введем гармоническую функцию

$$\boldsymbol{\psi}_{ji} = (b_j/4)(b_j/r_{ij})^2(b_i/r_{ij})(b_i/r_i)^2 B_{ij}\langle(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)r_i^{-1}\rangle. \tag{1.8}$$

Легко проверить, что $\partial(\boldsymbol{\psi}_{j0} + \boldsymbol{\psi}_{ji})/\partial n\big|_{\Gamma_i} = 0$, и с учетом этого равенства показать, что функция

$$\boldsymbol{\psi}_j = \boldsymbol{\psi}_{j0} + \sum_{i\neq j} \boldsymbol{\psi}_{ji} \tag{1.9}$$

является приближенным решением задачи (1.3), при этом отличие от точного решения имеет порядок, не меньший чем $(\bar b/\bar R)^4$.

В итоге получено приближенное представление потенциала вектора скорости жидкости при заданных скоростях перемещения и расширения пузырьков. Это позволяет вычислить кинетическую энергию жидкости:

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}|^2 \, d\Omega = -\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{\Gamma_i} \varphi \, \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\Gamma = -\frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{\Gamma_i} \varphi (\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{n}_i + s_i) \, d\Gamma$$

(нормаль направлена в сторону жидкости, ρ — плотность жидкости).

С учетом (1.2) T можно представить в виде

$$T = -\frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} [(\boldsymbol{v}_i, A_{ji} \boldsymbol{v}_i) + s_j \boldsymbol{d}_{ij} \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{c}_{ij} s_i + s_j e_{ij} s_i], \quad A_{ji} = \iint\limits_{\Gamma_i} \boldsymbol{\psi}_j \otimes \boldsymbol{n}_i \, d\Gamma,$$

$$\boldsymbol{d}_{ij} = \iint\limits_{\Gamma_i} \varphi_j \boldsymbol{n}_i \, d\Gamma, \quad \boldsymbol{c}_{ij} = \iint\limits_{\Gamma_i} \boldsymbol{\psi}_j \, d\Gamma, \quad e_{ij} = \iint\limits_{\Gamma_i} \varphi_j \, d\Gamma.$$

Для вычисления коэффициентов этой квадратичной формы достаточно знать значения потенциалов $\boldsymbol{\psi}_j$, φ_j на Γ_i.

Используя формулы (1.5), (1.7)–(1.9), вычисляем коэффициенты квадратичной формы T (при вычислении интегралов по k-й сфере в суммах, входящих в (1.7), (1.9), нужно учитывать только члены $\boldsymbol{\psi}_{jk}$, φ_{jk}, так как вклад остальных членов имеет порядок более высокий, чем β^3). В итоге получаем следующее выражение для кинетической энергии жидкости:

$$T = \frac{\rho}{2} \Big[\sum_{i=1}^{N} b_i^3 \Big(\frac{2}{3} \, \pi |\boldsymbol{v}_i|^2 + 4\pi s_i^2 \Big) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} \Big(4\pi b_i^2 b_j \, \frac{b_j}{r_{ij}} \, s_i s_j + 2\pi b_i^3 \Big(\frac{b_j}{r_{ij}} \Big)^2 s_j (\boldsymbol{n}_{ij} \boldsymbol{v}_i) +$$

$$+ 2\pi b_j^3 \Big(\frac{b_i}{r_{ij}} \Big)^2 s_i (\boldsymbol{n}_{ji} \boldsymbol{v}_j) + \pi b_i^3 \Big(\frac{b_j}{r_{ij}} \Big)^3 (\boldsymbol{v}_j, B_{ij} \boldsymbol{v}_i) \Big) \Big].$$

В этой формуле в первой сумме объединены члены, имеющие нулевой порядок по β, во второй собраны члены порядков β, β^2 и β^3. Формула для кинетической энергии, учитывающая члены до порядка β^2, приводилась в работах [9, 10].

При вычислении полной кинетической энергии системы жидкость — газовые пузырьки кинетическую энергию газа учитывать не будем, так как масса газа существенно меньше массы жидкости. Выпишем закон сохранения энергии для жидкости, занимающей область между пузырьками:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{\Gamma_i} (p - P) u_n \, d\Gamma.$$

Здесь p — давление в жидкости; $P = \mathrm{const}$ — давление на бесконечности; $u_n = \boldsymbol{un} = \partial\varphi/\partial n$; $\boldsymbol{n}$ — нормаль, направленная в сторону жидкости.

Отметим, что предположение о сферичности пузырьков, связанное с приближенным описанием течения, существенно упрощает задачу и позволяет определить основной вклад в изменение потенциала течения жидкости при колебаниях объема пузырька. В точной постановке задачи форма пузырьков должна определяться в результате решения задачи с неизвестной границей раздела жидкость — газ из условий равенства давлений в газе и жидкости на Γ_i. Поэтому в приближенном описании постановка задачи видоизменяется: на границе потребуем совпадения осредненных по поверхности величин давления. Пусть τ — объем пузырька. Состояние газа внутри пузырька будем описывать приближенно, считая плотность ρ и давление p постоянными по объему. Пусть состояние газа описывается уравнением состояния $p = f_1(\rho)$ (изэнтропический процесс). Сохранение массы газа в пузырьке дает соотношение $\rho\tau = \rho_0\tau_0$. Здесь ρ_0, p_0 — плотность и давление газа в начальный момент времени; τ_0 — начальный объем. Будем считать, что в начальный момент времени все пузырьки имели одинаковую массу m_0. Тогда они имеют одинаковую массу в любой момент времени, и согласно сказанному выше давление в пузырьке определяется его объемом: $p = f(\tau) = f_1(m_0/\tau)$. Используя (1.2), (1.3), получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{\Gamma_i} p\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Big(\boldsymbol{v}_i \iint\limits_{\Gamma_i} p\boldsymbol{n}\,d\Gamma + s_i \iint\limits_{\Gamma_i} p\,d\Gamma\Big). \tag{1.10}$$

Но интеграл в первом слагаемом правой части этого соотношения равен нулю (суммарная сила, действующая на пузырек, равна нулю в силу закона сохранения импульса).

Учитывая, что давление зависит только от объема пузырька, равенство (1.10) можно преобразовать к виду

$$\sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{\Gamma_i} (p-P)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{N} (p(\tau_i) - P)\frac{d\tau_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{d\varepsilon(\tau_i)}{dt}, \quad \varepsilon(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\infty} p(\tau)\,d\tau + P\tau.$$

Как известно, задача о движении жидкости с пузырьками является лагранжевой в том случае, когда течение жидкости полностью определяется движением пузырьков [9]. Этот случай и рассматривается в данной работе. Используя закон сохранения энергии, для обобщенных координат пузырьков и соответствующих скоростей получаем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_i} = 0, \qquad L = T - U, \qquad U = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon(\tau_i). \tag{1.11}$$

Здесь $\boldsymbol{q}_i = (\boldsymbol{x}_i, b_i)$ $(i = 1, \dots, N)$ — векторы с четырьмя компонентами. Далее удобно вместо обобщенной координаты b_i (радиуса пузырька) ввести координату $\sigma_i = b_i^2$, пропорциональную площади его поверхности, и скорость $\Sigma_i = \sigma_i' = 2b_i s_i$. При этом уравнение Лагранжа сохраняет вид (1.11) с $\boldsymbol{q}_i = (\boldsymbol{x}_i, \sigma_i)$.

В данной работе будем учитывать только главный член разложения кинетической энергии по параметру β. Запишем функцию Лагранжа, оставляя только члены нулевого и первого порядка по малому параметру:

$$L = \frac{\rho}{2}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{2}{3}\,\pi\sigma_i^{3/2}|\boldsymbol{v}_i|^2 + \pi\sigma_i^{1/2}\Sigma_i^2\Big) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} \pi\sigma_i^{1/2}\sigma_j^{1/2}\frac{\Sigma_i\Sigma_j}{r_{ij}}\Big) - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon\Big(\frac{4}{3}\,\pi\sigma_i^{3/2}\Big).$$

Для перехода к уравнениям Гамильтона вводятся гамильтониан

$$H = T + U \tag{1.12}$$

и обобщенные импульсы $\boldsymbol{p}_i$, Q_i:

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i} = \frac{2}{3}\,\pi\rho\sigma_i^{3/2}\boldsymbol{v}_i, \quad Q_i = \frac{\partial L}{\partial \Sigma_i} = \pi\rho\sigma_i^{1/2}\Sigma_i + \pi\rho\sigma_i^{1/2}\sum_{i\neq j}\sigma_j^{1/2}\frac{\Sigma_j}{r_{ij}}.$$

Далее обобщенные скорости $\boldsymbol{v}_i$, Σ_i выражаются через обобщенные импульсы $\boldsymbol{p}_i$, Q_i и подставляются в (1.12). Так как $\Sigma_i = Q_i/(\pi\rho\sigma_i^{1/2}) + O(\beta)$, то с точностью до членов порядка β^2 имеем

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{p}_i\Big(\frac{2}{3}\,\pi\rho\sigma_i^{3/2}\Big)^{-1} = \frac{2\boldsymbol{p}_i}{\tau_i\rho}, \quad \Sigma_i = (\pi\rho\sigma_i^{1/2})^{-1}\Big(Q_i - \sigma_i^{1/2}\sum_{i\neq j}\frac{Q_j}{r_{ij}}\Big). \tag{1.13}$$

С учетом этих формул получаем приближенное выражение для гамильтониана

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_i|^2}{\rho\tau_i} + \frac{Q_i^2}{2\pi\rho\sigma_i^{1/2}}\right) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{Q_iQ_j}{2\pi\rho r_{ij}} + \sum_{i=1}^{N}\varepsilon(\tau_i), \qquad \tau_i = \frac{4\pi\sigma_i^{3/2}}{3}. \tag{1.14}$$

Уравнения движения пузырьков в гамильтоновой форме имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt} = H_{\boldsymbol{p}_i}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = -H_{\boldsymbol{x}_i}, \quad \frac{d\sigma_i}{dt} = H_{Q_i}, \quad \frac{dQ_i}{dt} = -H_{\sigma_i}. \tag{1.15}$$

При $N = 1$ (движение одиночного пузырька) $H = |\boldsymbol{p}|^2/(\rho\tau) + Q^2/(2\pi\rho\sigma^{1/2}) + \varepsilon(\tau)$, а уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{2\boldsymbol{p}}{\rho\tau}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{Q}{\pi\rho\sigma^{1/2}}, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{Q^2}{4\pi\rho\sigma^{3/2}} + 2\pi\sigma^{1/2}\Big(p(\tau) - P + \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{\rho\tau^2}\Big). \tag{1.16}$$

Из векторных уравнений вытекает, что скорость пузырька задается соотношением $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{p}_0/(\rho\tau)$, $\boldsymbol{p}_0 = \rho\tau_0\boldsymbol{v}_0/2$, где τ_0, $\boldsymbol{v}_0$ — начальные значения объема и скорости. Из третьего уравнения системы (1.16) выражаем Q через радиус пузырька b и s: $Q = 2\pi\rho b^2 s$, где $s = b'$. Последнее уравнение в (1.16) сводится к уравнению Рэлея — Ламба

$$b\,\frac{ds}{dt} + \frac{3s^2}{2} = \frac{p(\tau) - P}{\rho} + \frac{|\boldsymbol{v}_0|^2\tau_0^2}{4\tau^2} \tag{1.17}$$

для движущегося пузырька. Отметим, что в уравнении (1.17) можно понизить порядок в силу того, что система Гамильтона всегда имеет интеграл $H = H_0 = \text{const}$. После небольших преобразований получаем уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\tau_0\boldsymbol{v}_0}{\tau}, \qquad \frac{db}{dt} = \pm\left(\frac{2(H_0 - \varepsilon(\tau))}{3\tau\rho} - \frac{|\boldsymbol{v}_0|^2\tau_0^2}{6\tau^2}\right)^{1/2}, \tag{1.18}$$

которые интегрируются в квадратурах. Решение уравнений (1.18) описывает периодические колебания пузырька при прямолинейном движении с переменной скоростью. Система (1.18) отличается от аналогичной системы в работе [11] наличием дополнительного члена, связанным с учетом сжимаемости пузырька.

В общем случае система (1.15) допускает следующие интегралы (законы сохранения импульса, момента импульса и энергии):

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_0 = \text{const}, \quad \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{q}_0 = \text{const}, \quad H = H_0 = \text{const}.$$

Закон сохранения импульса вытекает из инвариантности гамильтониана относительно преобразования переноса $\boldsymbol{x}_j' = \boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — произвольный постоянный вектор. Закон сохранения момента является следствием инвариантности гамильтониана относительно одновременного вращения $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{p}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$.

2. Вывод кинетических уравнений. В данной работе будет рассматриваться бесстолкновительный случай, при этом предполагается, что пузырьковая среда достаточно разрежена, так что столкновения пузырьков за характерные времена происходят очень редко. Основное уравнение кинетической модели является законом сохранения числа частиц в процессе движения. Рассмотрим N-частичную функцию распределения $f^{(N)}(t, \boldsymbol{x}_1, \sigma_1, \boldsymbol{p}_1, Q_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N, \sigma_N, \boldsymbol{p}_N, Q_N)$, которая в силу (1.15) удовлетворяет уравнению Лиувилля [12]

$$f_t^{(N)} + \sum_{k=1}^{N} \Big(\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}_k}(H_{\boldsymbol{p}_k} f^{(N)}) - \operatorname{div}_{\boldsymbol{p}_k}(H_{\boldsymbol{x}_k} f^{(N)}) + (H_{Q_k} f^{(N)})_{\sigma_k} - (H_{\sigma_k} f^{(N)})_{Q_k}\Big) = 0 \qquad (2.1)$$

и обращается в нуль при больших $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{p}_k$, σ_k, Q_k. Уравнение (2.1) является аналогом гидродинамического уравнения неразрывности для движения вдоль траекторий системы (1.15). Искомая функция в этом уравнении зависит от большого количества независимых переменных, построение его решений фактически сводится к интегрированию уравнений (1.15). Поэтому методом осреднения из него выводят более простые уравнения, описывающие эволюцию одночастичной функции распределения, задаваемой соотношением

$$\begin{gathered} f^{(1)}(t, \boldsymbol{x}_1, \sigma_1, \boldsymbol{p}_1, Q_1) = \int f^{(N)}\, d\Omega_1, \\ d\Omega_1 = d\boldsymbol{x}_2 \cdots d\boldsymbol{x}_N\, d\boldsymbol{p}_2 \cdots d\boldsymbol{p}_N d\sigma_2 \cdots d\sigma_N\, dQ_2 \cdots dQ_N. \end{gathered} \qquad (2.2)$$

После умножения уравнения (2.1) на $d\Omega_1$ и интегрирования по обобщенным координатам и импульсам $N-1$ частицы получаем уравнение, которому удовлетворяет функция $f^{(1)}$:

$$\begin{aligned} f_t^{(1)} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}_1}\Big(\int H_{\boldsymbol{p}_1} f^{(N)}\, d\Omega_1\Big) - \operatorname{div}_{\boldsymbol{p}_1}\Big(\int H_{\boldsymbol{x}_1} f^{(N)}\, d\Omega_1\Big) + {}& \\ + \Big(\int H_{Q_1} f^{(N)}\, d\Omega_1\Big)_{\sigma_1} - \Big(\int H_{\sigma_1} f^{(N)}\, d\Omega_1\Big)_{Q_1} = 0.& \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Вычислим интегральные члены этого уравнения. Так как $H_{\boldsymbol{p}_1} = \boldsymbol{v}_1$, то в силу (1.13), (2.1)

$$\int H_{\boldsymbol{p}_1} f^{(N)}\, d\Omega_1 = \frac{2\boldsymbol{p}_1 f^{(1)}}{\tau_1 \rho}.$$

Аналогично, используя равенства $H_{Q_1} = \Sigma_1$ и (1.13), получаем

$$\int H_{Q_1} f^{(N)}\, d\Omega_1 = \frac{Q_1 f^{(1)}}{\pi\rho\sigma^{1/2}} - \sum_{j\neq 1} \int \frac{Q_j f^{(2,j)}}{\pi\rho r_{1j}}\, d\Omega_{2j}. \qquad (2.4)$$

Здесь $d\Omega_{2j} = d\boldsymbol{x}_j\, d\boldsymbol{p}_j\, d\sigma_j\, dQ_j$, а двухчастичная функция распределения $f^{(2,j)}$ задается равенством

$$f^{(2,j)}(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, \sigma_1, Q_1, \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{p}_j, \sigma_j, Q_j) = \int f^{(N)}\, d\Omega_1^{(j)}$$

($d\Omega_1^{(j)}$ получается из $d\Omega_1$ отбрасыванием сомножителей, входящих в $d\Omega_{2j}$). Следовательно, для описания эволюции одночастичной функции распределения нужно выписать уравнение для двухчастичной функции и т. д. Поэтому для замыкания уравнений, как правило, привлекаются дополнительные предположения. Как и в работе [4], используем гипотезу “молекулярного хаоса”, согласно которой $f^{(2,j)} = f^{(1)}(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, \sigma_1, Q_1) f^{(1)}(t, \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{p}_j, \sigma_j, Q_j)$. Это позволяет представить второй член в правой части равенства (2.4) в виде

$$-\sum_{j\neq 1} \int \frac{Q_j f^{(2,j)}}{\pi\rho r_{1j}}\, d\Omega_{2j} = -4(N-1)\,\frac{f^{(1)}}{\rho} \int \frac{K_1}{4\pi|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|}\, d\boldsymbol{x}_2,$$

где $K_1(t,\boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\int Qf^{(1)}(t,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{p},\sigma,Q)\,d\boldsymbol{p}\,d\sigma\,dQ$. Заметим, что $-(4\pi|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|)^{-1}$ является функцией Грина для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Поэтому

$$\int H_{Q_1}f^{(N)}\,d\Omega_1 = \Big(\frac{Q_1}{\pi\rho\sigma_1^{1/2}} + \frac{4(N-1)\psi}{\rho}\Big)f^{(1)}, \quad \Delta\psi = K_1.$$

Так как

$$H_{\boldsymbol{x}_1} = -\frac{Q_1}{\pi\rho}\sum_{j\neq 1} Q_j\nabla_{\boldsymbol{x}_1}(r_{1j})^{-1},$$

то аналогично получаем

$$\int H_{\boldsymbol{x}_1}f^{(N)}\,d\Omega_1 = 4Q_1(N-1)f^{(1)}\nabla\psi/\rho.$$

Заметим, что H_{σ_1} зависит только от координат и импульсов первой частицы, поэтому

$$\int H_{\sigma_1}f^{(N)}\,d\Omega_1 = H_{\sigma_1}f^{(1)}.$$

Подставляя полученные выражения в (2.3), выпишем кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения

$$f_t^{(1)} + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\Big(\frac{2\boldsymbol{p}f^{(1)}}{\tau\rho}\Big) - 4(N-1)\mathrm{div}_{\boldsymbol{p}}\Big(Q\,\frac{f^{(1)}\nabla\psi}{\rho}\Big) + \\ + ((Q(\rho\pi\sigma^{1/2})^{-1} + 4(N-1)\rho^{-1}\psi)f^{(1)})_\sigma - (H_{\sigma_1}f^{(1)})_Q = 0.$$

Полагая $f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\sigma,Q) = Nf^{(1)}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\sigma,Q)$ и переходя к пределу $N\to\infty$, получим кинетические уравнения

$$f_t + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(H_{\boldsymbol{p}}f) - \mathrm{div}_{\boldsymbol{p}}(H_{\boldsymbol{x}}f) + (H_Qf)_\sigma - (H_\sigma f)_Q = 0 \qquad (2.5)$$

с гамильтонианом вида

$$H = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{\rho\tau} + \frac{Q^2}{2\rho\pi\sigma^{1/2}} + \frac{4\psi Q}{\rho} + \varepsilon(\tau). \qquad (2.6)$$

Здесь $\tau = (4/3)\pi\sigma^{3/2}$, а функция ψ, определяющая самосогласованное поле, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\psi = K, \qquad K = \int Qf\,d\boldsymbol{p}\,d\sigma\,dQ. \qquad (2.7)$$

Уравнения (2.5)–(2.7) описывают эволюцию одночастичной функции распределения сжимаемых пузырьков при их движении в идеальной несжимаемой жидкости. Эту систему можно рассматривать как модельную, учитывающую эффект коллективного взаимодействия пузырьков в первом приближении. Для повышения точности приближения нужно учесть следующие члены асимптотического разложения кинетической энергии жидкости.

В силу того, что уравнения (1.15) допускали интегралы, уравнения (2.5)–(2.7) в качестве следствий имеют гидродинамические законы сохранения

$$\Big(\int f d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma\Big)_t + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\Big(\int H_{\boldsymbol{p}}f\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma\Big) = 0,$$

$$\Big(\int \boldsymbol{p}f\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma\Big)_t + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\Big(\int(\boldsymbol{p}\otimes H_{\boldsymbol{p}})f\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma + 4\rho^{-1}\nabla\psi\otimes\nabla\psi - 2\rho^{-1}|\nabla\psi|^2I\Big) = 0, \qquad (2.8)$$

$$\Big(\int Hf\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma + 2\rho^{-1}|\nabla\psi|^2\Big)_t + \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}\Big(\int HH_{\boldsymbol{p}}f\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma - 4\rho^{-1}\psi_t\nabla\psi\Big) = 0.$$

Здесь дивергенция тензора T определяется следующим образом: $\operatorname{div} T\cdot\boldsymbol{a} = \operatorname{div}(T^*\langle\boldsymbol{a}\rangle)$; $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор; T^* — сопряженное отображение [13]. Следствием уравнений (2.8) является закон сохранения момента импульса

$$\Big(\int(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})f\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma\Big)_t + \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}\Big(\int((\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p})\otimes H_{\boldsymbol{p}})f\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma + 4\rho^{-1}(\boldsymbol{x}\times\nabla\psi)\otimes\nabla\psi\Big) - {}$$
$$- 2\rho^{-1}\operatorname{rot}(\boldsymbol{x}|\nabla\psi|^2) = 0.$$

Законы сохранения (2.8) можно использовать для вывода уравнений гидродинамического приближения. В качестве дополнительного можно взять неоднородный закон сохранения

$$\Big(\int Qf\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma\Big)_t + \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}\Big(\int QH_{\boldsymbol{p}}f\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma\Big) + \int H_\sigma f\,d\boldsymbol{p}\,dQ\,d\sigma = 0.$$

3. Стационарные решения. Легко видеть, что если f не зависит от t, то равенство $f = \Phi(H)$ задает точное решение уравнения (2.5). Для определения функции ψ получаем уравнение

$$\Delta\psi = L(\psi), \qquad L(\psi) = \int Qf(H)\,d\boldsymbol{p}\,d\sigma\,dQ.$$

В одномерном случае, когда $\psi_{xx} = L(\psi)$, это уравнение можно один раз проинтегрировать: $\psi_x^2/2 = \chi(\psi)$, $\chi(\psi) = \int L(\psi)\,d\psi$ и свести к квадратурам. Конкретизируя функцию $f(H)$, можно получать различные решения, в том числе периодические волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Biesheuvel A., van Wijngaarden L.** Two-phase flow equations for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid // J. Fluid Mech. 1984. V. 148. P. 301–318.
2. **Kok J. B.** The Fokker — Plank equation for bubbly flows and the motion of gas bubble pairs // Appl. Sci. Res. 1997/1998. V. 58, N 1/4 . P. 319–335.
3. **Biesheuvel A., Gorissen W. C. M.** Void fraction disturbance in a uniform bubbly liquid // J. Multuphase Flow. 1990. V. 16. P. 211–231.
4. **Russo G., Smereka P.** Kinetic theory for bubbly flow I: collisionless case // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56, N 2. P. 327–357.
5. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. Ч. 1, 2.
6. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983.
7. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973.
8. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
9. **Воинов О. В., Головин А. М.** Уравнения Лагранжа для системы пузырей изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 3. С. 117–123.

10. **Гарипов Р. М.** Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками // ПМТФ. 1973. № 6. С. 3–24.
11. **Воинов О. В.** Движение сферы переменного радиуса в идеальной жидкости около плоской поверхности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1971. № 5. С. 94–103.
12. **Либов Р.** Введение в теорию кинетических уравнений. М.: Мир, 1974.
13. **Овсянников Л. В.** Введение в механику сплошных сред. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1976. Ч. 1.

Поступила в редакцию 7/VII 2000 г.