

**ЛОКАЛЬНО СГЛАЖИВАЮЩИЙ  
ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ  
КОНТРАСТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ****Ю. Е. Воскобойников, Л. А. Литвинов**

*Новосибирский государственный  
архитектурно-строительный университет, г. Новосибирск  
E-mail: voscob@mail.ru*

Предлагается новый алгоритм восстановления контрастных изображений, представляющий собой комбинацию итерационного алгоритма минимизации квадратического функционала и локального сглаживающего алгоритма. Вводится функция рассеяния точки итерационного алгоритма и предлагается способ ее вычисления. Момент останова итерационного алгоритма находится по требуемой разрешающей способности итерационного алгоритма, которая определяется по функции рассеяния точки. Используемый локальный фильтр позволяет существенно уменьшить случайную ошибку восстановления изображения, не увеличивая при этом систематическую ошибку.

**Введение.** В общем случае математической моделью линейных систем, регистрирующих изображения, является двумерное интегральное уравнение Фредгольма I рода [1]

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} k(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = f(t_1, t_2), \quad (1)$$

где  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  – исходное (измеряемое) изображение;  $f(t_1, t_2)$  – регистрируемое изображение;  $k(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$  – импульсная функция регистрирующей системы, часто называемая функцией рассеяния точки (ФРТ). Если регистрирующая система обладает свойством изоморфности (или стационарности), то в качестве математической модели выступает двумерное уравнение Фредгольма с разностным ядром [1, 2]

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} k(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = f(t_1, t_2). \quad (2)$$

Из-за «инерционности» регистрирующей системы (ФРТ не является  $\delta$ -функцией) изображение  $f(t_1, t_2)$  может весьма существенно отличаться от  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ . Поэтому возникает задача восстановления изображения [1, 2]: по зарегистрированному изображению  $f(t_1, t_2)$  необходимо определить (оценить) изображение  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$  (или его значения в заданных узлах), т. е. решить интегральные уравнения (1), (2) относительно  $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ .

В общем случае решение уравнений (1), (2) является некорректно поставленной задачей [3, 4]. Развитые в последние четыре десятилетия методы регуляризации [3, 4] позволяют строить регуляризованные решения, устойчивые к погрешностям регистрации выходного изображения  $f(t_1, t_2)$ . Для уравнения (2) регуляризирующие алгоритмы строятся на основе дискретного преобразования Фурье и алгоритма быстрого преобразования Фурье [4], включая случай неточно заданной импульсной функции измерительной системы [5, 6]. При использовании модели (1) исходное интегральное уравнение аппроксимируется двойной суммой

$$\sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} k(j_1, j_2, i_1, i_2) \varphi(i_1, i_2) = f(j_1, j_2), \quad (3)$$

$$1 \leq j_1 \leq N_1; \quad 1 \leq j_2 \leq N_2.$$

Здесь  $\varphi(i_1, i_2)$ ,  $f(j_1, j_2)$  – элементы матриц  $\Phi$  и  $F$  размерами  $M_1 \times M_2$  и  $N_1 \times N_2$  соответственно.

Для использования итерационных алгоритмов необходимо двойную сумму (3) представить системой линейных алгебраических уравнений относительно вектора  $\varphi$ . Для этого воспользуемся лексикографической связью между изображениями  $\Phi$ ,  $F$  и векторами  $\varphi$ ,  $f$  [1, с. 133, 134]. Приходим к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$K\varphi = f, \quad (4)$$

где элементы матрицы  $K$  размера  $(N_1 N_2) \times (M_1 M_2)$  определяются соответствующими значениями  $k(j_1, j_2, i_1, i_2)$ .

Из-за ошибок аппроксимации уравнения (1) системой (3) и погрешностей регистрации изображения  $f(t_1, t_2)$  система (4) не совместна и в качестве ее приближенного решения принимается вектор нормального псевдорешения [3, 4, 7]. Для устойчивого вычисления нормального псевдорешения при неточно заданном векторе  $f$  используют итерационные алгоритмы, в которых роль параметра регуляризации выполняет номер итерации останова  $n_s$ . Показано [8], что при увеличении  $n_s$  уменьшается систематическая ошибка, но увеличивается случайная ошибка получаемого решения. Поэтому существует оптимальная итерация (с номером  $n_{\text{opt}}$ ), для которой достигается минимум среднеквадратической ошибки (СКО) решения. В работах [8–10] предложены алгоритмы, позволяющие с приемлемой точностью оценить  $n_{\text{opt}}$ . Однако во многих случаях регуляризованное изображение  $\varphi^{(n_s)}$ , построенное при  $n_s = n_{\text{opt}}$ , воспринимается глазом хуже, чем изображение, построенное при  $n_s > n_{\text{opt}}$ . Это объясняется тем, что в первом изображении отсутствуют (или сильно сглажены) контрастные (высокочастотные) детали (границы, ребра,  $\delta$ -образные составляющие), а во втором изображении сохранение контрастных деталей сопровождается появлением шумовых осцилляций на плоских

фрагментах изображения. В этом проявляется известное противоречие между разрешающей способностью регуляризирующего алгоритма и его устойчивостью к погрешностям исходных данных.

Поэтому в представленной работе предлагается новый подход к построению итерационного алгоритма восстановления изображений, в котором:

- вводится понятие функции рассеяния точки итерационного алгоритма, предлагается алгоритм вычисления ФРТ и определяются точностные характеристики, отражающие разрешающую способность алгоритма восстановления;

- номер итерации останова определяется по заданным точностным характеристикам;

- для фильтрации случайной ошибки используются нелинейные локальные фильтры, сохраняющие контрастные детали в восстановленном изображении и эффективно подавляющие случайную ошибку.

Такое объединение итерационного алгоритма с нелинейным локальным фильтром назовем локально сглаживающим итерационным алгоритмом. Первоначально определим ФРТ итерационных алгоритмов восстановления изображения.

**Функция рассеяния точки итерационных алгоритмов.** Псевдорешением несовместной системы (4) называется вектор  $\varphi_{\text{МНК}}$ , доставляющий минимум функционалу метода наименьших квадратов:

$$F(\varphi, f) = \|f - K\varphi\|^2, \quad (5)$$

где  $\|\cdot\|$  означает евклидову норму вектора. Если матрица  $K$  вырождена, то в качестве приближенного решения системы (4) принимают нормальное псевдорешение  $\varphi^+$  – вектор, имеющий минимальную норму среди всех векторов  $\varphi_{\text{МНК}}$ .

Предположим, что вместо вектора  $f$  (правой части системы (4)) задан вектор  $\tilde{f} = f + \eta$ , где  $\eta$  – случайный вектор с нулевым средним ( $M_\eta[\eta] = \bar{0}$  – нулевой вектор) и ковариационной матрицей  $V_\eta = M_\eta[\eta\eta^T]$  (здесь  $T$  – символ транспонирования). Вектор  $\eta$  отражает случайные погрешности, возникающие при регистрации, квантовании и передаче изображений. Тогда из-за плохой обусловленности матрицы  $K$  (число обусловленности матрицы  $K$  может достигать  $10^{10}$  и более высоких значений) процедура вычисления  $\varphi^+$  является неустойчивой к погрешности задания вектора  $f$ . Это означает, что вектор  $\tilde{\varphi}^+$ , вычисленный с использованием одной из минимизирующих процедур [10–12]

$$\tilde{\varphi}^{(n+1)} = T(\tilde{\varphi}^{(n)}, \tilde{f}) \quad (6)$$

и удовлетворяющий критерию останова

$$\|\tilde{\varphi}^{(n+1)} - \tilde{\varphi}^{(n)}\| / \|\tilde{\varphi}^{(n)}\| \leq \mu, \quad (7)$$

где  $\mu$  – малая величина ( $\approx 10^{-4} - 10^{-3}$ ), существенно отличается от вектора  $\varphi^+$ , определенного для точно заданной правой части.

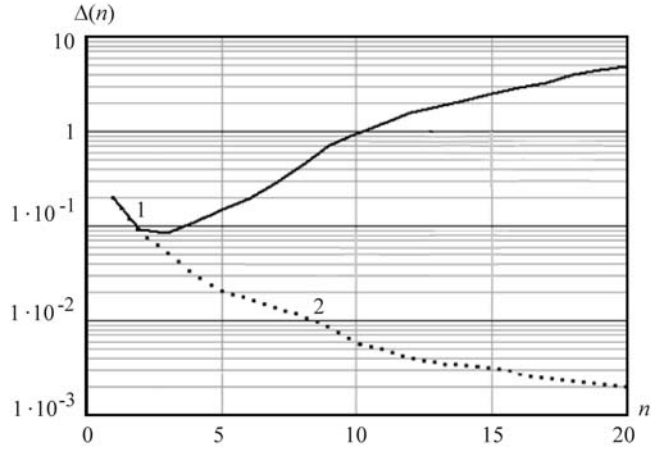


Рис. 1

В качестве числовой характеристики ошибки решения  $\varepsilon^{(n)} = \tilde{\varphi}^{(n)} - \varphi^+$  примем СКО, определяемую функционалом

$$\Delta(n) = M_{\eta} \left[ \left\| \tilde{\varphi}^{(n)} - \varphi^+ \right\|^2 \right] = M_{\eta} \left[ \left\| \varepsilon^{(n)} \right\|^2 \right], \quad (8)$$

где  $M_{\eta}[\cdot]$  – математическое ожидание по ансамблю случайного вектора  $\eta$ , от которого зависит решение  $\tilde{\varphi}^{(n)}$ . На рис. 1 показан график  $\Delta(n)$  (кривая 1 при относительном уровне шума 0,01), который при неточно заданной правой части имеет убывающую ветвь (обусловленную уменьшением систематической ошибки решения) и возрастающую ветвь (увеличение случайной ошибки решения) [8]. Если правая часть задана точно, то  $\Delta(n)$  является невозрастающей функцией (кривая 2) и определяется только систематической ошибкой восстановления. Из поведения функционала  $\Delta(n)$  (кривая 1) видно, что номер итерации может исполнять роль параметра регуляризации, т. е. за счет выбора номера итерации останова  $n_S$  получать решения с различной СКО (8). Так, приняв  $n_S = n_{\text{opt}}$  ( $n_{\text{opt}} = 3$  – точка минимума  $\Delta(n)$  для данного случая), имеем приближенное решение с наименьшим СКО.

Во введении отмечалось, что в изображении, построенном при оптимальной итерации, могут отсутствовать контрастные детали исходного изображения. Поэтому необходим новый подход к выбору номера итерации, который гарантировал бы сохранение контрастных деталей заданных размеров. Для развития такого подхода рассмотрим двумерную ФРТ итерационного алгоритма восстановления изображения. В качестве входного воздействия определим дискретную  $\delta$ -функцию (далее  $d$ -функция):

$$d(i_1, i_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } i_1 = 0, i_2 = 0, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases} \quad (9)$$

Подставив (9) в (3), получим

$$\sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} k(j_1, j_2, i_1, i_2) d(i_1 - i_1^*, i_2 - i_2^*) = k(j_1, j_2, i_1^*, i_2^*), \quad (10)$$

т. е. реакция дискретной системы (3) в точке  $(j_1, j_2)$  на входное воздействие в виде  $d$ -функции в точке  $(i_1^*, i_2^*)$  определяется значением  $k(j_1, j_2, i_1^*, i_2^*)$ . Если динамическая система является стационарной, то ФРТ зависит только от разности соответствующих аргументов:

$$k(j_1, j_2, i_1^*, i_2^*) = k(j_1 - i_1^*, j_2 - i_2^*). \quad (11)$$

Введем в рассмотрение аппаратно-алгоритмическую виртуальную систему «прибор–алгоритм», на входе которой имеется изображение  $\varphi(i_1, i_2)$ , а на выходе – изображение  $\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ , построенное итерационным алгоритмом (6). Разрешающую способность этой системы можно охарактеризовать функцией рассеяния точки (обозначим ее как  $h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2)$ ) на  $n$ -й итерации. Данная функция определяется приближенным решением  $\bar{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ , которое соответствует входному изображению, задаваемому  $d$ -функцией  $d(i_1 - i_1^*, i_2 - i_2^*)$ , приложенной в точке  $(i_1^*, i_2^*)$ . Предполагается, что погрешности регистрации изображения  $f(j_1, j_2)$  отсутствуют, т. е.  $\eta(j_1, j_2) \equiv 0$ , и это отражается горизонтальной чертой над обозначением изображений (например,  $\bar{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ ).

Так как в большинстве практических случаев задать  $d$ -функцию на входе измерительной системы затруднительно, исходным изображением для итерационного алгоритма является точное изображение  $f_{(i_1^*, i_2^*)}(j_1, j_2)$ , которое соответствует входному изображению  $d(i_1 - i_1^*, i_2 - i_2^*)$ . С учетом выражения (10) это изображение можно определить соотношением

$$\bar{f}_{(i_1^*, i_2^*)}(j_1, j_2) = k(j_1, j_2, i_1^*, i_2^*). \quad (12)$$

Таким образом, ФРТ системы «прибор–алгоритм» задается решением  $\bar{\varphi}_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2)$ , порождаемым используемым итерационным алгоритмом и изображением (12), т. е.

$$h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2) = \bar{\varphi}_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2). \quad (13)$$

Видим, что в общем случае ФРТ  $h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2)$  зависит от точки  $(i_1^*, i_2^*)$  приложения  $d$ -функции. Если имеет место свойство (11), то ФРТ будет зависеть только от разностей аргументов  $i_1 - i_1^*, i_2 - i_2^*$ .

Заметим, что предложенный подход к вычислению ФРТ системы «прибор–алгоритм» позволяет одновременно и восстанавливать изображе-

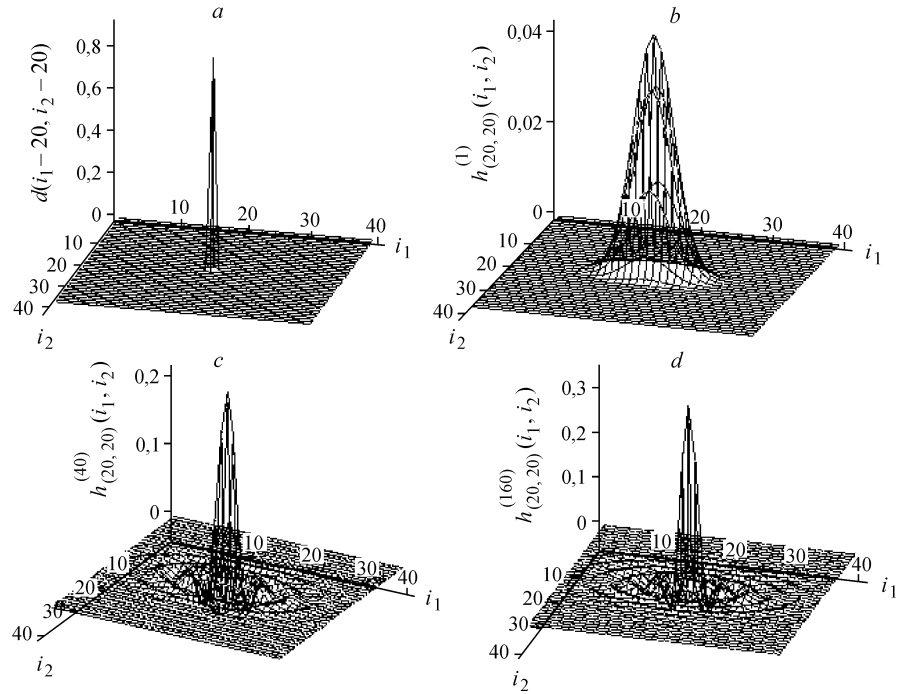


Рис. 2

ние (т. е. строить решение  $\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$  по заданному изображению  $\tilde{f}^{(n)}(i_1, i_2)$ ), и вычислять ФРТ  $h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2)$ , которая характеризует сглаживающие свойства и разрешающую способность системы «прибор–алгоритм» в целом. Очевидно, что эти свойства меняются в зависимости от номера итерации. Данное обстоятельство можно использовать для выбора момента останова итерационного алгоритма восстановления изображения.

В качестве иллюстрации этого тезиса на рис. 2, *a* приведена *d*-функция  $d(i_1 - 20, i_2 - 20)$ , а на рис. 2, *b–d* – ФРТ системы «прибор–алгоритм» для  $n = 1$ ,  $n = 40$  и  $n = 160$  соответственно (размер изображения  $40 \times 40$  пикселей). Видно, что при увеличении номера итерации ФРТ приближается к *d*-функции. Если ФРТ системы «прибор–алгоритм» на итерации  $n^*$  является *d*-функцией  $d(i_1 - i_1^*, i_2 - i_2^*)$ , то такая система не вносит искажений (отсутствует систематическая ошибка в решении  $\bar{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ ). Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^{(n^*)}(i_1^*, i_2^*) &= \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n^*)}(i_1, i_2) \varphi(i_1, i_2) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} d(i_1 - i_1^*, i_2 - i_2^*) \varphi(i_1, i_2) = \varphi(i_1^*, i_2^*). \end{aligned} \quad (14)$$

Однако при увеличении номера итерации  $n$  возрастает случайная ошибка восстановления, обусловленная передачей погрешностей  $\eta(j_1, j_2)$  в решение  $\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ , что является ограничением сверху на число итераций.

**Числовые характеристики ФРТ системы «прибор–алгоритм».** Отклонение ФРТ системы от  $d$ -функции можно определить величиной значений  $h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2)$  при  $i_1 \neq i_1^*, i_2 \neq i_2^*$ . Чем больше эти значения по модулю, тем больше сглаживающие свойства системы «прибор–алгоритм» и хуже ее разрешающая способность.

Поэтому введем следующие числовые характеристики:

$$\omega_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*) = \frac{\Delta \sum_{i_1=1}^{M_1} \left| h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2^*) \right|}{h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1^*, i_2^*)},$$

$$\omega_2^{(n)}(i_1^*, i_2^*) = \frac{\Delta \sum_{i_2=1}^{M_2} \left| h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1^*, i_2) \right|}{h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1^*, i_2^*)}$$

(здесь  $\Delta$  – шаг дискретизации изображений), которые определяют «эквивалентную ширину» ФРТ по оси  $i_1$  (характеристика  $\omega_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*)$ ) и по оси  $i_2$  (характеристика  $\omega_2^{(n)}(i_1^*, i_2^*)$ ).

Дополнительно введем еще две характеристики, определяющие ширину ФРТ на уровне 0,4 от максимальной амплитуды ФРТ:

$$\delta_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*) = 2\tau_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*)\Delta,$$

$$\delta_2^{(n)}(i_1^*, i_2^*) = 2\tau_2^{(n)}(i_1^*, i_2^*)\Delta,$$

где  $\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}$  – корни нелинейных уравнений

$$h_{d(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(\tau_1, i_2^*) = 0,4 h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1^*, i_2^*),$$

$$h_{d(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1^*, \tau_2) = 0,4 h_{(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1^*, i_2^*).$$

Функция  $h_{d(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(\tau_1, i_2^*)$  получается интерполированием (с помощью кубического сплайна) значений  $h_{d(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1, i_2^*)$  по дискретной переменной  $i_1$ , а функция  $h_{d(i_1^*, i_2^*)}^{(n)}(i_1^*, \tau_2)$  – интерполированием по переменной  $i_2$ . Графики этих характеристик в зависимости от номера итерации  $n$  (шаг дискретизации  $\Delta = 1$ ) приведены на рис. 3: кривая 1 –  $\omega_1^{(n)}(20, 20)$ , кривая 2 –  $\omega_2^{(n)}(20, 20)$ , кривая 3 –  $\delta_1^{(n)}(20, 20)$ , кривая 4 –  $\delta_2^{(n)}(20, 20)$ . Видно, что с увеличением  $n$  значения характеристик монотонно уменьшаются.

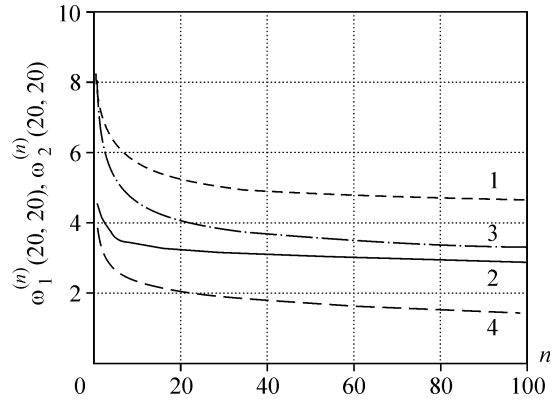


Рис. 3

Геометрическая трактовка введенных характеристик достаточно проста. Если расстояние между контрастными элементами (расположенными в окрестности точки  $(i_1^*, i_2^*)$ ) по переменной  $\tau_1$  в исходном изображении больше  $\omega_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*)$ ,  $\delta_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*)$ , то эти элементы проявятся в изображении  $\bar{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ . Аналогично можно интерпретировать и  $\omega_2^{(n)}$ ,  $\delta_2^{(n)}$ . Величины  $\delta_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*)$  и  $\delta_2^{(n)}(i_1^*, i_2^*)$  также трактуются как минимальные размеры объекта (расположенного в окрестности точки  $(i_1^*, i_2^*)$ ), который будет сохранен в восстановленном изображении  $\bar{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ .

Таким образом, введенные характеристики определяют размеры контрастных деталей, которые сохраняются (с некоторыми искажениями) в изображении  $\bar{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ , и разрешающую способность итерационного алгоритма восстановления изображений. Следовательно, их можно назвать точностными характеристиками итерационного алгоритма восстановления изображений.

Используя эти характеристики, можно вычислить номер итерации, на которой алгоритм имеет необходимую разрешающую способность, т. е. в определенном смысле решить задачу синтеза итерационного алгоритма восстановления изображения.

**Выбор номера итерации останова по заданной разрешающей способности.** Для итерационных алгоритмов вида (6) характерно противоречие между разрешающей способностью и устойчивостью приближенных решений, а именно с увеличением номера итерации уменьшается систематическая ошибка решения (методическая ошибка алгоритма), но увеличивается случайная ошибка.

Учитывая это противоречие, приходим к следующему правилу останова: итерационный алгоритм восстановления изображений завершается, как только будет достигнута требуемая разрешающая способность, определяемая числовыми характеристиками ФРТ системы «прибор–алгоритм».

Использование различных числовых характеристик приводит к алгоритмам нахождения момента останова.



**А л г о р и т м А.** Итерационный алгоритм останавливается на номере итерации  $n_{\omega}^*$ , равном наименьшему номеру, на котором выполняется неравенство

$$\max(\omega_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*), \omega_2^{(n)}(i_1^*, i_2^*)) \leq \omega_{\text{пр}}, \quad (15)$$

где  $\omega_{\text{пр}}$  – предельное значение эквивалентной ширины ФРТ.

**А л г о р и т м В.** Итерационный алгоритм останавливается на номере итерации  $n_{\delta}^*$ , равном наименьшему номеру, на котором выполняется неравенство

$$\max(\delta_1^{(n)}(i_1^*, i_2^*), \delta_2^{(n)}(i_1^*, i_2^*)) \leq \delta_{\text{пр}}, \quad (16)$$

где  $\delta_{\text{пр}}$  – предельное значение ширины ФРТ на уровне 0,4. Из-за дискретности ФРТ итерационного алгоритма введем ограничения:

$$\delta_{\text{пр}} \geq 3\Delta; \quad \omega_{\text{пр}} \geq 3\Delta. \quad (17)$$

Значения индексов  $i_1^*, i_2^*$  задаются исходя из положения контрастного элемента, который должен сохраниться в изображении  $\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ , или из условия максимума числовых характеристик ФРТ.

**Пространственная фильтрация восстановленного изображения.** Изображение  $\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ , вычисленное на  $n$ -й итерации процедуры (6), можно представить в следующем виде:

$$\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2) = \varphi(i_1, i_2) + b^{(n)}(i_1, i_2) + \xi^{(n)}(i_1, i_2), \quad (18)$$

где  $b^{(n)}(i_1, i_2)$  – систематическая ошибка (ФРТ системы «прибор–алгоритм» отлична от  $d$ -функции);  $\xi^{(n)}(i_1, i_2)$  – случайная ошибка, обусловленная передачей погрешностей  $\eta(i_1, i_2)$  в изображение  $\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ .

Возникает вопрос: можно ли дальнейшей обработкой восстановленного изображения уменьшить общую ошибку восстановления  $\varepsilon^{(n)}(i_1, i_2) = b^{(n)}(i_1, i_2) + \xi^{(n)}(i_1, i_2)$ ? Ответ будет положительным, если использовать алгоритм обработки изображения  $\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ , который бы не увеличивал (или увеличивал незначительно) систематическую ошибку и существенно уменьшал случайную ошибку. Такой алгоритм можно построить на основе локальных нелинейных фильтров, выходной сигнал которых является результатом операций (в большинстве случаев нелинейных) над значениями обрабатываемого изображения, попавшими в апертуру фильтра размером намного меньше размера изображения. Одним из таких фильтров является медианный фильтр [13].

Для пояснения принципа работы этого фильтра предположим, что даны значения некоторого зашумленного одномерного сигнала  $\tilde{\varphi}_j = \varphi_j + \xi_j$ , где

$\xi_j$  – случайный шум. Тогда выходной сигнал  $\varphi_j^M$  медианного фильтра определяется соотношением

$$\varphi_j^M = \text{med}_L(\tilde{\varphi}_{j-L}, \tilde{\varphi}_{j-L+1}, \dots, \tilde{\varphi}_j, \dots, \tilde{\varphi}_{j+L}),$$

где  $\text{med}_L(\cdot)$  – функция, вычисляющая медиану из значений, указанных в скобках. Величину  $L$  можно интерпретировать как размер апертуры медианного фильтра. Перемещая апертуру фильтра по всем значениям  $\tilde{\varphi}_j$ , вычисляем значения  $\varphi_j^M$  для всего исходного сигнала.

Известно, что медианный фильтр хорошо фильтрует импульсный шум, но плохо низкоамплитудный. Поэтому в работе [13] предложен класс комбинированных фильтров (КФ), которые представляют собой последовательное соединение медианного фильтра, удаляющего импульсный шум, и некоторой модификации фильтра скользящего среднего, удаляющего низкоамплитудный шум с сохранением контрастных деталей сигнала.

Работу КФ «медианный фильтр + интервальный фильтр скользящего среднего» можно представить следующими шагами, выполняемыми для  $j \in [1, \dots, N]$ :

Шаг 1. Строится оценка

$$\varphi_j^M = \text{med}_L(\tilde{\varphi}_{j-L}, \dots, \tilde{\varphi}_j, \dots, \tilde{\varphi}_{j+L}). \quad (19)$$

Шаг 2. Строится оценка

$$\varphi_j^{\text{КФ}} = \text{aver}_K(\tilde{\varphi}_i: j-K \leq i \leq j+K, |\varphi_i^M - \varphi_j^M| \leq \beta), \quad (20)$$

где  $\text{aver}_K(\cdot)$  – операция усреднения;  $L, K$  – размеры апертур фильтров, причем  $K \geq L$ . Заметим, что на шаге 2 усредняются только те значения  $\varphi_i^M$ , которые попали в интервал  $[\varphi_j^M - \beta, \varphi_j^M + \beta]$ . Такое интервальное усреднение предотвращает сглаживание контрастных деталей сигнала  $\varphi_j$ .

Описанный алгоритм фильтрации одномерного сигнала легко обобщается на фильтрацию восстановленного изображения  $\tilde{\varphi}^{(n)} = \{\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)\}$ . Для этого операция вычисления медианы (19) будет осуществляться над значениями  $\tilde{\varphi}^{(n)}(i_1, i_2)$ , попавшими в апертуру размером  $(2L_1 + 1) \times (2L_2 + 1)$  с центром  $(j_1, j_2)$ , а интервальное усреднение (20) – над значениями, попавшими в апертуру размером  $(2K_1 + 1) \times (2K_2 + 1)$ .

Выбор величины  $\beta$  играет существенную роль в работе рассматриваемого комбинированного фильтра (19), (20). Для определения  $\beta$  предлагается следующий подход. Предположим, что изображение  $\varphi^M(i_1, i_2)$ , являющееся результатом медианной фильтрации, содержит «остаточную» случайную ошибку с дисперсией  $\sigma_M^2$ . Тогда величину  $\beta$  алгоритма интервального усреднения можно определить по правилу  $3\sigma$ :

$$\beta = 3\sigma_M. \quad (21)$$

Для оценивания дисперсии  $\sigma_M^2$  используется алгоритм работы [14].

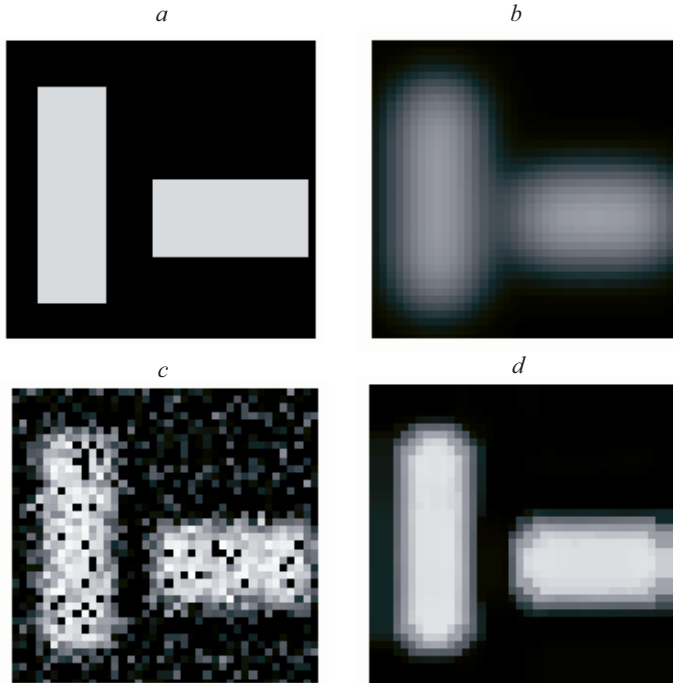


Рис. 4

**Результаты вычислительного эксперимента.** Проиллюстрируем работу предлагаемого локально сглаживающего итерационного алгоритма следующим примером. Исходное изображение  $\varphi(i_1, i_2)$  размером  $40 \times 40$  пикселей показано на рис. 4, *a*, а зарегистрированное изображение  $f(j_1, j_2)$  такого же размера (без погрешностей) – на рис. 4, *b*. Видно, что границы прямоугольников существенно сгладились, – это свидетельствует о плохой обусловленности матрицы  $K$  (действительно, число обусловленности  $\sim 10^{20}$ ).

Изображение  $f(j_1, j_2)$  искажалось погрешностями с относительным уровнем

$$\delta_f = \frac{\|\eta(j_1, j_2)\|}{\|f(j_1, j_2)\|} = 0,020,$$

где  $\|\cdot\|$  означает евклидову норму матрицы. Изображение  $\tilde{f}(j_1, j_2)$  являлось исходным для восстановления с помощью алгоритма GMRES [15]. Так как расстояние между двумя прямоугольниками равно 6 пикселей, то из неравенства (16), задав  $\delta_{\text{пр}} = 6$ , находим номер итерации останова  $n_{\delta_1}^* = 8$ . Изображение  $\tilde{\varphi}^{(8)}(i_1, i_2)$ , для которого относительная ошибка

$$\delta_{\varphi}^{(8)} = \frac{\|\tilde{\varphi}^{(8)}(j_1, j_2) - \varphi(j_1, j_2)\|}{\|\varphi(j_1, j_2)\|} = 0,358,$$

показано на рис. 4, *c*. Далее  $\tilde{\varphi}^{(8)}(i_1, i_2)$  обрабатывалось рассмотренным комбинированным алгоритмом фильтрации ( $\beta = 18,6$ ). Отфильтрованное изображение представлено на рис. 4, *d*. Для этого изображения относительная ошибка равна 0,104, и в нем отчетливо проявились два прямоугольника, из которых состоит исходное контрастное изображения.

**Заключение.** Предложенный в данной работе алгоритм восстановления позволяет в определенной степени преодолеть противоречие между разрешающей способностью и устойчивостью, которое характерно регулирующим алгоритмам восстановления изображений. Альтернативой используемому комбинированному фильтру с фиксированными размерами апертуры может быть адаптивный фильтр. Размеры апертуры такого фильтра изменяются в зависимости от особенностей обрабатываемого фрагмента изображения. При попадании в апертуру контрастных элементов ее размеры уменьшаются, при обработке однородного фрагмента размеры апертуры увеличиваются [16, 17]. Это позволит более эффективно отфильтровать случайную ошибку восстановленного изображения при сохранении контрастных элементов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Кн. 1. М.: Мир, 1982.
2. Цифровая обработка сигналов в информационных системах: Уч. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
4. Морозов В. А., Гребенников А. И. Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992.
5. Воскобойников Ю. Е., Литасов В. А. Устойчивый алгоритм восстановления изображения при неточно заданной аппаратной функции // Автометрия. 2006. 42, № 6. С. 3.
6. Voskoboïnikov Yu. E., Litasov V. A. Regularizing algorithm of two dimensional deconvolution with noised kernel // Тр. Междунар. конф. «Тихонов и современная математика». М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 67.
7. Воскобойников Ю. Е. Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации. Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2006.
8. Воскобойников Ю. Е., Литвинов Л. А. Выбор момента останова в итерационных алгоритмах восстановления сигналов и изображений // Автометрия. 2004. 40, № 4. С. 3.
9. Воскобойников Ю. Е., Литвинов Л. А. Оценивание момента останова итерационных алгоритмов решения плохо обусловленных СЛАУ. Новосибирск, 2006. 36 с. (Препр. /НГАСУ).
10. Calvetti D., Lewis B., Reichel L. On the choice of subspace for iterative methods for linear discrete ill-posed problems // Intern. Journ. Appl. Math. Comp. Sci. 2001. 11, N 5. P. 1069.
11. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
12. Гилязов С. Ф. Методы решения линейных некорректных задач. М.: Изд-во МГУ, 1987.
13. Бронников А. В., Воскобойников Ю. Е. Комбинированные алгоритмы нелинейной фильтрации зашумленных сигналов и изображений // Автометрия. 1990. № 1. С. 21.

14. **Воскобойников Ю. Е.** Комбинированный нелинейный алгоритм восстановления контрастных изображений при неточно заданной аппаратной функции // *Автометрия*. 2007. **43**, № 6. С. 3.
15. **Calvetti D., Lewis B., Reichel L.** GMRES-type methods for inconsistent systems // *Linear Algebra and Its Appl.* 2000. **316**, N 2. P. 157.
16. **Белявцев В. Г., Воскобойников Ю. Е.** Алгоритмы фильтрации изображений с адаптацией размеров апертуры // *Автометрия*. 1998. № 3. С. 18.
17. **Воскобойников Ю. Е., Кузнецов А. М.** Новый алгоритм адаптации размера апертуры локальных векторных фильтров // *Автометрия*. 2005. **41**, № 5. С. 3.

*Поступила в редакцию 18 декабря 2007 г.*

---