

УДК 532.546; 536.421

ОБ ИНЖЕКЦИИ ВОДЫ В ГЕОТЕРМАЛЬНЫЙ ПЛАСТ

В. Ш. Шагапов, У. Р. Ильясов*, Л. А. Насырова**

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450025 Уфа

* Стерлитамакский государственный педагогический институт, 450103 Стерлитамак

** Уфимский технологический институт сервиса, 450000 Уфа

На случай радиально-симметричной задачи обобщен полученный ранее критерий, разделяющий режимы закачки воды, сопровождающиеся испарением закачиваемой воды или конденсацией пара. Исследовано влияние темпа закачки холодной жидкости, начальных температуры и давления геотермального пласта, а также его пропускной способности на гидродинамические и температурные поля.

Введение. Тепло из подземного высокотемпературного резервуара, представляющего собой пористую проницаемую породу, добывается в виде теплоносителя (обычно горячей воды или пара). Одним из способов извлечения этого тепла, особенно в тех случаях, когда в исходном состоянии пористая среда насыщена паром, является создание искусственных циркулярных систем посредством закачки воды в нагретые проницаемые породы. Некоторые аспекты этой проблемы рассмотрены в работах [1–7].

Целью данной работы является анализ влияния параметров паронасыщенной пористой среды, а также темпов закачки холодной жидкости на температурные и гидродинамические поля; определение условий, позволяющих разделять режимы фильтрации с испарением закачиваемой жидкости и режимы, сопровождающиеся конденсацией пара; построение аналитических решений для достаточно высоких темпов закачки, представляющих наибольший практический интерес.

1. Основные уравнения. Для описания процессов фильтрации, а также тепло- и массопереноса при закачке воды в пористую среду примем следующие допущения. Температуры пористой среды и насыщающего вещества (воды или пара) совпадают. Кроме того, будем полагать, что скелет пористой среды несжимаем и неподвижен, пористость постоянна.

В рамках принятых допущений уравнение сохранения массы воды (пара) имеет вид

$$\frac{\partial(m\rho_i)}{\partial t} + r^{-n} \frac{\partial}{\partial r}(r^n m\rho_i v_i) = 0,$$

где m — пористость; ρ_i ($i = l, v$) — плотности фаз; v_i ($i = l, v$) — скорости фаз; r — координата; t — время; нижние индексы l, v, s соответствуют воде, пару и пористому скелету.

Для фильтрации воды и пара примем закон Дарси

$$mv_i = -\frac{k}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (i = v, l),$$

где k, μ_i — абсолютная проницаемость и динамическая вязкость фаз.

Уравнение притока тепла без учета баротермического эффекта запишем в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + m\rho_i c_i v_i \frac{\partial T}{\partial r} = r^{-n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

$$\rho c = m\rho_i c_i + (1 - m)\rho_s c_s, \quad \lambda = m\lambda_i + (1 - m)\lambda_s \quad (i = l, v).$$

Здесь ρc — удельная объемная теплоемкость системы пористая среда — пар (вода); c_i, λ_i — удельная теплоемкость и теплопроводность фаз; λ — теплопроводность системы пористая среда — пар (вода). Поскольку в значения ρc и λ основной вклад вносят параметры скелета пористой среды, во всей зоне фильтрации (зоне фильтрации пара и воды) будем полагать их постоянными ($\rho c = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$).

Для пара примем уравнение Клапейрона — Менделеева, воду будем считать несжимаемой:

$$\rho_v = p/(R_v T), \quad \rho_l = \rho_{l0}.$$

Здесь p, T — давление и температура; R_v — газовая постоянная; индекс 0 соответствует параметрам начального (невозмущенного) состояния в пористой среде.

Приведенные выше уравнения необходимо дополнить соотношениями на поверхности фазового перехода ($r = r_{(s)}$), которые следуют из закона сохранения массы и условия теплового баланса:

$$m\rho_l(v_l - \dot{r}_{(s)}) = m\rho_v(v_v - \dot{r}_{(s)}), \quad \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)^+ - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right)^- = m\rho_l l(v_l - \dot{r}_{(s)}), \quad \dot{r}_{(s)} = \frac{dr_{(s)}}{dt}, \quad (1.1)$$

где l — удельная теплота фазового перехода. Нижний индекс (s) соответствует параметрам на границе фазовых переходов. На этой границе температура и давление полагаются непрерывными:

$$T^- = T^+ = T_{(s)}, \quad p^- = p^+ = p_{(s)}.$$

Кроме того, на поверхности фазового перехода температура $T_{(s)}$ и давление $p_{(s)}$ связаны уравнением

$$T_{(s)} = T_* \ln^{-1}(p_*/p_{(s)}),$$

где T_*, p_* — эмпирические параметры, определяемые на основе табличных данных.

Наряду с фронтом фазового перехода введем меченую границу ($r = r_{(m)}$) закачиваемой системы, которая определяется из условия равенства скоростей движения воды (пара) и этой границы ($v = \dot{r}_{(m)}$). В режиме, когда на границе фазовых переходов происходит конденсация пара, меченая граница $r_{(m)}$ находится за фронтом фазового перехода (т. е. в области фильтрации воды), а в режиме, когда происходит испарение закачиваемой воды, — перед фронтом фазового перехода (т. е. в области фильтрации пара). Таким образом, между фронтом фазовых переходов и меченой границей возникает промежуточная зона. В первом режиме фильтрации в этой зоне находится конденсированный пар, во втором — испарившаяся вода. Меченая граница для двух режимов определяется из условия $v_l = \dot{r}_{(m)}$ или $v_v = \dot{r}_{(m)}$ ($r = r_{(m)}$).

Рассмотрим одномерные (плоскую ($n = 0$) и осесимметричную ($n = 1$)) задачи о нагнетании в пористую среду, насыщенную паром, воды, имеющей температуру T_e . Пусть в исходном состоянии геотермальный резервуар с температурой T_0 полностью насыщен паром и находится под давлением p_0 . Нагнетание осуществляется при постоянном давлении p_e на границе ($n = 0$) или с постоянным объемным расходом q ($n = 1$). С учетом сделанных выше предположений начальные и граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} n = 0: \quad p = p_0, \quad T = T_0 \quad (r > 0, t = 0), \quad p = p_e, \quad T = T_e \quad (r = 0, t > 0), \\ n = 1: \quad p = p_0, \quad T = T_0 \quad (r > 0, t = 0), \quad -2\pi r \left(\frac{k}{\mu_l} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = q, \quad T = T_e \quad (r \rightarrow 0, t > 0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Введем безразмерный параметр γ , представляющий собой отношение полной интенсивности испарения на границе фазовых переходов к общему объему закачиваемой воды:

$$n = 0: \quad \gamma = (v_l - \dot{r}_{(s)})/v_l, \quad n = 1: \quad \gamma = 2\pi r_{(s)} m (v_l - \dot{r}_{(s)})/q.$$

В рамках рассматриваемой системы уравнений обе задачи автомодельны.

Введем безразмерные давление, температуру, плотность и автомодельную переменную:

$$P = \frac{p}{p_0}, \quad \Theta = \frac{T}{T_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho_v}{\rho_{v0}} = \frac{P}{\Theta}, \quad \xi = \frac{r}{2\sqrt{at}} \quad \left(a = \frac{\lambda}{\rho c} \right).$$

Тогда уравнения тепло- и пьезопроводности можно записать в виде

$$\xi^{-n} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^n \frac{dP}{d\xi} \right) = 0, \quad \xi^{-n} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^n \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} - \text{Pe}_l \frac{dP}{d\xi} \frac{d\Theta}{d\xi} \quad (0 < \xi < \xi_{(s)}); \quad (1.3)$$

$$\eta_v \xi^{-n} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^n \tilde{\rho} \frac{dP}{d\xi} \right) = -2\xi \frac{d}{d\xi} \tilde{\rho}, \quad (1.4)$$

$$\xi^{-n} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^n \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} - \text{Pe}_v \frac{dP}{d\xi} \frac{d\Theta}{d\xi} \quad (\xi_{(s)} < \xi < \infty),$$

где Pe_i — число Пекле. При этом на границе фазовых переходов ($\xi = \xi_{(s)}$) имеем

$$\eta_v \left(\tilde{\rho}_{(s)} \left(\frac{dP}{d\xi} \right)^+ - \tilde{\mu} \left(\frac{dP}{d\xi} \right)^- \right) = 2(1 - \tilde{\rho}_{(s)}) \xi_{(s)}, \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\xi} \right)^+ - \left(\frac{d\Theta}{d\xi} \right)^- = -\frac{m\tilde{\rho}_l}{\text{Ja}} \left(\eta_l \left(\frac{dP}{d\xi} \right)^- + 2\xi_{(s)} \right);$$

$$\Theta_{(s)} = \Theta_* \ln^{-1} (P_*/P_{(s)}), \quad (1.6)$$

где Ja — число Якоби.

В уравнениях (1.3)–(1.6) безразмерные коэффициенты имеют вид

$$\text{Pe}_i = \frac{\rho_i c_i}{\lambda} \frac{k p_0}{\mu_i} \quad (i = v, l), \quad \eta_i = \frac{\alpha_i}{a}, \quad \alpha_i = \frac{p_0 k}{m \mu_i} \quad (i = v, l),$$

$$P_* = \frac{p_*}{p_0}, \quad \Theta_* = \frac{T_*}{T_0}, \quad \tilde{\rho}_{(s)} = \frac{\rho_{v(s)}}{\rho_l}, \quad \tilde{\rho}_l = \frac{\rho_l}{\rho}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu_v}{\mu_l}, \quad \text{Ja} = \frac{c T_0}{l}.$$

Из начальных и граничных условий (1.2) следует:

$$n = 0: \quad P = P_e, \quad \Theta = \Theta_e \quad \text{при } \xi = 0, \quad P = 1, \quad \Theta = 1 \quad \text{при } \xi = \infty, \quad (1.7)$$

$$n = 1: \quad \xi \left(\frac{dP}{d\xi} \right)_\xi = -\tilde{q}, \quad \Theta = \Theta_e \quad \text{при } \xi \rightarrow 0 \quad \left(\tilde{q} = \frac{\mu_l q}{2\pi k p_0} \right), \quad P = 1, \quad \Theta = 1 \quad \text{при } \xi = \infty.$$

При этом уравнение для определения автомодельной координаты $\xi_{(m)} = r_{(m)}/(2\sqrt{at})$ меченой границы может быть записано в виде

$$\eta_i \left(\frac{dP}{d\xi} \right) = -2\xi_{(m)} \quad (\xi = \xi_{(m)}), \quad (1.8)$$

где $i = v, l$, если меченая граница находится в области фильтрации пара или воды соответственно.

В отличие от [7] в данной работе сжимаемость жидкости не учитывалась. Анализ решений показывает, что такое приближение для плоской задачи ($n = 0$) оправдано при достаточно малых перепадах давления: $\Delta p \ll p_*$ ($\Delta p = p_e - p_0$; $p_* = 2\rho_l C_l^2$; C_l — скорость

звука в жидкости), а в случае осесимметричной задачи — при низких темпах закачки жидкости: $q \ll q_*$ ($q_* = 4\pi k \rho_l C_l^2 / \mu_l$). В частности, при закачке холодной воды ($T_e = 300$ К, $C_l = 1500$ м/с) в пласт с проницаемостью $k = 10^{-12}$ м² критические значения перепада давления и интенсивности закачки равны $p_* = 4 \cdot 10^9$ Па, $q_* = 25$ м³/(м · с). Следовательно, принятая модель с несжимаемой жидкостью справедлива во всем диапазоне перепадов давления Δp и темпов закачки q , представляющем практический интерес.

В принятой модели с постоянной пористостью предполагается, что скелет представляет собой цементированную породу. Поскольку сжимаемость горных пород намного меньше сжимаемости воды, это допущение практически не сужает область применимости результатов.

2. Анализ решений. Уравнения (1.3), описывающие фильтрацию воды, могут быть проинтегрированы. Тогда для распределения давления и температуры в области фильтрации воды имеем:

$$n = 0: \quad P = P_e + (P_{(s)} - P_e) \frac{\xi}{\xi_{(s)}},$$

$$\Theta = \Theta_e + (\Theta_{(s)} - \Theta_e) \int_0^{\xi} \exp(\beta\xi - \xi^2) d\xi \bigg/ \int_0^{\xi_{(s)}} \exp(\beta\xi - \xi^2) d\xi \quad (2.1)$$

$$(\beta = \text{Re}_l(P_e - P_{(s)})\xi_{(s)}^{-1});$$

$$n = 1: \quad P = P_{(s)} + \tilde{q} \ln \frac{\xi_{(s)}}{\xi}, \quad \Theta = \Theta_e + (\Theta_{(s)} - \Theta_e) \int_0^{\xi} \xi^\varphi \exp(-\xi^2) d\xi \bigg/ \int_0^{\xi_{(s)}} \xi^\varphi \exp(-\xi^2) d\xi \quad (2.2)$$

$$(\varphi = \rho_l c_l q / (2\pi\lambda) - 1).$$

В случае, когда меченая граница находится в области фильтрации воды (процесс фильтрации сопровождается конденсацией пара), для ее автомодельной координаты на основе (1.8) с использованием (2.1), (2.2) получим

$$n = 0: \quad \xi_{(m)} = (P_e - P_{(s)})\eta_l / (2\xi_{(s)}), \quad n = 1: \quad \xi_{(m)} = \tilde{q}\eta_l / 2.$$

Для испаряющейся доли закачиваемой воды можно записать

$$n = 0: \quad \gamma = 1 - \xi_{(s)}^2 / [(P_e - P_{(s)})\eta_l], \quad n = 1: \quad \gamma = 1 - \xi_{(s)}^2 / (\tilde{q}\eta_l).$$

Из представленных решений (2.1), (2.2) следует, что в области фильтрации воды поле температур определяется в основном конвективным переносом тепла при достаточно быстром темпе закачки воды, когда удовлетворяется условие $P_e - P_{(s)} \gg \text{Re}_l^{-1}$ в случае плоской задачи ($n = 0$) и $q \gg 2\pi\lambda / (\rho_l c_l)$ в случае осесимметричной задачи ($n = 1$).

Подставляя решения (2.1), (2.2) в уравнения (1.5), следующие из условий на границе фазовых переходов ($\xi = \xi_{(s)}$), получим

$$n = 0: \quad \left(\frac{dP}{d\xi}\right)^+ = -\frac{\tilde{\mu}(P_{(s)} - P_e)}{\tilde{\rho}_{(s)}\xi_{(s)}} + 2\frac{(\tilde{\rho}_{(s)}^{-1} - 1)\xi_{(s)}}{\eta_v},$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^+ = (\Theta_{(s)} - \Theta_e) \exp(\beta\xi_{(s)} - \xi_{(s)}^2) \bigg/ \int_0^{\xi_{(s)}} \exp(\beta\xi - \xi^2) d\xi + \quad (2.3)$$

$$+ \frac{m\tilde{\rho}_l}{\text{Ja}} \left(\frac{\eta_l(P_{(s)} - P_e)}{\xi_{(s)}} - 2\xi_{(s)} \right);$$

$$n = 1: \quad \left(\frac{dP}{d\xi}\right)^+ = -\frac{\tilde{\mu}\tilde{q}}{\tilde{\rho}_{(s)}\xi_{(s)}} + 2\frac{(\tilde{\rho}_{(s)}^{-1} - 1)\xi_{(s)}}{\eta_v}, \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^+ = (\Theta_{(s)} - \Theta_e)\xi_{(s)}^\varphi \exp(-\xi_{(s)}^2) \Big/ \int_0^{\xi_{(s)}} \xi^\varphi \exp(-\xi^2) d\xi + \frac{m\tilde{\rho}l}{\text{Ja}} \left(\frac{\eta\tilde{q}}{\xi_{(s)}} - 2\xi_{(s)}\right).$$

В общей постановке рассматриваемая автомодельная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3), (1.4) является краевой задачей с условиями при $\xi = 0$ и $\xi = \infty$, соответствующими граничным и начальным условиям (1.7). Кроме того, в задаче возникает промежуточная неизвестная граница ($\xi = \xi_{(s)}$), соответствующая фронту фазовых переходов, на котором должны выполняться условия стыковки (1.5) и непрерывности давления и температуры ($P^+ = P^- = P_{(s)}$, $\Theta^+ = \Theta^- = \Theta_{(s)}$), причем $\Theta_{(s)} = \Theta_* \ln^{-1}(P_*/P_{(s)})$. Система уравнений (1.3) в области фильтрации воды имеет аналитические решения (2.1), (2.2). С использованием этих решений и условий стыковки (1.5), (1.6) в области фильтрации пара для уравнений (1.4) краевая задача решается численно методом пристрелки. При этом каждая пристрелка представляет собой задачу Коши. В качестве начальных данных при заданном значении автомодельной координаты границы фазовых переходов $\xi_{(s)} = \xi_{(s)}^*$ принимаются значения давления $P(\xi_{(s)}^*)$, температуры $\Theta(\xi_{(s)}^*)$, производные давления $P'(\xi_{(s)}^*)$ и температуры $\Theta'(\xi_{(s)}^*)$, определяемые на основе решений (2.1), (2.2) и соотношений (1.6), (2.3), (2.4). Подбор значений $\xi_{(s)}^*$ продолжается до тех пор, пока давление и температура на бесконечности ($\xi = \infty$) не будут удовлетворять соответствующему второму граничному условию в (1.7) с заданной точностью.

В случае, когда в уравнении теплопроводности (1.4) можно пренебречь слагаемым за счет конвекции ($\text{Pe}_v \ll 1$), решение системы (1.4) может быть записано в виде

$$P = 1 + \left(P_{(s)} - 1 + \frac{\Theta_{(s)} - 1}{\tilde{\eta}_v - 1}\right) \int_{\xi}^{\infty} \xi^{-n} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\tilde{\eta}_v}\right) d\xi \Big/ \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \xi^{-n} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\tilde{\eta}_v}\right) d\xi -$$

$$- \frac{\Theta_{(s)} - 1}{\tilde{\eta}_v - 1} \int_{\xi}^{\infty} \xi^{-n} \exp(-\xi^2) d\xi \Big/ \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \xi^{-n} \exp(-\xi^2) d\xi, \quad (2.5)$$

$$\Theta = 1 + (\Theta_{(s)} - 1) \int_{\xi}^{\infty} \xi^{-n} \exp(-\xi^2) d\xi \Big/ \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \xi^{-n} \exp(-\xi^2) d\xi \quad (\tilde{\eta}_v = \eta_v \tilde{P}).$$

Подставляя эти решения в условия (2.3), (2.4), получим:

$$n = 0: \quad \left(P_{(s)} - 1 + \frac{\Theta_{(s)} - 1}{\tilde{\eta}_v - 1}\right) \exp\left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{\tilde{\eta}_v}\right) \Big/ \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\tilde{\eta}_v}\right) d\xi -$$

$$- \frac{\Theta_{(s)} - 1}{\tilde{\eta}_v - 1} \exp(-\xi_{(s)}^2) \Big/ \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi - \frac{\tilde{\mu}(P_{(s)} - P_e)}{\tilde{\rho}_{(s)}\xi_{(s)}} + 2\frac{\xi_{(s)}}{\eta_v} \left(\frac{1}{\tilde{\rho}_{(s)}} - 1\right) = 0,$$

$$(\Theta_{(s)} - 1) \Big/ \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi + (\Theta_{(s)} - \Theta) \exp(\beta\xi_{(s)}) \Big/ \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \exp(\beta\xi - \xi^2) d\xi +$$

$$+ m\tilde{\rho}l \exp(\xi_{(s)}^2) [\eta_l(P_{(s)} - P_e)/\xi_{(s)} - 2\xi_{(s)}] / \text{Ja} = 0; \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
n = 1: \quad & \left(P_{(s)} - 1 + \frac{\Theta_{(s)} - 1}{\tilde{\eta}_v - 1} \right) \exp \left(-\frac{\xi_{(s)}^2}{\tilde{\eta}_v} \right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \xi^{-1} \exp \left(-\frac{\xi^2}{\tilde{\eta}_v} \right) d\xi - \\
& - \frac{\Theta_{(s)} - 1}{\tilde{\eta}_v - 1} \exp \left(-\xi_{(s)}^2 \right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \xi^{-1} \exp \left(-\xi^2 \right) d\xi - \frac{\tilde{\mu}\tilde{q}}{\tilde{\rho}_{(s)}} + 2 \frac{\xi_{(s)}^2}{\eta_v} \left(\frac{1}{\tilde{\rho}_{(s)}} - 1 \right) = 0, \\
& (\Theta_{(s)} - 1) / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \xi^{-1} \exp \left(-\xi^2 \right) d\xi + (\Theta_{(s)} - \Theta_e) \xi_{(s)}^{\varphi+1} / \int_0^{\xi_{(s)}} \xi^{\varphi} \exp \left(-\xi^2 \right) d\xi + \\
& + m\tilde{\rho}_l \exp \left(\xi_{(s)}^2 \right) (\eta_l \tilde{q} - 2\xi_{(s)}^2) / \text{Ja} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\eta}_v = \eta_v \tilde{P}$ — безразмерный коэффициент пьезопроводности для линеаризованного уравнения фильтрации в области движения пара. В расчетах использованы два предельных значения \tilde{P} : $\tilde{P} = 1$ и $\tilde{P} = P_{(s)}$, причем при $\tilde{P} = 1$ линеаризация проводится вблизи исходного значения давления в пористой среде ($p = p_0$), при $\tilde{P} = P_{(s)}$ — вблизи значения давления на границе фазовых переходов. Численный анализ показывает, что наилучшее согласование линеаризованных аналитических решений с решением полной системы нелинейных уравнений фильтрации и теплопередачи имеет место при $\tilde{P} = P_{(s)}$. Следует отметить, что при $n = 0$, а также в отсутствие конвективного переноса тепла в области фильтрации воды решения (2.1), (2.5) совпадают с решением, приведенным в [7]. Если процесс фильтрации сопровождается испарением воды, то для меченой границы, находящейся в области фильтрации пара, используя решение (2.5) для распределения давлений, на основе (1.8) получим уравнение для определения автомодельной координаты $\xi_{(m)}$

$$\begin{aligned}
& \left(P_{(s)} - 1 + \frac{\Theta_{(s)} - 1}{\tilde{\eta}_v - 1} \right) \xi_{(m)}^{-n} \exp \left(-\frac{\xi_{(m)}^2}{\tilde{\eta}_v} \right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \xi^{-n} \exp \left(-\frac{\xi^2}{\tilde{\eta}_v} \right) d\xi - \\
& - \frac{\Theta_{(s)} - 1}{\tilde{\eta}_v - 1} \xi_{(m)}^{-n} \exp \left(-\xi_{(m)}^2 \right) / \int_{\xi_{(s)}}^{\infty} \xi^{-n} \exp \left(-\xi^2 \right) d\xi = \frac{2\xi_{(m)}}{\eta_v}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

На рис. 1 представлены распределения давления и температуры при слабой интенсивности ($q = 10^{-6}$ м²/с) закачки воды, температура которой $T_e = 280$ К. Кривые 1, 2 соответствуют исходным значениям температуры пористой среды $T_0 = 373, 393$ К. Для остальных параметров, определяющих состояние и свойства системы, приняты следующие значения: $p_0 = 10^5$ Па, $k = 10^{-15}$ м², $R_v = 461$ Дж·кг/К, $\rho_{l0} = 1000$ кг/м³, $\rho_s = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_l = 0,58$ Вт/(м·К), $\lambda_s = 2$ Вт/(м·К), $\lambda_v = 0,02$ Вт/(м·К), $c_l = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $c_s = 0,9 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $p_* = 27542$ МПа, $T_* = 4616$ К, $l = 1,85 \cdot 10^6$ Дж/кг, $\mu_l = 1,1 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\mu_v = 1,21 \cdot 10^{-5}$ Па·с. На рис. 1 видно, что в случае, когда в исходном состоянии пар в пористой среде находится вблизи точки насыщения (кривая 1) распределение давления немонотонное: давление на границе фазовых переходов ниже исходного давления в пористой среде ($P_{(s)} < 1$). Штриховые кривые на рис. 1 соответствуют безразмерной температуре насыщения $\Theta_{(s)}(P)$.

Получим условие, при котором может реализоваться “яма” давления (рис. 1), в общем виде. Из граничных условий (1.1) следует, что конденсация пара и возникновение “ям” давления вблизи границы фазовых переходов происходят при $\rho_l l m v_l \ll \lambda(\partial T / \partial r)^-$.

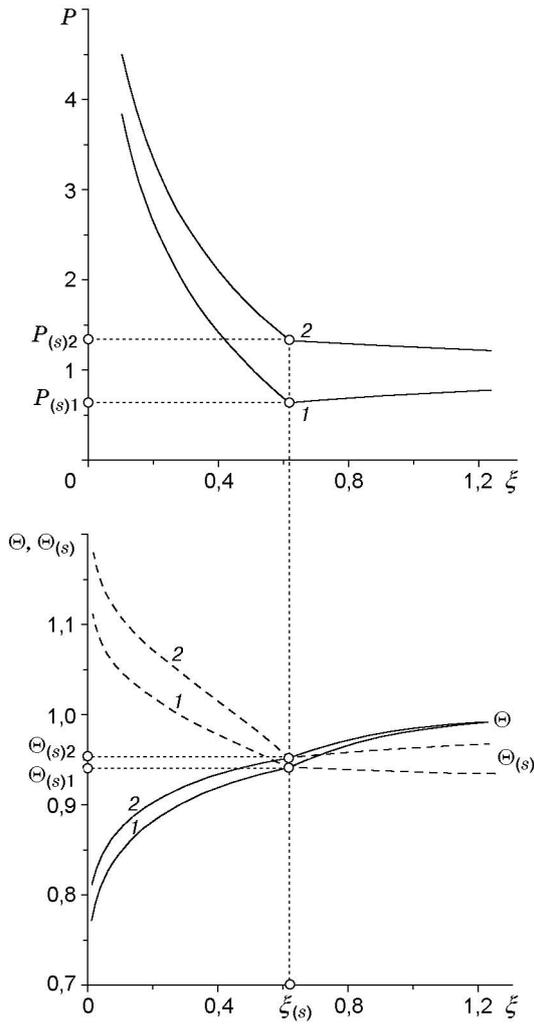


Рис. 1

Рис. 1. Распределение давления и температуры при различных начальных температурах пористой среды:

1 — $T_0 = 373$ К; 2 — $T_0 = 393$ К

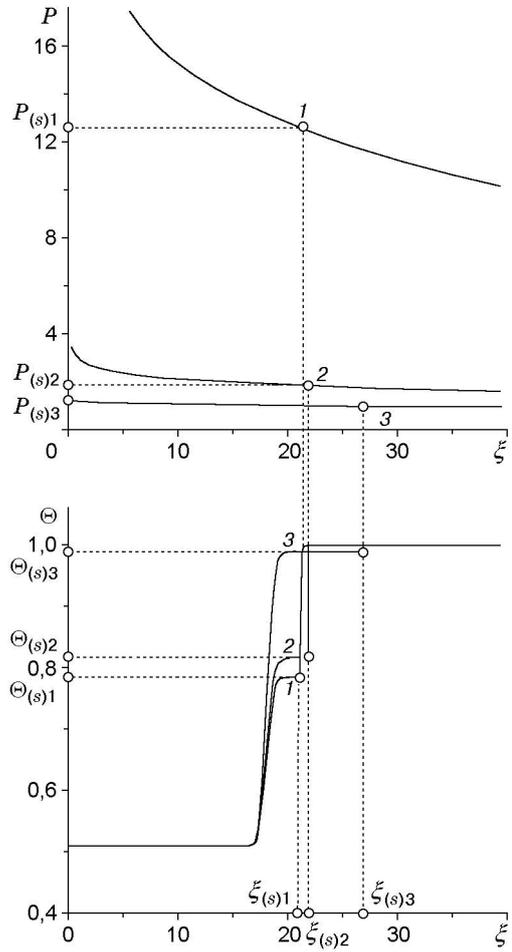


Рис. 2

Рис. 2. Распределение давления и температуры при различных начальных давлениях:

1 — $p_0 = 10^5$ Па; 2 — $p_0 = 10^6$ Па; 3 — $p_0 = 10^7$ Па

Используя для плоской задачи ($n = 0$) оценки

$$mv_l = -\frac{k}{\mu_l} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^- \approx \frac{k}{\mu_l} \frac{\Delta p}{r(s)}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^- \approx \frac{\Delta T}{r(s)} \quad (\Delta T = T_0 - T_e, \Delta p = p_e - p_0),$$

а для осесимметричной ($n = 1$) оценки

$$mv_l = \frac{q}{2\pi r(s)}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^- = \frac{\Delta T}{r(s)},$$

получим условия

$$n = 0: \quad \Delta T \gg k\rho_l l \Delta p / (\mu_l \lambda), \quad n = 1: \quad \Delta T \gg \rho_l l q / (2\pi \lambda), \quad (2.8)$$

обеспечивающие режим фильтрации с конденсацией пара. Первое условие ($n = 0$) совпадает с условием, приведенным в [7]. Хотя эти условия хорошо согласуются с результатами численного анализа, на практике они справедливы лишь для узкого диапазона значений ΔT , Δp , q и низкой проницаемости k . В случае осесимметричной задачи условие (2.8) может выполняться только при слабых темпах закачки воды. В частности, для реальных значений перепада температуры ($\Delta T = 1 \div 10^2$ К) и давления ($\Delta p = 0,1 \div 10$ МПа) первое условие в (2.8) может выполняться при $k \ll 10^{-16}$ м². В этом случае из-за капиллярных эффектов, по-видимому, будет наблюдаться иная картина фильтрации. Оценим характерную величину капиллярного давления Δp_σ с использованием выражения $\Delta p_\sigma = \sigma/d$ (σ — поверхностное натяжение; $d \approx \sqrt{k/m}$ — линейный размер пор). При $k \ll 10^{-16}$ м² для воды ($\sigma = 0,05$ кг/с²) при $m = 0,1$ получим $\Delta p_\sigma \gg 1$ МПа. Следует отметить, что режим фильтрации с “ямой” давления и промежуточной двухфазной зоной, рассмотренный в [6] для $k = 10^{-17}$ м², трудно реализуем.

Для различных начальных давлений в пористой среде на рис. 2 представлены распределения температуры и давления в автомодельных переменных для осесимметричной задачи ($n = 1$) при нагнетании воды с температурой $T_e = 300$ К и объемным расходом $q = 2 \cdot 10^{-3}$ м²/с в пористую среду с температурой $T_0 = 590$ К, пористостью $m = 0,2$ и проницаемостью $k = 10^{-12}$ м². Кривые 1–3 соответствуют исходным значениям давления пара в пористой среде $p_0 = 10^5, 10^6, 10^7$ Па. При этом $\xi_{(m)} = 210,6; 177,4; 37,4$, $\gamma = 0,23; 0,15; 0,14$ соответственно. На рис. 2 видны три характерные зоны температуры, в каждой из которых она близка к постоянной. При более высоких значениях исходного давления p_0 пористой среды и темпа закачки q жидкости ступенчатое распределение температуры становится более ярко выраженным. При этом температура в ближней и дальней от места закачки зонах соответственно равна температуре закачиваемой воды и исходной температуре пористой среды. Температура в промежуточной зоне, находящейся в области фильтрации воды за границей фазовых переходов, и протяженность этой зоны зависят от исходного давления в пористой среде, причем с ростом исходного давления p_0 протяженность и температура промежуточной зоны растут. Следовательно, если при низких исходных давлениях пористой среды подземное тепло в основном расходуется на испарение закачиваемой жидкости, то при высоких давлениях — на ее нагрев.

На рис. 3 приведены зависимости давления на границе фазовых переходов $P_{(s)}$, а также ее автомодельной координаты $\xi_{(s)}$ и автомодельной координаты меченой границы $\xi_{(m)}$ от расхода нагнетаемой воды. Кривые 1–3 соответствуют значениям $p_0 = 10^5, 10^6, 10^7$ Па.

3. Решение со скачками температуры. Рассмотрим режим нагнетания, когда перенос тепла в области фильтрации жидкости определяется в основном конвективным механизмом. В этом случае, как следует из анализа рис. 2, 3, распределение температур близко к ступенчатому с двумя скачками. Первый скачок температуры наблюдается в области фильтрации воды, второй — вблизи границы фазовых переходов. Таким образом, поле температур в зоне фильтрации фактически определяется тремя значениями температур ($T_0, T_{(s)}(p_{(s)}), T_e$), и поэтому можно построить приближенное решение со скачками температуры.

Запишем условия баланса тепла на границах двух скачков температуры. Для первого скачка в области фильтрации воды ($r = r_{(T)}$) имеем

$$v_l - \dot{r}_{(T)} = \rho_{(s)}(1 - m)c_s(T_{(s)} - T_e)\dot{r}_{(T)}/[m\rho_l c_l(T_{(s)} - T_e)]. \quad (3.1)$$

Для второго скачка, положение которого совпадает с границей фазовых переходов ($r = r_{(s)}$), можно записать

$$\rho_l(v_l - \dot{r}_{(s)}) = \rho_{(s)}(1 - m)c_l(T_0 - T_{(s)})\dot{r}_{(s)}/l', \quad l' = l + c_v(T_0 - T_{(s)}). \quad (3.2)$$

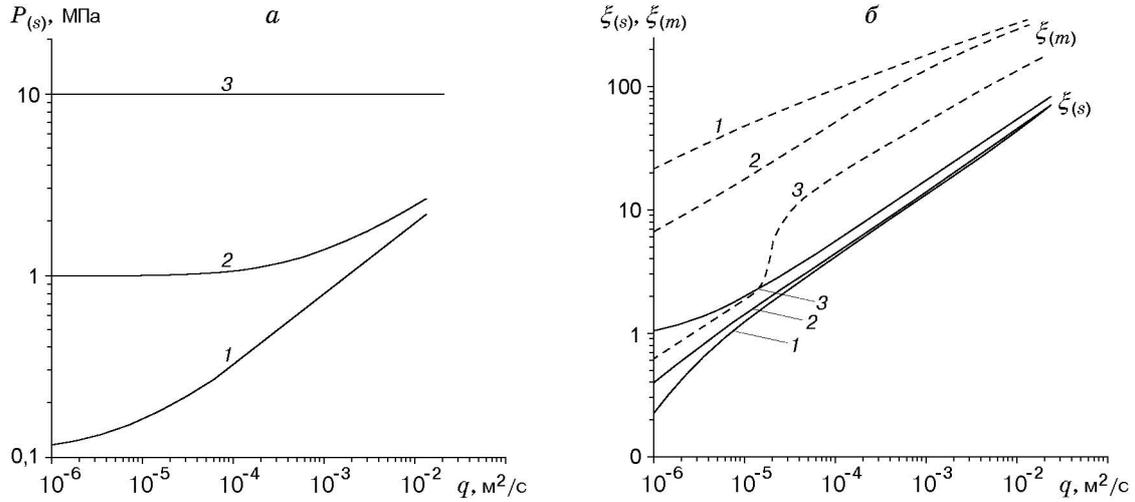


Рис. 3. Зависимости давления $P_{(s)}$ на границе фазового перехода (а), а также положения этой границы $\xi_{(s)}$ и меченой границы $\xi_{(m)}$ (б) от расхода закачиваемой воды q :
 1 — $p_0 = 10^5$ Па; 2 — $p_0 = 10^6$ Па; 3 — $p_0 = 10^7$ Па

Кроме того, на этой границе запишем условие баланса массы

$$m\rho_l(v_l - \dot{r}_{(s)}) = m\rho_v(v_v - \dot{r}_{(s)}). \tag{3.3}$$

Уравнения пьезопроводности в зоне фильтрации воды и пара примем в виде

$$r^{-n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad (0 < r < r_{(s)}), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = r^{-n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha_v r^n \frac{p}{p_0} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (r_{(s)} < r < \infty). \tag{3.4}$$

Введем автомодельную переменную $\zeta = r/(2\sqrt{\alpha_l t})$. Тогда условия (3.1)–(3.3) могут быть записаны в виде

$$\frac{dP}{d\zeta} = -2(\text{Ja}_{(T)} + 1)\zeta_{(T)} \quad (\zeta = \zeta_{(T)}); \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{dP}{d\zeta} \right)^- = -2(\text{Ja}_{(s)} + 1)\zeta_{(s)}, \quad \tilde{\rho}_{(s)} \left(\frac{dP}{d\zeta} \right)^+ - \tilde{\mu} \left(\frac{dP}{d\zeta} \right)^- = 2\tilde{\mu}(1 - \tilde{\rho}_{(s)})\zeta_{(s)} \quad (\zeta = \zeta_{(s)}); \tag{3.6}$$

$$\text{Ja}_{(T)} = \frac{1 - m}{m} \frac{\rho_s}{\rho_l} \frac{c_s}{c_l}, \quad \text{Ja}_{(s)} = \frac{1 - m}{m} \frac{\rho_s}{\rho_l} \frac{c_s}{l'} (T_0 - T_{(s)}). \tag{3.7}$$

Решение уравнения (3.4) при начальных и граничных условиях (1.2) можно записать в виде

$$0 < \zeta < \zeta_{(s)}: \quad P = P_e + (P_{(s)} - P_e)\zeta/\zeta_{(s)} \quad (n = 0), \quad P = P_{(s)} + \tilde{q} \ln(\zeta_{(s)}/\zeta) \quad (n = 1); \tag{3.8}$$

$$\zeta_{(s)} < \zeta < \infty: \quad P = 1 + (P_{(s)} - 1) \int_{\zeta}^{\infty} \zeta^{-n} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tilde{\eta}}\right) d\zeta \bigg/ \int_{\zeta_{(s)}}^{\infty} \zeta^{-n} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tilde{\eta}}\right) d\zeta, \tag{3.9}$$

где $\tilde{q} = q\mu_l/(2\pi k p_0)$; $\tilde{\eta} = \alpha_v \tilde{P}/\alpha_l$. При этом

$$\Theta = \Theta_e \quad (0 < \zeta < \zeta_{(T)}), \quad \Theta = \Theta_{(s)} \quad (\zeta_{(T)} < \zeta < \zeta_{(s)}), \quad \Theta = 1 \quad (\zeta_{(s)} < \zeta < \infty). \tag{3.10}$$

Используя (3.8), (3.9), на основе (3.5) можно получить выражение для координаты скачка температуры, находящегося в зоне фильтрации воды:

$$n = 0: \quad \zeta_{(T)} = \frac{P_e - P_{(s)}}{2(\text{Ja}_{(T)} + 1)} \frac{1}{\zeta_{(s)}}, \quad n = 1: \quad \zeta_{(T)}^2 = \frac{\tilde{q}}{2(\text{Ja}_{(T)} + 1)}. \quad (3.11)$$

На основе (3.6), (3.7), используя (3.8), (3.9), получим систему уравнений для определения автомодельной координаты границы фазовых переходов и безразмерного давления на этой границе:

$$n = 0: \quad P_e - P_{(s)} = 2(\text{Ja}_{(s)} + 1)\zeta_{(s)}^2, \\ \rho_{(s)}(P_{(s)} - 1) \exp\left(-\frac{\zeta_{(s)}^2}{\tilde{\eta}}\right) \bigg/ \int_{\zeta_{(s)}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tilde{\eta}}\right) d\zeta = 2\tilde{\mu}(\tilde{\rho}_{(s)} + \text{Ja}_{(s)})\zeta_{(s)}; \\ n = 1: \quad \tilde{q} = 2(\text{Ja}_{(s)} + 1)\zeta_{(s)}^2, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\rho}_{(s)}(P_{(s)} - 1)\zeta_{(s)}^{-1} \exp\left(-\frac{\zeta_{(s)}^2}{\tilde{\eta}}\right) \bigg/ \int_{\zeta_{(s)}}^{\infty} \zeta^{-1} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tilde{\eta}}\right) d\zeta = 2\tilde{\mu}(\tilde{\rho}_{(s)} + \text{Ja}_{(s)})\zeta_{(s)}.$$

Для координаты меченой границы, находящейся в области фильтрации пара, имеем

$$(P_{(s)} - 1)\zeta_{(m)}^{-n} \exp\left(-\frac{\zeta_{(m)}^2}{\tilde{\eta}}\right) \bigg/ \int_{\zeta_{(s)}}^{\infty} \zeta^{-n} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{\tilde{\eta}}\right) d\zeta = 2\zeta_{(m)}. \quad (3.13)$$

На рис. 4 приведено сравнение аналитических решений (2.2), (2.5) (сплошные линии) и решений со скачками температур (3.9), (3.10) (штриховые линии), полученных при $p_0 = 10^7$ Па, $T_0 = 590$ К, $T_e = 300$ К, $k = 10^{-12}$ м², $m = 0,2$. Кривые 1–3 соответствуют значениям расхода нагнетаемой воды $q = 10^{-4}$, 10^{-3} , 10^{-2} м²/с. Видно, что распределения давлений практически совпадают. При этом для координаты меченой границы, определенной из уравнения (2.7), получены значения $\xi_{(m)} = 8,53$; 26,6; 81,2, а для координаты $\xi_{(m)}$, определенной из уравнения (3.13), — значения $\xi_{(m)} = 8,81$; 25,6; 78,1. Таким образом, решение со скачками температур удовлетворительно описывает эволюцию полей давлений и температур в случае достаточно больших проницаемостей пористой среды и высоких расходов нагнетаемой воды. Следует отметить, что автомодельная координата ζ , используемая в решении со скачками температур, связана с автомодельной координатой ξ следующим образом: $\xi = \zeta \sqrt{\alpha_l/a}$.

На рис. 5 для случая $p_0 = 10^6$ Па, $T_0 = 590$ К, $k = 10^{-12}$ м² приведены зависимости автомодельных координат границы фазовых переходов $\xi_{(s)}$ и меченой границы $\xi_{(m)}$, а также давления $P_{(s)}$ от темпа закачки воды q , полученные по уравнениям (2.6) с использованием решения уравнения теплопроводности (штриховые линии), а также по уравнениям (3.12) с использованием приближенных решений со скачком температуры (сплошные линии). Штрихпунктирная линия соответствует координате скачка температуры $\xi_{(T)}$ в области фильтрации воды, полученной из уравнения (3.11). Из рис. 5 следует, что при увеличении расхода q нагнетаемой воды значения давления на границе фазовых переходов близки. При этом автомодельные координаты фазовых переходов практически совпадают.

Заключение. На основе анализа решений задачи об инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром, показано, что в большинстве случаев, представляющих

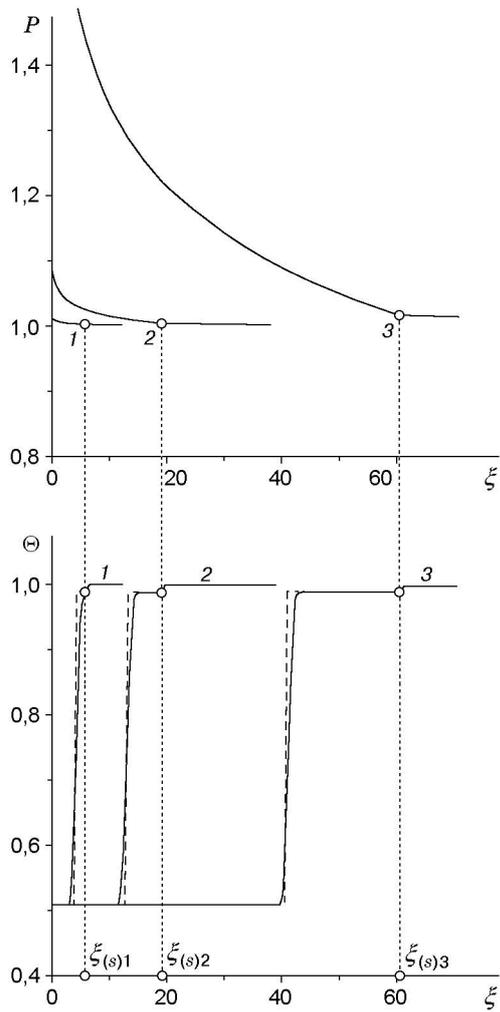


Рис. 4. Сравнение аналитических решений уравнений (2.2), (2.5) (сплошные линии) и решений уравнений со скачками температуры (3.9), (3.10) (штриховые линии):

1 — $q = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$; 2 — $q = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$; 3 — $q = 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$

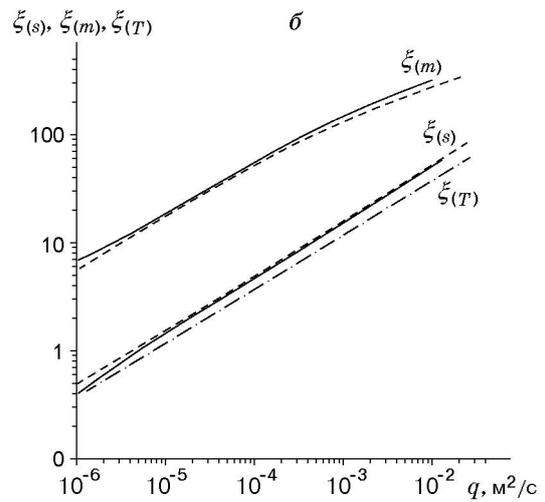
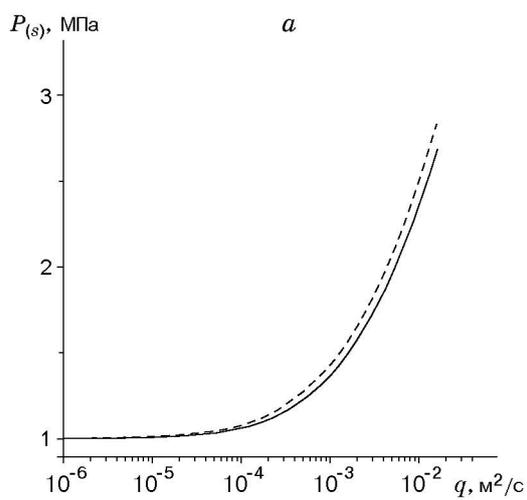


Рис. 5. Зависимости давления $P_{(s)}$ на границе фазовых переходов (а), а также автомодельных координат границы фазового перехода $\xi_{(s)}$ и меченой границы $\xi_{(m)}$ (б) от темпа закачки q , полученных по уравнениям (2.6) (штриховые линии) и приближенным решениям уравнений со скачками температуры (3.12) (сплошные линии)

практический интерес, инжекция происходит в режиме конвективного переноса тепла в области фильтрации и испарения воды на границе фазовых переходов. Режим фильтрации с “ямой” давления может реализоваться лишь при очень низких темпах закачки воды, а также при аномально низкой проницаемости. Кроме того, этот режим может наблюдаться, когда исходное состояние пара близко к состоянию насыщения.

В рассмотренных случаях, представляющих практический интерес, при закачке воды в пористую среду реализуется ступенчатое распределение температуры. С учетом этого построено достаточно простое аналитическое решение с двумя скачками температуры, описывающее процесс инжекции воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **O'Sullivan M. J.** Geothermal reservoir simulation // Intern. J. Energy Res. 1985. V. 9, N 3. P. 319–332.
2. **Pruess K., Calore C., Celati R., Wu Y. S.** An analytical solution for heat transfer at a boiling front moving through a porous medium // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1987. V. 30, N 12. P. 2595–2602.
3. **Garg S. K., Pritchett J. W.** Cold water injection into single- and two-phase geothermal reservoirs // Water Resour. Res. 1990. V. 26, N 2. P. 331–338.
4. **Pruess K.** Grid orientation and capillary pressure effects in the simulation of water injection into depleted vapor zones // Geothermics. 1991. V. 20, N 5/6. P. 257–277.
5. **Сыртланов В. Р., Шагапов В. Ш.** Фильтрация кипящей жидкости в пористой среде // Теплофизика высоких температур. 1994. Т. 32, № 1. С. 87–93.
6. **Бармин А. А., Цыпкин Г. Г.** Двухфронтная математическая модель инжекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 3. С. 105–112.
7. **Шагапов В. Ш., Насырова Л. А., Галиакбарова Э. В.** Нагнетание воды в пористую среду, насыщенную паром // Теплофизика высоких температур. 2000. Т. 38, № 5. С. 811–818.

*Поступила в редакцию 3/IV 2001 г.,
в окончательном варианте — 26/II 2002 г.*
