

УДК 533

ПЛОСКИЙ ВИХРЬ ОВСЯННИКОВА: УРАВНЕНИЯ ПОДМОДЕЛИ

С. В. Головин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: sergey@hydro.nsc.ru

Построена подмодель уравнений идеальной магнитной гидродинамики, обобщающая классическое движение идеальной сплошной среды с плоскими волнами. Показано, что в отличие от классического движения в этой подмодели векторы скорости и магнитного поля могут менять направление в плоскости, ортогональной выделенному пространственному направлению. Подмодель описывается системой уравнений с двумя независимыми переменными и конечным соотношением, задающим ориентацию векторных полей в пространстве. Решения подмодели задают существенно пространственные процессы и сингулярности в движениях сплошной среды, исследование которых в рамках классической одномерной постановки невозможно.

Ключевые слова: идеальная магнитная гидродинамика, частично инвариантные решения, переопределенные системы дифференциальных уравнений, сингулярности в движении сплошной среды.

ВВЕДЕНИЕ

В классическом одномерном движении идеальной сплошной среды функции зависят только от двух переменных — времени t и декартовой пространственной координаты x . Движение частиц допускается во всех направлениях (вектор скорости имеет три компоненты), однако основные возмущения (волны сжатия и разрежения, сильные и слабые разрывы и т. д.) происходят только в направлении пространственной оси Ox . Компоненты вектора скорости и термодинамические функции на плоскостях $x = \text{const}$ постоянны и могут меняться только от одной плоскости к другой. Это достаточно простое решение, получившее название движения с плоскими волнами, содержит большой объем информации о свойствах движения сплошной среды. Однако в рамках данного упрощения невозможно описать существенно трехмерные процессы в жидкости, которые могут быть важны для корректного построения картины движения.

В настоящей работе предлагается обобщить классическое решение следующим образом. Вектор скорости разлагается на две компоненты: параллельную оси Ox и ортогональную ей. При этом предполагается, что длины обеих компонент и термодинамические функции зависят только от переменных t и x (что соответствует классическому решению). Обобщение классического решения состоит в том, что угол поворота вектора скорости частицы вокруг оси Ox полагается зависящим от всех независимых переменных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00080), в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 2.15, Программ Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-5245.2006.1) и молодых кандидатов наук (грант № МК-1521.2007.1).

Рассматриваемое обобщение классического одномерного движения следует из свойств симметрии математических моделей [1, 2]. С точки зрения группового анализа дифференциальных уравнений классическое решение является инвариантным относительно группы переносов вдоль осей Oy и Oz , в то время как обобщенное решение является частично инвариантным относительно группы изометрий плоскости (переносов вдоль осей Oy и Oz , а также вращения вокруг оси Ox). Такой класс решений для уравнений идеальной сплошной среды является содержательным и описывается замкнутой инвариантной системой уравнений с двумя независимыми переменными, из которой в частном случае следуют классические уравнения одномерного движения с плоскими волнами. Неинвариантная функция определяется на решениях инвариантной системы из конечного (недифференциального) соотношения, содержащего функциональный произвол. Для этого соотношения имеется ясная геометрическая трактовка, позволяющая конструировать движение требуемого типа подбором произвольной функции, входящей в соотношение.

Следует отметить, что активно исследуемое в настоящее время решение уравнений идеальной сплошной среды, носящее название особого вихря или вихря Овсянникова [3–11], является аналогичным обобщением классического одномерного движения со сферическими волнами. В этом решении модули нормальной и касательной компонент скорости к сферам $r = \text{const}$ являются инвариантными величинами, т. е. зависят только от времени t и расстояния до начала координат r , в то время как угол поворота вектора скорости вокруг радиального направления Or является неинвариантной величиной и зависит от всех независимых переменных. Это решение также имеет групповую природу, т. е. является частично инвариантным относительно допускаемой группы изометрий сферы (вращений в трехмерном пространстве).

Рассматриваемое решение для уравнений идеальной газовой динамики впервые получено в работе [12], однако детальному анализу с точки зрения физического содержания оно не подвергалось. В настоящей работе исследуются уравнения идеальной магнитной гидродинамики, из которых в пределах нулевого магнитного поля ($\mathbf{H} = 0$) и постоянной плотности ($\rho = \text{const}$) можно получить обобщенно-одномерные движения для идеальной газовой динамики и идеальной жидкости. Обсуждаются способ получения уравнений подмодели и геометрическая трактовка входящих в решение неявных конечных соотношений для неинвариантной функции. Физические свойства описываемого решением движения сплошной среды изучаются в работе [13].

1. ПОСТРОЕНИЕ ПОДМОДЕЛИ

1.1. Представление решения. Исходная система уравнений идеальной магнитогидродинамики (напряжение сводится к давлению, теплопроводность нулевая, электропроводность бесконечна) записывается в виде [14]

$$D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (1)$$

$$D\mathbf{u} + \rho^{-1} \nabla p + \rho^{-1} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (2)$$

$$Dp + A(p, \rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (3)$$

$$D\mathbf{H} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0; \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad (5)$$

где $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости; $\mathbf{H} = (H, K, L)$ — вектор напряженности магнитного поля; p, ρ — давление и плотность. Справедливо уравнение состояния $p = F(S, \rho)$ с энтропией S . Функция $A(p, \rho)$ определяется уравнением состояния $A = \rho(\partial F / \partial \rho)$. Все функции зависят от времени t и декартовых координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

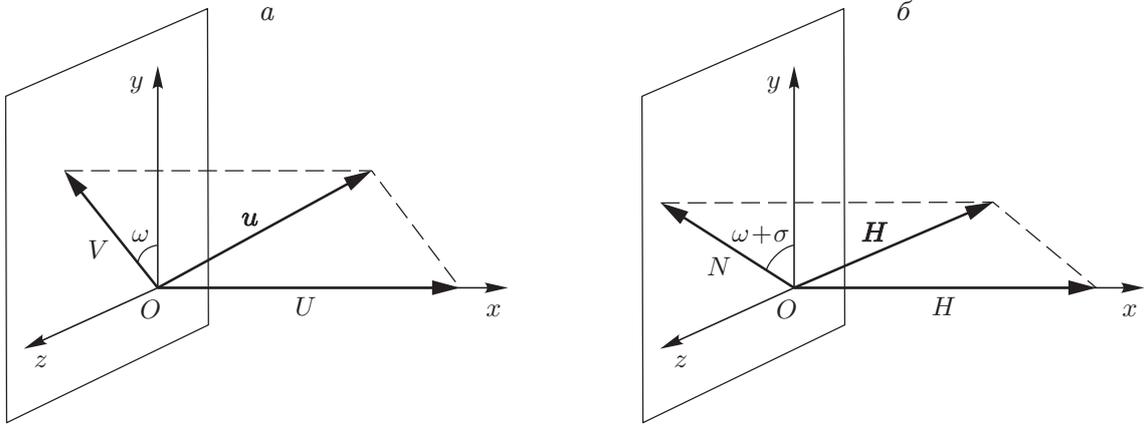


Рис. 1. Представления векторов скорости \mathbf{u} (а) и напряженности магнитного поля \mathbf{H} (б) в частично инвариантном решении

Для произвольного уравнения состояния $p = F(S, \rho)$ уравнения (1)–(5) допускают 11-мерную группу Ли G_{11} точечных преобразований, являющуюся расширением 10-мерной группы Галилея на преобразование гомотетии [15, 16]. Оптимальная система подгрупп ΘG_{11} построена в [17, 18], в окончательном виде — в [19]. Анализ системы ΘG_{11} показывает, что описанное частично инвариантное решение порождается подгруппой $G_{3,13} \subset G_{11}$ с алгеброй Ли $L_{3,13}$ инфинитезимальных генераторов $\{\partial_y, \partial_z, z\partial_y - y\partial_z + w\partial_v - v\partial_w + L\partial_K - K\partial_L\}$ (использована нумерация подалгебр, принятая в [19]).

Действительно, группа $G_{3,13}$ порождается сдвигами вдоль осей Oy и Oz с одновременным вращением вокруг первой координатной оси в пространствах $\mathbb{R}^3(\mathbf{x})$, $\mathbb{R}^3(\mathbf{u})$ и $\mathbb{R}^3(\mathbf{H})$. В пространстве $\mathbb{R}^4(t, \mathbf{x}) \times \mathbb{R}^8(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \rho)$ инварианты этой группы преобразований имеют вид

$$t, \quad x, \quad u, \quad V = \sqrt{v^2 + w^2}, \quad p, \quad \rho, \quad H, \quad N = \sqrt{K^2 + L^2}, \quad vK + wL. \quad (6)$$

Последний инвариант можно интерпретировать как угол σ между проекциями векторов \mathbf{u} и \mathbf{H} на плоскость Oyz (рис. 1). Общая теория частично инвариантных решений приведена в [1]. Представление частично инвариантного решения можно получить, задавая функциональные зависимости между инвариантами (6). В частности, для решения ранга 2 (две инвариантные независимые переменные) и дефекта 1 (одна неинвариантная функция) получаем следующее представление решения:

$$\begin{aligned} u &= U(t, x), & H &= H(t, x), \\ v &= V(t, x) \cos \omega(t, x, y, z), & K &= N(t, x) \cos (\omega(t, x, y, z) + \sigma(t, x)), \\ w &= V(t, x) \sin \omega(t, x, y, z), & L &= N(t, x) \sin (\omega(t, x, y, z) + \sigma(t, x)), \\ p &= p(t, x), & \rho &= \rho(t, x), & S &= S(t, x). \end{aligned} \quad (7)$$

Единственная неинвариантная функция $\omega(t, x, y, z)$ (см. рис. 1) зависит от всех исходных независимых переменных. Инвариантные функции $U, V, H, N, \sigma, p, \rho$ задаются зависящими от инвариантных переменных t и x . Систему уравнений для определения инвариантных и неинвариантных функций будем называть подмоделью исходной модели идеальной магнитогидродинамики.

1.2. Предварительный анализ. Подстановка представления (7) в уравнение неразрывности (1) позволяет ввести новую инвариантную искомую функцию $h(t, r)$, определяемую из соотношения

$$\tilde{D}\rho + \rho(U_x + hV) = 0. \quad (8)$$

Здесь и далее оператор \tilde{D} обозначает инвариантную часть оператора дифференцирования вдоль траектории:

$$\tilde{D} = \partial_t + U\partial_x.$$

Из оставшейся части уравнения неразрывности (1) следует первое уравнение для инвариантной функции ω :

$$\sin \omega \omega_y - \cos \omega \omega_z + h = 0. \quad (9)$$

Кроме того, из уравнений для инвариантных функций получаем первые компоненты уравнения импульса (2) и индукции (4), а также уравнения для давления (3):

$$\tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x = 0; \quad (10)$$

$$\tilde{D}H + hHV = 0; \quad (11)$$

$$\tilde{D}p + A(p, \rho)(U_x + hV) = 0. \quad (12)$$

Из оставшихся пяти уравнений системы (1)–(5) следует переопределенная система для функции ω . Составляя невырожденные линейные комбинации уравнений (2) в проекциях на оси Oy , Oz , имеем

$$\begin{aligned} \rho V \omega_t + (\rho UV - HN \cos \sigma) \omega_x + (\rho V^2 \cos \omega - N^2 \cos \sigma \cos(\omega + \sigma)) \omega_y + \\ + (\rho V^2 \sin \omega - N^2 \cos \sigma \sin(\omega + \sigma)) \omega_z - H(N_x \sin \sigma + N \cos \sigma \sigma_x) = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} HN \sin \sigma \omega_x + N^2 \sin \sigma \cos(\omega + \sigma) \omega_y + N^2 \sin \sigma \sin(\omega + \sigma) \omega_z + \\ + \rho \tilde{D}V + HN \sin \sigma \sigma_x - HN_x \cos \sigma = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Проводя аналогичные преобразования с оставшимися двумя уравнениями индукции (4), получаем

$$\begin{aligned} N \omega_t + (NU - HV \cos \sigma) \omega_x + VN \sin \sigma \sin(\omega + \sigma) \omega_y - \\ - VN \sin \sigma \cos(\omega + \sigma) \omega_z + N \tilde{D}\sigma + HV_x \sin \sigma = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} HV \sin \sigma \omega_x + NV \cos \sigma \sin(\omega + \sigma) \omega_y - \\ - NV \cos \sigma \cos(\omega + \sigma) \omega_z - \tilde{D}N + HV_x \cos \sigma - NU_x = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (5) запишем в виде

$$N(\sin(\omega + \sigma)\omega_y - \cos(\omega + \sigma)\omega_z) - H_x = 0. \quad (17)$$

Систему (9), (13)–(17) для инвариантной функции ω исследуем на совместность, при этом будем искать решения, в которых функция ω определяется с функциональным произволом. В соответствии с теоремой о редукции [1] невыполнение этого условия приводит к редукции решения к инвариантному решению относительно некоторой двумерной подалгебры исходной алгебры $L_{3,13}$. В алгебре $L_{3,13}$ имеется только одна двумерная подалгебра $\{\partial_y, \partial_z\}$. Соответствующее инвариантное решение является классическим одномерным движением плазмы. Таким образом, отброшенное решение уже известно.

1.3. Запрет редукции. Для запрета редукции решения необходимо исключить ситуацию, когда все производные инвариантной функции ω могут быть выражены из системы уравнений (9), (13)–(17). Для этого необходимо вычислить матрицу коэффициентов при производных функции ω и приравнять к нулю ее ранговые миноры. Как и в случае сферического особого вихря [9], это возможно только при выполнении одного из условий:

- 1) $H = 0$;
- 2) $N = 0$;
- 3) $V = 0$;
- 4) $\sigma = 0$ или $\sigma = \pi$.

При этом неравенства $H^2 + N^2 \neq 0$ и $U^2 + V^2 \neq 0$ будем считать выполненными (в случаях отсутствия магнитного поля или в состоянии магнитогидродинамического равновесия решение является нередуцируемым). Для случая 4 отметим, что по определению (7) функции V и N являются неотрицательными. Однако значения $\sigma = \pi$ и $\sigma = 0$ различаются только знаком функции N , поэтому в дальнейшем при рассмотрении случая 4 будем полагать, что функция V неотрицательна, а функция N может иметь произвольный знак.

Согласно классификации (18) варианты 2, 3 соответствуют параллельному оси Ox магнитному полю и полю скорости плазмы. Как и в случае сферического вихря Овсянникова, эти варианты содержатся в варианте 4 ($\sigma = 0$). Действительно, равенство $\sigma = 0$ означает, что вектор скорости каждой частицы и вектор напряженности ее магнитного поля лежат в одной плоскости, ортогональной координатной плоскости Oyz . Тогда случаи, когда магнитное поле либо поле скорости параллельны плоскости Oyz , являются вырожденными вариантами этой более общей ситуации. Далее случай 4 будем считать основным.

Отметим, что условие нередуцируемости решения накладывает ограничение на расположение векторов скорости и магнитного поля. Вообще говоря, в классическом одномерном движении с плоскими волнами такие ограничения отсутствуют. Это означает, что в случае магнитной гидродинамики решение (7) обобщает классическое одномерное решение с плоскими волнами только для класса движений, в которых выполнено одно из условий (18). Такое ограничение класса решений обусловлено тем, что использованное условие редуцируемости решения является только достаточным. Это означает, что могут существовать другие нередуцируемые решения, не попавшие в классификацию (18) и исчерпывающие недостающую часть обобщения классического решения. Однако эта недостающая часть может оказаться тривиальной, т. е. при невыполнении условий (18) единственным потерянными решением является классическое одномерное решение. Поэтому представляет интерес исследование переопределенной системы (9), (13)–(17) без использования предположения о запрете редукции. Данные замечания относятся только к уравнениям магнитогидродинамики в силу наличия в них двух векторных полей — скорости и напряженности магнитного поля. Для случая чистой газовой динамики $\mathbf{H} \equiv 0$ три из четырех условий (18) выполняются автоматически, поэтому свойство нередуцируемости не налагает дополнительных ограничений на решение.

2. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

2.1. Случай плоского магнитного поля. Рассмотрим случай $H = 0$, когда вектор магнитного поля параллелен плоскости Oyz . В этом случае условие совместности уравнений (9), (17) имеет вид

$$(\cos(\omega + \sigma)\omega_y + \sin(\omega + \sigma)\omega_z)h = 0. \quad (19)$$

В случае $h = 0$ определителем однородной системы уравнений (9), (17) относительно ω_y и ω_z является $\sin \sigma$, т. е. условием нетривиальности решения является равенство $\sigma = 0$ или $\sigma = \pi$. Случай $h \neq 0$ приводит к редукции, что следует из уравнений (17), (19). Таким образом, нетривиальное решение существует только при $\sigma = 0$, т. е. случай 1 по классификации (18) содержится в случае 4.

Полагая, что $N \neq 0$, исследуем более подробно уравнения полученной подмодели при $H = h = \sigma = 0$. Уравнение (9) становится однородным и имеет вид

$$\sin \omega \omega_y - \cos \omega \omega_z = 0. \quad (20)$$

Из (13) следует

$$\rho V \omega_t + \rho UV \omega_x + (\rho V^2 - N^2)(\cos \omega \omega_y + \sin \omega \omega_z) = 0. \quad (21)$$

С учетом (20) из уравнения (14) получаем

$$\tilde{D}V = 0. \quad (22)$$

После сокращения на ненулевой множитель N из (15) имеем

$$\tilde{D}\omega = 0. \quad (23)$$

Упрощая уравнение (16) с использованием (20), получаем

$$\tilde{D}N + NU_x = 0.$$

Наконец, уравнение (17) совпадает с (20). Таким образом, в случае магнитного поля, параллельного плоскости Oyz , рассматриваемый класс движений плазмы описывается следующей системой уравнений для инвариантных функций:

$$\begin{aligned} \tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x &= 0, & \tilde{D}p + A(p, \rho)U_x &= 0, \\ \tilde{D}\rho + \rho U_x &= 0, & \tilde{D}N + NU_x &= 0, & \tilde{D}V &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Последнее уравнение системы (24) является независимым и может решаться отдельно. Интегралом уравнения для N является функция $N = N(\rho)$. Вводя новые функции $P = p + (1/2)N(\rho)^2$ и $A_1 = A(p, \rho) + N(\rho)N'(\rho)$, уравнения (24) сведем к уравнениям одномерной газовой динамики

$$\tilde{D}U + \rho^{-1}P_x = 0, \quad \tilde{D}p + A_1(p, \rho)U_x = 0, \quad \tilde{D}\rho + \rho U_x = 0.$$

Для инвариантной функции ω получаем систему уравнений (20)–(23), из которой в случае $\rho V^2 - N^2 \neq 0$ следует, что $\omega_y = \omega_z = 0$, т. е. происходит редукция решения к классическому одномерному движению с плоскими волнами. В случае $\rho V^2 - N^2 = 0$ с учетом $N = N(\rho)$ получаем зависимость $V = V(\rho)$, из которой следует, что $\tilde{D}\rho = 0$, а значит, $U_x = 0$. Следовательно, функции V, N, p, ρ являются произвольными функциями переменной $x - \int U(t) dt$. Из первого уравнения системы (24) следует $U'(t) = \text{const}$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *В случае плоского магнитного поля $H = 0$ рассматриваемый класс решений либо редуцируется к классическому одномерному решению с плоскими волнами, либо описывает равноускоренное движение плазмы в направлении оси Ox . В последнем случае все искомые функции постоянны на плоскостях, ортогональных оси Ox и движущихся с тем же ускорением вдоль этой оси.*

2.2. Основной случай. Рассмотрим случай $\sigma = 0$. С физической точки зрения этот случай соответствует течению плазмы, при котором векторы скорости и магнитного поля принадлежат плоскости, параллельной направляющему вектору оси Ox . Инвариантная часть решения определяется уравнениями (8), (10)–(12). Кроме того, с учетом (9) из уравнения (14) следует

$$\tilde{D}V - \rho^{-1}HN_x = 0,$$

из уравнения (16) получаем

$$\tilde{D}N + NU_x - HV_x + hNV = 0,$$

а уравнение (17) записывается в виде

$$H_x + hN = 0. \quad (25)$$

Неинвариантная часть решения, помимо (9), определяется уравнениями, следующими из (13), (15):

$$\rho V \omega_t + (\rho UV - HN) \omega_x + (\rho V^2 - N^2)(\cos \omega \omega_y + \sin \omega \omega_z) - HN \sigma_x = 0; \quad (26)$$

$$N \omega_t + (NU - HV) \omega_x = 0. \quad (27)$$

Исключая производную ω_t из уравнений (26), (27), получаем классифицирующее соотношение

$$(\rho V^2 - N^2)(H \omega_x + N(\cos \omega \omega_y + \sin \omega \omega_z)) = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим основной случай, когда второй множитель в соотношении (28) равен нулю. Условия совместности уравнений (9), (27), (28) имеют вид

$$N \tilde{D}h - HVh_x = 0, \quad Hh_x + h^2 N = 0.$$

Учитывая, что при $h \neq 0$ имеется интеграл

$$H = H_0 h, \quad (29)$$

уравнения подмодели можно свести к следующим уравнениям:

$$\tilde{D}\rho + \rho(U_x + hV) = 0; \quad (30)$$

$$\tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x = 0; \quad (31)$$

$$\tilde{D}V - \rho^{-1}H_0 h N_x = 0; \quad (32)$$

$$\tilde{D}p + A(p, \rho)(U_x + hV) = 0; \quad (33)$$

$$\tilde{D}N + NU_x - H_0 h V_x + hNV = 0; \quad (34)$$

$$\tilde{D}h + Vh^2 = 0, \quad H_0 h_x + hN = 0. \quad (35)$$

Система уравнений (30)–(35) обладает свойством переопределенности (как и исходная система магнитной гидродинамики (1)–(5)): она содержит семь уравнений для шести искомых функций и находится в инволюции. Действительно, из двух последних уравнений для функции h следует единственное нетривиальное условие совместности этой системы. Проводя перекрестное дифференцирование уравнений (35), в качестве условия совместности получаем уравнение (34), уже содержащееся в системе. Для постановки задачи Коши для системы (30)–(35) необходимо при $t = 0$ задать функции ρ , U , V , p , N в зависимости от x и зафиксировать постоянное значение функции h на некоторой плоскости $x = \text{const}$. В случае идеальной газовой динамики $\mathbf{H} \equiv 0$ переопределенность отсутствует. Второе уравнение в (35) выполнено тождественно, поэтому начальные данные для h задаются так же, как и для остальных функций: $h(0, x) = h_0(x)$. Система уравнений (30)–(35) с начальными данными может быть исследована численно или аналитически, а также методами группового анализа дифференциальных уравнений, поскольку допускаемая ею группа нетривиальна.

Уравнения для неинвариантной функции интегрируются, функция ω определяется из неявного соотношения

$$F(y - \tau \cos \omega, z - \tau \sin \omega) = 0, \quad (36)$$

где $\tau = 1/h$; F — произвольная гладкая функция. В случае идеальной газовой динамики $\mathbf{H} \equiv 0$ уравнение (27) выполнено тождественно, поэтому в (36) функция F также произвольно зависит от ξ : $\xi_t + U\xi_x = 0$. Полученный результат сформулируем в следующей теореме.

Теорема 2. *В основном случае $h \neq 0$ инвариантные функции находятся из системы дифференциальных уравнений (30)–(35). Неинвариантная функция ω определяется конечным соотношением (36) с произвольной гладкой функцией F .*

2.3. Геометрическое построение поля направлений. Приведем геометрический алгоритм нахождения решения неявного уравнения (36) на некоторой фиксированной плоскости $x = x_0$ в момент времени $t = t_0$. Предполагая, что в (36) функция F фиксирована, определим кривую $\gamma = \{(y, z): F(y, z) = 0\}$, задаваемую формулой (36) при $\tau = 0$. Для того чтобы определить угол ω в произвольной точке $M = (y, z)$, необходимо построить отрезок AM длиной τ , такой что $A \in \gamma$. Искомый угол ω задается направлением отрезка AM (рис. 2). Функция ω определена только в точках, находящихся на расстоянии τ от кривой γ , остальная часть плоскости Oyz не является областью определения функции ω . Границами области определения функции ω являются τ -эквидистанты к γ . При увеличении x функция τ меняется так, как это определено решением уравнений (30)–(35). В соответствии с этим область определения функции ω в плоскостях $x = \text{const}$ также меняется. Таким образом, в каждой плоскости $x = \text{const}$ областью определения функции ω (а следовательно, всего решения (7)) является полоса определения шириной 2τ с кривой γ в качестве средней линии. На границах области определения ω соответствующее поле направлений ортогонально границе. Для частного случая $F = z - \sin y$ поле направлений, определяемое уравнением (36), приведено на рис. 3.

Внутри области определения функция ω является многозначной. Действительно, может существовать несколько отрезков AM требуемой длины с $A \in \gamma$, каждый из которых определяет ветвь функции ω . Выбор одной из ветвей позволяет однозначно определить функцию ω во всей полосе определения. Однако эта функция не всегда непрерывна. В случае больших τ , при которых граничные эквидистанты полосы определения имеют особенности типа “ласточкин хвост”, появляются разрывы. На рис. 4 показано, что каждая

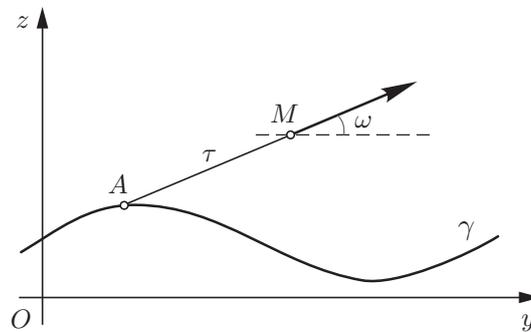


Рис. 2. Геометрическая интерпретация решений $\omega = \omega(\tau(t, x), y, z)$ неявного уравнения (36)

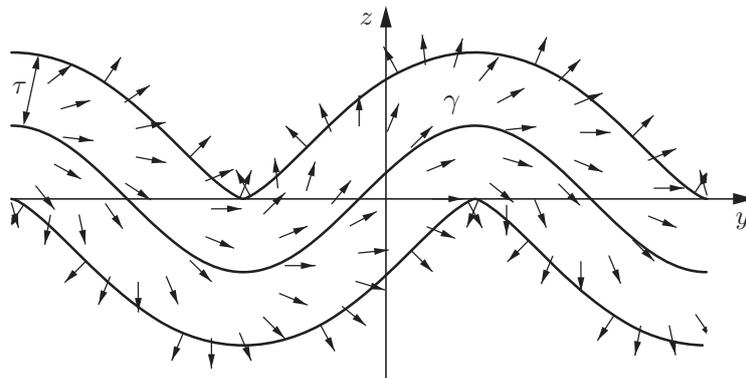


Рис. 3. Поле направлений, определяемое уравнением (36), для случая $F = z - \sin y$

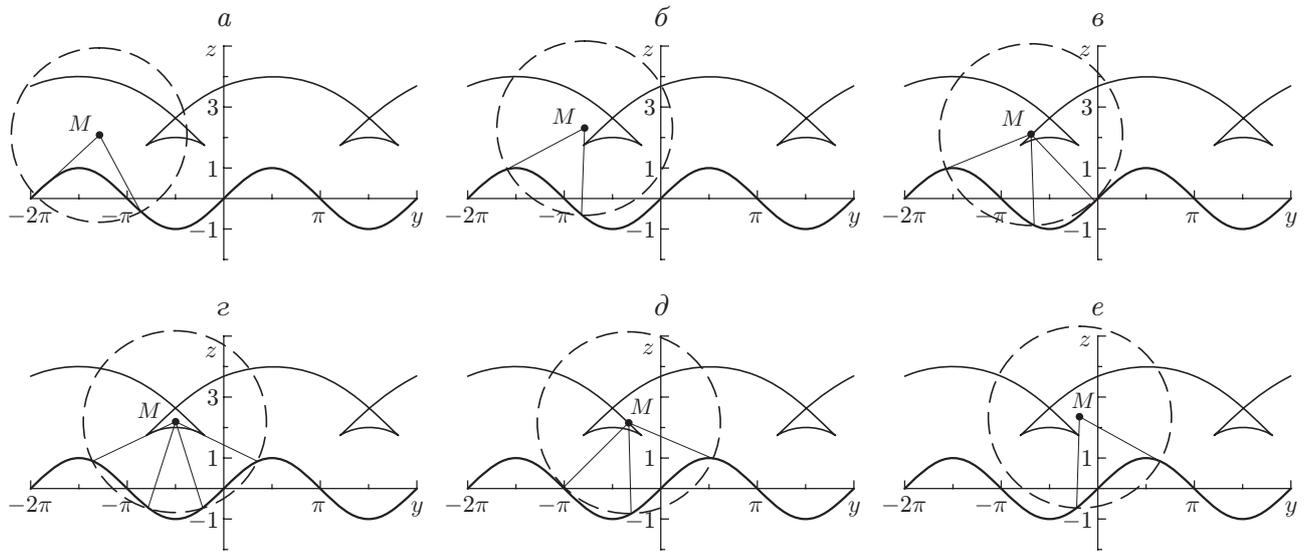


Рис. 4. Поведение функции ω в окрестности особенности типа “ласточкин хвост”:

$a, б, е$ — ветви функции ω вне “ласточкиного хвоста”; $в, д$ — ветви функции ω на границах “ласточкиного хвоста”; $г$ — ветви решения внутри “ласточкиного хвоста”; штриховая линия — окружность радиусом τ с центром в точке M

ветвь функции ω имеет линию разрыва внутри или на границе “ласточкиного хвоста”. В качестве кривой γ выбрана синусоида, кривая в верхних частях рисунков является эквидистантой к γ , сдвинутой на расстояние τ . Штриховой линией показана окружность радиусом τ с центром в точке M . Каждой точке пересечения окружности с кривой γ соответствует ветвь функции ω . В случае если точка M лежит вне “ласточкиного хвоста” (рис. 4, a), в этой точке имеется две ветви функции ω . При движении точки M по направлению к границам “хвоста” обе ветви функции ω непрерывно меняются (рис. 4, $б$). При пересечении границы появляется новая ветвь функции ω (рис. 4, $в$), эта ветвь расщепляется на две ветви внутри “ласточкиного хвоста” (рис. 4, $г$). При достижении точкой M правой границы две ветви ω объединяются (рис. 4, $д$) и исчезают, когда точка M покидает “ласточкин хвост” (рис. 4, $е$). Легко заметить, что ветви функции ω , получающиеся справа от “ласточкиного хвоста”, отличаются от ветвей, имеющих слева от него. Это означает, что внутри или на границе “ласточкиного хвоста” функция ω изменяется скачкообразно.

Особенность типа “ласточкин хвост” не появляется при $\tau < \min_{x \in \gamma} R(x)$ ($R(x)$ — радиус кривизны кривой γ в точке x), поэтому сингулярностей можно избежать либо выбирая решения с достаточно малым τ , либо фиксируя кривую γ с большим радиусом кривизны. Описанная особенность решения уравнений магнитной гидродинамики выводит решение из класса (7). Появляющийся сильный разрыв не может быть интерпретирован как ударная волна, поскольку на линии разрыва меняются только направления векторных полей, а термодинамические функции и модули векторов скорости и магнитного поля остаются непрерывными. Использование вращательного, или альфвеновского разрыва [14, 20], характерного для идеальной магнитной гидродинамики, также не позволяет объяснить появление разрыва, поскольку векторы скорости и магнитного поля вращаются не в касательной к разрыву плоскости.

С физической точки зрения, появление сингулярностей на границе области определения решения означает, что магнитные силовые линии, выходящие из различных точек на

начальной плоскости $x = \text{const}$, пересекаются. Это происходит в случае, если функция τ возрастает вдоль магнитной силовой линии таким образом, что τ -эквиливанты к γ становятся негладкими. В окрестности точки пересечения решение выходит из описываемого класса. Соответствующее движение сплошной среды должно описываться либо с помощью общих уравнений трехмерного движения, либо в рамках более общей модели, например с учетом магнитной и кинематической вязкостей, как в задачах магнитного пересоединения [21]. Такой нелинейный процесс специфичен для построенного решения и не может быть реализован в классическом одномерном движении, где все магнитные силовые линии параллельны.

3. СЛУЧАЙ $h = 0$

3.1. Уравнения подмодели. С точки зрения механики случай $h = 0$ означает, что в проекции на плоскость $x = \text{const}$ векторные поля \mathbf{u} и \mathbf{H} являются несжимаемыми, т. е. имеют нулевую дивергенцию. Неинвариантная функция ω для данного случая находится по иному алгоритму.

Итак, при $h = 0$ отсутствует интеграл (29), вместо которого из уравнений (11), (25) следует

$$H = H_0 = \text{const}.$$

Таким образом, уравнения инвариантной подсистемы сводятся к следующей системе:

$$\begin{aligned} \tilde{D}\rho + \rho U_x &= 0, & \tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x &= 0, \\ \tilde{D}V - \rho^{-1}H_0N_x &= 0, & \tilde{D}p + A(p, \rho)U_x &= 0, & \tilde{D}N + NU_x - H_0V_x &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Система (37) служит для определения неизвестных функций U, V, N, p, ρ . Неинвариантная функция ω определяется из уравнений (9), (27) и (28). Для того чтобы найти ее решение при $N \neq 0$ и $\rho V^2 - N^2 \neq 0$, будем искать зависимость $\omega = \omega(t, x, y, z)$ в неявном виде $\Phi(t, x, y, z, \omega) = 0$, $\Phi_\omega \neq 0$. Тогда указанная система уравнений эквивалентна системе

$$\Phi_k = 0, \quad \Phi_t + U\Phi_x + V\Phi_j = 0, \quad H_0\Phi_x + N\Phi_j = 0, \quad (38)$$

где Ojk — декартова система координат, повернутая на угол ω относительно начала координат:

$$j = y \cos \omega + z \sin \omega, \quad k = -y \sin \omega + z \cos \omega.$$

Интегралами системы (38) являются $\omega, j - \varphi(t, x)$, где функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяет переопределенной системе уравнений

$$\varphi_t + U\varphi_x = V, \quad H_0\varphi_x = N. \quad (39)$$

Условием совместности уравнений (39) является последнее уравнение системы (37). Дифференциальная 1-форма

$$H_0 d\varphi = (H_0V - NU) dt + N dx$$

является замкнутой, поэтому функция φ находится интегрированием в виде

$$\varphi(t, x) = \int_{(t_0, x_0)}^{(t, x)} d\varphi.$$

Отметим, что функция φ определяется своим значением в начальной точке $\varphi(t_0, x_0)$. Неинвариантная функция ω в рассматриваемом случае находится в неявном виде

$$j = f(\omega) + \varphi(t, x) \quad (40)$$

с произвольной гладкой функцией f . Имеет место

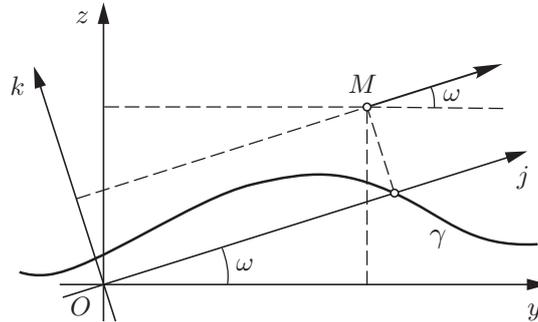


Рис. 5. Геометрическая трактовка решения $\omega(t, x, j)$

Теорема 3. В случае $h = 0$ инвариантные функции определяются из решения системы (37), (39). Для определения неинвариантной функции ω служит неявное уравнение (40).

3.2. Построение и свойства поля направлений. Рассмотрим геометрическую трактовку решения $\omega(t, x, j)$ неявного конечного уравнения (40). Зафиксируем плоскость $x = x_0$ и момент времени $t = t_0$. Для упрощения расчетов положим $\varphi(t_0, x_0) = 0$. Также будем полагать, что в некоторой точке $M = (y, z)$ плоскости $x = x_0$ задана величина ω , удовлетворяющая неявной зависимости (40). Рассмотрим декартову систему координат Ojk , повернутую относительно системы Oyz против часовой стрелки на угол ω (рис. 5). По построению j -координата точки M и угол ω связаны зависимостью $j = f(\omega)$, которой удовлетворяют все точки плоскости с такой же координатой j и произвольной координатой k .

Точку с координатой $k = 0$ назовем базовой точкой для выбранных значений j и ω , удовлетворяющих уравнению (40). Геометрическое место всех базовых точек для различных j и ω будем называть базовой кривой γ . На плоскости Oyz базовая кривая γ определяется в полярных координатах $y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$ уравнением $r = f(\theta)$. Поскольку величина j может иметь произвольный знак, при построении кривой γ допускаются также отрицательные значения полярной координаты r .

На основе полученной геометрической трактовки можно предложить алгоритм построения поля направлений, определяемого углом ω отклонения от положительного направления оси Oy . Угол ω находится из решения неявного уравнения (40). В предположении, что функция f в уравнении (40) задана, можно построить базовую кривую γ по формуле $r = f(\theta)$ в полярных координатах на плоскости Oyz . Для нахождения угла ω в точке $M = (y, z)$ плоскости $x = x_0$ необходимо построить окружность S_M на диаметре OM и найти точки пересечения A_i окружности S_M с кривой γ (рис. 6). Для каждой точки A_i направление векторного поля в точке M совпадает с направлением отрезка OA_i . Во всех точках прямой, проходящей через отрезок A_iM , векторное поле имеет то же направление, что и в точке M .

Как сказано выше, функция f может принимать как отрицательные, так и положительные значения. Это означает, что при построении кривой γ координата r может принимать также отрицательные значения. Отрицательные значения f соответствуют отрицательным значениям j . Таким образом, если точка пересечения вспомогательной окружности и кривой γ лежит на части кривой, соответствующей отрицательной функции f , то соответствующее векторное поле должно иметь противоположное направление. На рис. 7 кривая γ определяется уравнением $r = \cos 2\theta$. Окружность, построенная на диаметре OM с точкой $M = (3, 3)$, имеет две точки пересечения с кривой γ (A и B). Точка A лежит на части кривой, соответствующей положительному значению функции f , поэтому ей отвечает вектор \mathbf{v}_1 , сонаправленный отрезку OA . Точка B лежит на “отрицательной” части дуги γ , поэтому ей соответствует вектор \mathbf{v}_2 , направленный противоположно отрезку OB .

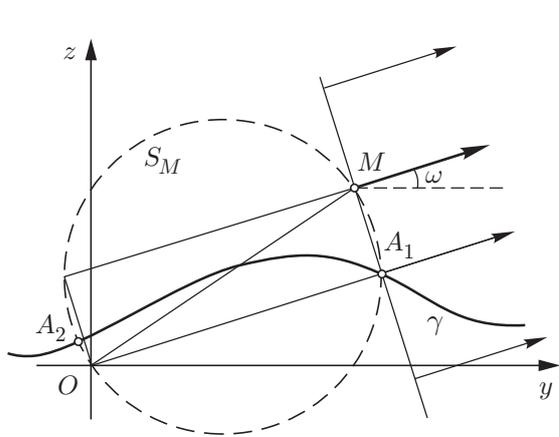


Рис. 6

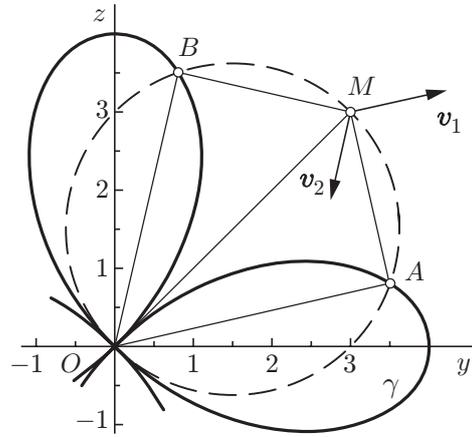


Рис. 7

Рис. 6. Геометрия векторного поля, соответствующего точке пересечения A_1

Рис. 7. Геометрия векторного поля для отрицательного значения функции f

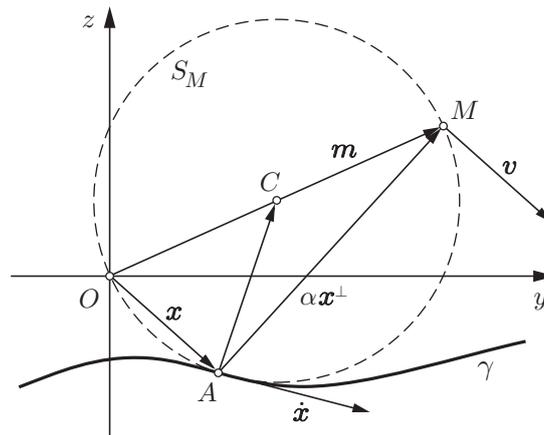


Рис. 8. Построение границы области определения функции ω

Вычислим границы области определения решения $\omega = \omega(t, r, j)$, задаваемого формулой (40). Предположим, что кривая γ задана. Точка M лежит на границе области существования решения, если окружность S_M , построенная на диаметре OM , касается кривой γ в некоторой точке A (рис. 8). Обозначим радиус-вектор точки M через \mathbf{m} и будем считать, что кривая γ задана параметрически в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ с некоторым параметром $s \in \Delta \subset \mathbb{R}$. Очевидно, что $\mathbf{m} = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{x}^\perp$, где $\mathbf{x}^\perp \cdot \mathbf{x} = 0$. Кроме того, из условия касания окружности и кривой γ следует $(\mathbf{m}/2 - \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$ (точка над символом означает дифференцирование по s). Подставляя выражение для \mathbf{m} из первого равенства во второе, получаем $(\alpha \mathbf{x}^\perp / 2 - \mathbf{x} / 2) \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$. Отсюда находим

$$\alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{\mathbf{x}^\perp \cdot \dot{\mathbf{x}}}.$$

Таким образом, граница области определения функции ω имеет параметризацию

$$\mathbf{m} = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{\mathbf{x}^\perp \cdot \dot{\mathbf{x}}} \mathbf{x}^\perp, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad s \in \Delta \subset \mathbb{R},$$

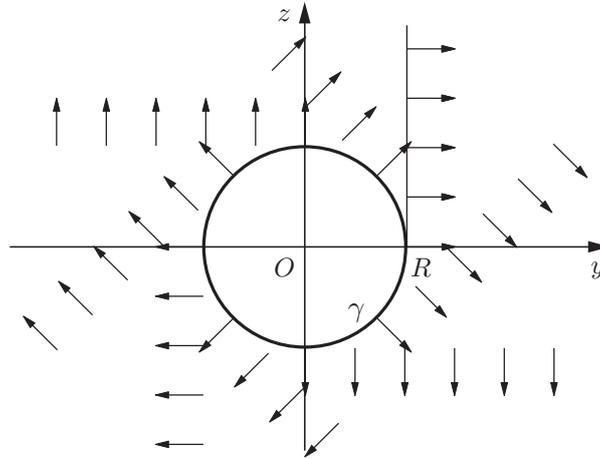


Рис. 9. Векторное поле, определяемое кривой $y^2 + z^2 = R^2$

причем \mathbf{m} не зависит от выбора знака \mathbf{x}^\perp . В точках границы векторное поле имеет направление \mathbf{x} , ортогональное границе:

$$\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x} = (\dot{\mathbf{x}} + \alpha \mathbf{x}^\perp + \alpha \dot{\mathbf{x}}^\perp) \cdot \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{\mathbf{x}^\perp \cdot \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{x}}^\perp \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Поскольку из $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^\perp = 0$ следует $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}^\perp = -\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}^\perp$, последнее выражение равно нулю.

Для примера выберем в качестве кривой γ окружность $y^2 + z^2 = R^2$. Граница области определения этого векторного поля совпадает с окружностью γ , поскольку для любой ее точки \mathbf{x} справедливо равенство $\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$. Искомое векторное поле, соответствующее течению от круглого источника, показано на рис. 9. При $R = 0$ в пределе получаем векторное поле, соответствующее вращению вокруг начала координат.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена и проанализирована частично инвариантная подмодель уравнений идеальной магнитной гидродинамики, порождаемая движениями плоскости. Подмодель описывается системой уравнений с двумя независимыми переменными и конечным соотношением, содержащим функциональный производный. Предложен геометрический алгоритм решения конечного соотношения для неинвариантной функции. Показано, что выбор однозначной гладкой во всей области определения ветви неинвариантной функции не всегда возможен. Определен диапазон значений входящих в подмодель величин, в котором возможно появление сингулярностей решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Olver P. J. Applications of Lie groups to differential equations. N. Y.: Springer-Verlag, 1986.
3. Овсянников Л. В. Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
4. Чупахин А. П. Инвариантные подмодели особого вихря // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 3. С. 390–405.
5. Черевко А. А., Чупахин А. П. Стационарный вихрь Овсянникова. Новосибирск, 2005. (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики, № 1-2005).
6. Chupakhin A. P. Singular vortex in hydro- and gas dynamics // Analytical approaches to multidimensional balance laws. S. l.: Nova Sci. Publ., 2005. P. 89–118.

7. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Однородный особый вихрь // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 75–89.
8. **Павленко А. С.** Проективная подмодель вихря Овсянникова // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 3–16.
9. **Golovin S. V.** Singular vortex in magnetohydrodynamics // J. Phys. A. 2005. V. 38. P. 4501–4516.
10. **Golovin S. V.** Invariant solutions of the singular vortex in magnetohydrodynamics // J. Phys. A. 2005. V. 38. P. 8169–8184.
11. **Golovin S. V.** Generalization of the one-dimensional ideal plasma flow with spherical waves // J. Phys. A. 2006. V. 39. P. 7579–7595.
12. **Овсянников Л. В.** Регулярные типа $(2, 1)$ подмодели уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 3–13.
13. **Головин С. В.** Плоский вихрь Овсянникова: свойства описываемого движения и точные решения // ПМТФ. (В печати.)
14. **Куликовский А. Г.** Магнитная гидродинамика / А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. М.: Физматгиз, 1962.
15. **Fuchs J. C.** Symmetry groups and similarity solutions of MHD equations // J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 1703–1708.
16. **CRC handbook** of Lie group analysis of differential equations. V. 2. Applications in engineering and physical sciences / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton (FL): CRC Press, 1995.
17. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
18. **Grundland A. M., Lalague L.** Lie subgroups of the symmetry group of the equations describing a nonstationary and isentropic flow: Invariant and partially invariant solutions // Canad. J. Phys. 1994. V. 72, N 7/8. P. 362–374.
19. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
20. **Jeffrey A.** Non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics / A. Jeffrey, T. Taniuti. N. Y.; L.: Acad. Press, 1964.
21. **Прист Э.** Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения / Э. Прист, Т. Форбс. М.: Физматлит, 2005.

*Поступила в редакцию 30/VII 2007 г.,
в окончательном варианте — 5/IX 2007 г.*
