РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2015 № 3

УДК 539.374

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМОЙ ВЫСОТЫ БОРТА КАРЬЕРА ПО СХЕМЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Г. М. Подыминогин, А. И. Чанышев

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail:a.i.chanyshev@gmail.com,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия

Предлагается математическая модель определения устойчивости борта карьера протяженной открытой выработки. Учитываются дилатансия, угол внутреннего трения. На основе схемы жесткопластического тела устанавливается максимально допустимая с точки зрения безопасности ведения горных работ высота карьера. Приводятся ее зависимости от угла наклона борта карьера и от свойств среды.

Максимально допустимая высота, пластичность, устойчивость, наклон борта карьера, угол внутреннего трения, сцепление

Известны различные подходы к определению устойчивости бортов карьеров открытых горных работ. Одни подходы предполагают разбиение сдвигаемой горной массы на элементы, состоящие из вертикально расположенных столбиков, при этом рассматриваются веса этих элементов, нормальная и касательная реакции массива пород на поверхностях возможного скольжения, сопоставляются сдвигающие и удерживающие силы [1 – 3]. Другие подходы основываются на теориях предельного равновесия в предположении, что есть горизонтальная площадка, на которой задается давление, и дальнейшее рассмотрение связано с применением результатов решения задачи о вдавливании штампа в жесткопластическую среду [4 – 8]. Есть еще подходы, в которых основными являются полномасштабные вычисления напряжений, деформаций и смещений методом конечных элементов, например [9 – 11].

Говоря об устойчивости бортов карьеров, необходимо отметить, что кроме вопроса о том, как происходит потеря устойчивости, не менее интересен вопрос, до какой глубины можно без ущерба для безопасности ведения работ извлекать полезные ископаемые. Наиболее простой является формула $H = \sigma_S/\gamma$, где σ_S — предел упругости среды на сжатие (эту формулу можно рассматривать как один из возможных вариантов определения глубины карьера).

Цель данной работы — определение максимально допустимой глубины карьера на основе теории предельного равновесия горных пород с учетом строения карьера и таких свойств горных пород, как угол внутреннего трения и сцепление.

ВЫБОР ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Известно, что горные породы проявляют при деформировании разносопротивляемость при растяжении и сжатии и, кроме того, эффект дилатансии. Как учесть эти факторы в математической модели? Рассмотрим случай плоской деформации:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(деформация ε_z равняется нулю, напряжение σ_z имеет некоторое значение, обеспечивающее условие плоской деформации).

Для (1) используем сначала ортогональный и ортонормированный базис с ортами:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Под скалярным произведением тензоров здесь понимается след произведения двух матриц. Тензор T_3 имеет смысл шарового тензора, тензоры T_1, T_2 определяют девиаторное пространство. В базисе (2) тензоры T_σ, T_ε имеют следующие координаты:

$$S_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{2}}, \quad S_2 = \sqrt{2}\tau_{xy}, \quad S_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\sqrt{2}}, \quad \Omega_1 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\sqrt{2}}, \quad \Omega_2 = \sqrt{2}\varepsilon_{xy}, \quad \Omega_3 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Учитывая (3), можно говорить о векторном представлении тензоров T_σ, T_ε. При этом длину составляющей T_σ в плоскости, проходящей через орты T_1, T_2, будем обозначать как T:

$$T^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + 2\tau_{xy}^2 = 2\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right],$$

длину составляющей T_ε в этой же плоскости — как Γ:

$$\Gamma^2 = \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}{2} + 2\varepsilon_{xy}^2 = 2\left[\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2\right].$$

Векторы $\vec{T}$ и $\vec{\Gamma}$ в этой плоскости с длинами T и Γ представлены на рис. 1.

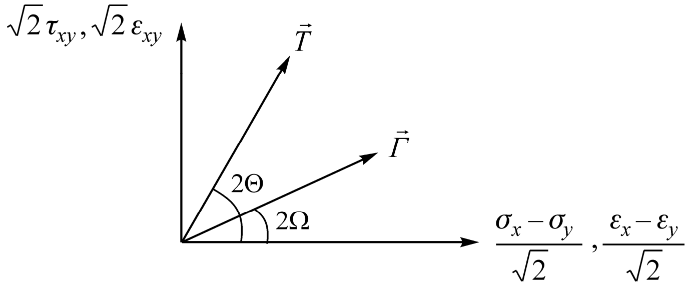

Рис. 1. Векторное представление составляющих тензоров T_σ, T_ε в плоскости, проходящей через орты T_1, T_2

Для первоначально изотропных сред при простых путях нагружения традиционно полагается $2\Theta = 2\Omega$, где 2Θ, 2Ω — полярные углы векторов $\vec{T}$, $\vec{\Gamma}$. Эту гипотезу будем считать справедливой для любых путей нагружения. Равенство углов означает

$$\mathrm{tg}2\Theta = \mathrm{tg}2\Omega = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}, \qquad (4)$$

т. е. предполагается, что имеет место соосность тензоров напряжений и деформаций [12].

Далее определим плоскость, проходящую через векторы $\vec{T}$, $\vec{\Gamma}$ и орт T_3 (рис. 2). Здесь по оси абсцисс откладываются координаты S_3, Ω_3, равные соответственно $\sqrt{2}\sigma$, $\sqrt{2}\varepsilon$, где σ, ε — средние напряжение и деформация: $\sigma = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$; по оси ординат откладываются величины $T = \sqrt{2}\tau$, $\Gamma = \sqrt{2}\gamma$, где τ, γ — максимальные касательное напряжение и деформация сдвига соответственно.

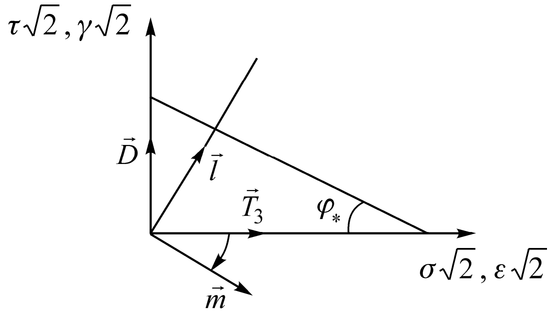

Рис. 2. Базис $\vec{m}$, $\vec{l}$, повернутый относительно “старого” базиса $\vec{T}_3$, $\vec{D}$ на угол φ_*

Для металлов базис $\vec{T}_3$, $\vec{D}$ ($\vec{D}$ — единичный тензор-девиатор, направленный вдоль составляющих тензоров T_σ, T_ε в плоскости, проходящей через орты T_1, T_2) является собственным. Это означает, что значения координат тензора T_ε в этом базисе зависят только от значений одноименных координат тензора T_σ: ε зависит только от σ, γ зависит только от τ (причем не только в упругости, но и в пластичности!). Для горных пород данный базис не является собственным. Повернем базис $\vec{T}_3$, $\vec{D}$ на рис. 2 на угол φ_*. В новом базисе координаты T_σ, T_ε имеют следующие представления:

$$\begin{cases} S_l = \sigma\sqrt{2}\sin\varphi_* + \tau\sqrt{2}\cos\varphi_*, \\ S_m = \sigma\sqrt{2}\cos\varphi_* - \tau\sqrt{2}\sin\varphi_*, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Omega_l = \varepsilon\sqrt{2}\sin\varphi_* + \gamma\sqrt{2}\cos\varphi_*, \\ \Omega_m = \varepsilon\sqrt{2}\cos\varphi_* - \gamma\sqrt{2}\sin\varphi_*. \end{cases} \tag{5}$$

При подходящем выборе угла φ_* получается [13 – 15], что диаграмма $S_m = S_m(\Omega_m)$ будет линейной (пропорциональной) при любом состоянии горной породы (упругость, пластичность, разрушение), диаграмма $S_l = S_l(\Omega_l)$ — нелинейной, но “единой” для всех программ нагружения. Отметим, что $\vec{m}$ и $\vec{l}$ — это, вообще говоря, не векторы, а единичные, как T_1, T_2, T_3, тензоры (см. (2)).

В дальнейшем будет рассматриваться случай идеальной пластичности горной породы, характеризующийся следующими зависимостями:

$$|S_l| = \left|\sigma\sqrt{2}\sin\varphi_* + \tau\sqrt{2}\cos\varphi_*\right| = S_l^0, \tag{6}$$

где S_l^0 — константа материала, предел ее упругости. Кроме условия пластичности, имеем еще два уравнения:

$$\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\cos\varphi_* - \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2}\,\sin\varphi_* = \frac{1}{K}\left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\cos\varphi_* - \sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,\sin\varphi_*\right], \tag{7}$$

$$\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \mathrm{tg}2\Theta\,. \tag{8}$$

В (7) константа материала K определяет наклон прямой $S_m = S_m(\Omega_m)$ в плоскости переменных S_m, Ω_m; Θ — угол, задающий первое главное направление для тензоров T_σ, T_ε. Выражения (7), (8) служат для определения смещений u_x, u_y.

РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

Рассмотрим применение соотношений (6)–(8) к решению задачи об определении максимально допустимой высоты карьера или отвала при плоской деформации. Задача здесь распадается на две — одна для отыскания напряжений и вторая — для определения смещений при известных напряжениях.

Задачу определения максимально допустимой глубины будем рассматривать как жестко-пластическую, т. е. пренебрегаем упругими деформациями. Для решения задачи имеем два уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \gamma_b = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где γ_b — плотность массовых сил. Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} связаны условием (6). Как и в [12], введем переменные σ, τ, Θ по формулам:

$$\sigma_x = \sigma + \tau\cos 2\Theta\,, \quad \sigma_y = \sigma - \tau\cos 2\Theta\,, \quad \tau_{xy} = \tau\sin 2\Theta\,. \tag{10}$$

Из (6) следует, что

$$\tau = \tau_S - \mathrm{tg}\varphi_*\sigma\,, \tag{11}$$

здесь τ — максимальное касательное напряжение; σ — среднее напряжение; τ_S — константа материала, определяемая выражением

$$\tau_S = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} S_l^0 \frac{1}{\cos\varphi_*}\,. \tag{12}$$

Далее подставляем (11) в (10), (10) в (9) и получаем систему дифференциальных уравнений для переменных σ и Θ, которая является гиперболической [4]. При этом характеристическое уравнение для определения отношения $\lambda = \dfrac{dy}{dx}$ сводится к уравнению

$$\lambda^2 + \frac{2\sin 2\Theta}{\mathrm{tg}\varphi_* - \cos 2\Theta}\lambda + \frac{\mathrm{tg}\varphi_* + \cos 2\Theta}{\mathrm{tg}\varphi_* - \cos 2\Theta} = 0\,, \tag{13}$$

корни которого

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sin 2\Theta \pm \sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\varphi_*}}{\mathrm{tg}\varphi_* - \cos 2\Theta}\,. \tag{14}$$

При замене

$$\mathrm{tg}\varphi_* = -\cos 2\alpha \tag{15}$$

(14) трансформируются в выражения [4]:

$$\lambda_1 = \mathrm{tg}(\Theta + \alpha)\,, \quad \lambda_2 = \mathrm{tg}(\Theta - \alpha)\,. \tag{16}$$

Несколько слов по поводу выбора α. Из (15) следует, что при $\operatorname{tg}\varphi_* \geq 0$ значение $\cos 2\alpha$ отрицательно, т. е. угол 2α находится в пределах $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\alpha \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ или $\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$. Для определенности будем считать, что угол α находится в пределах $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$.

Сделаем замечание. Из (16) следует, что характеристики λ_1, λ_2 пересекаются под углом 2α.

Вычисляя соотношения на характеристиках, получаем:

для $\lambda = \lambda_1 = \operatorname{tg}(\Theta + \alpha)$

$$2\Theta + \operatorname{tg}2\alpha \ln|\sigma \cos 2\alpha + \tau_S| + \gamma_b \int_{y0}^{y} \frac{\cos(\Theta - \alpha)dy}{(\sigma \cos 2\alpha + \tau_S)\sin(\Theta + \alpha)} = \xi = \text{const}, \tag{17}$$

для $\lambda = \lambda_2 = \operatorname{tg}(\Theta - \alpha)$

$$2\Theta - \operatorname{tg}2\alpha \ln|\sigma \cos 2\alpha + \tau_S| + \gamma_b \int_{y0}^{y} \frac{\cos(\Theta + \alpha)dy}{(\sigma \cos 2\alpha + \tau_S)\sin(\Theta - \alpha)} = \eta = \text{const}. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь, как связаны граничные условия задачи с функциями σ, Θ. Если обозначить через β — угол, образуемый нормалью к поверхности, то искомые формулы приобретут вид

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma + (\tau_S - \sigma \operatorname{tg}\varphi_*)\cos 2(\beta - \Theta), \\ \tau_{nt} = -(\tau_S - \sigma \operatorname{tg}\varphi_*)\sin 2(\beta - \Theta). \end{cases}$$

Для случая равенства касательного усилия τ_{nt} нулю $\Theta = \beta + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$ (множество целых чисел).

Обратимся теперь к задаче о потере устойчивости борта карьера. На рис. 3 эта ситуация представлена схематично.

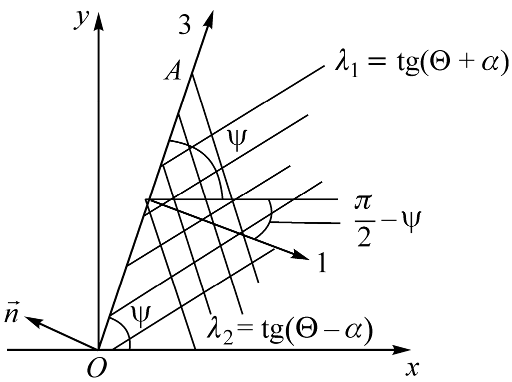

Рис. 3. Борт карьера, на котором указаны направления 1, 3 главных осей тензора напряжений и направления характеристик семейств λ_1, λ_2

Имеем борт карьера *OA*, наклоненный к оси абсцисс x под углом ψ, на котором вектор напряжений Коши равен нулю. Это означает, что

$$\begin{cases} -\sigma_x \sin\psi + \tau_{xy} \cos\psi = 0, \\ -\tau_{xy} \sin\psi + \sigma_y \cos\psi = 0, \end{cases}$$

потому что $\vec{n} = (-\sin\psi, \cos\psi)$.

Отсюда

$$\sigma_x = \tau_{xy}\,\mathrm{ctg}\psi\,, \quad \sigma_y = \tau_{xy}\,\mathrm{tg}\psi\,. \tag{19}$$

Эти напряжения должны удовлетворять условию (6), которое с учетом (19) переписывается в виде

$$\frac{\sqrt{2}\tau_{xy}}{\sin 2\psi}\left[\sin\varphi_* - \cos\varphi_*\right] = \pm S_l^0\,. \tag{20}$$

Перед S_l^0 выбираем знак “плюс”, потому что материал вблизи борта карьера находится в состоянии сжатия и, кроме того, $\mathrm{tg}\varphi_* \le 1$, т. е. $\sin\varphi_* - \cos\varphi_* \le 0$. Полная картина поля линий скольжения в данной задаче представлена на рис. 4.

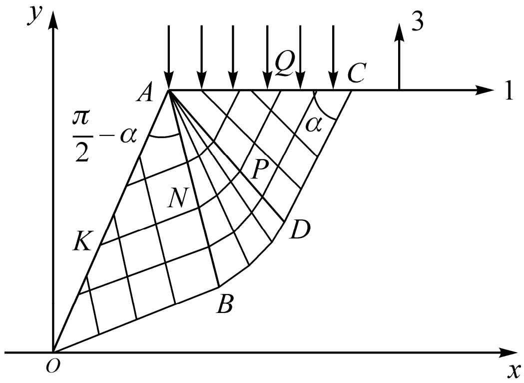

Рис. 4. Области простых напряженных состояний — треугольники *OAC* и *ADC*, сектор *BAD* — центрированное поле

Рассмотрим характеристику *KN* в треугольнике *OAB*. Она определяется уравнением

$$\lambda_1 = \frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}(\Theta + \alpha)\,, \tag{21}$$

где α связано с углом φ_* уравнением (15). В точке *K*, как следует из рис. 3,

$$\Theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \psi - \frac{\pi}{2}\,,$$

поэтому значение параметра ξ вдоль (21) есть выражение

$$\xi_1 = 2\psi - \pi - \frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi_*}}{1-\mathrm{tg}\varphi_*}\ln\left(\frac{\tau_S}{1-\mathrm{tg}\varphi_*}\right).$$

Здесь использованы (15), правило для выбора значения угла α, зависимости (19), (20). Кроме того, для упрощения расчетов положено $\gamma_b = 0$.

Значение параметра $\xi = \xi_1$ сохраняется постоянным вдоль всей характеристики *KNPQ*. На границе *AC* $\Theta = 0$, неизвестной величиной остается σ, поэтому имеем следующее уравнение для отыскания σ:

$$-\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi_*}}{\mathrm{tg}\varphi_*}\ln(\tau_S - \mathrm{tg}\varphi_*\sigma) = 2\psi - \pi - \frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}\varphi_*}}{\mathrm{tg}\varphi_*}\ln\left(\frac{\tau_S}{1-\mathrm{tg}\varphi_*}\right). \tag{22}$$

Разрешая (22) относительно σ, получаем

$$\sigma = \frac{\tau_S}{\mathrm{tg}\varphi_*}\left[1 - \frac{1}{1-\mathrm{tg}\varphi_*}e^{\frac{(\pi-2\psi)\,\mathrm{tg}\varphi_*}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi_*}}}\right]. \tag{23}$$

Для определения σ_x, σ_y на границе AC используем условие пластичности (6), которое будет иметь вид

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\sin\varphi_* + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos\varphi_* = \frac{S_l^0}{\sqrt{2}}, \tag{24}$$

потому что $\tau_{xy}=0$ на AC и, кроме того, $|\sigma_y|>|\sigma_x|$.

Из (23), (24) следует, что

$$\sigma_y\Big|_{AC} = \frac{\tau_S}{\mathrm{tg}\varphi_*}\left[1-\frac{1+\mathrm{tg}\varphi_*}{1-\mathrm{tg}\varphi_*}e^{\frac{(\pi-2\psi)\,\mathrm{tg}\varphi_*}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi_*}}}\right]. \tag{25}$$

Для определения максимально допустимой высоты карьера, отвала найдем связь между длинами отрезков OA и AC на рис. 4. Для этого учтем, что угол между характеристиками равен 2α. Тогда в центрированном поле характеристик, с одной стороны, имеем одно семейство характеристик в виде лучей, выходящих их точки A, другое семейство связано с первым формулой

$$\frac{r d\chi}{dr} = \mathrm{tg}2\alpha, \tag{26}$$

где χ — центральный угол в секторе BAD.

Интегрируя (26) при изменении угла χ от нуля до значения $\frac{\pi}{2}-\psi$ (угол BAD при любом значении угла φ_* среды остается равным указанному), находим $r=r_0e^{\mathrm{ctg}2\alpha\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)}$, другими словами,

$$AD = ABe^{\frac{-\mathrm{tg}\varphi_*}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi_*}}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)}, \tag{27}$$

т. е. (см. рис. 4)

$$AC = \frac{2ABe^{\frac{-\mathrm{tg}\varphi_*}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi_*}}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)}\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = OAe^{\frac{-\mathrm{tg}\varphi_*}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi_*}}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)}\mathrm{ctg}\alpha. \tag{28}$$

Определим угол наклона прямой OC на рис. 5 к оси Ox. Имеем $OL=h$. Величина LC складывается из двух величин LA, AC; $LA = h\,\mathrm{ctg}\psi$. Отсюда находим

$$\mathrm{ctg}\gamma = \frac{\cos\psi + e^{\frac{-\mathrm{tg}\varphi_*}{\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\varphi_*}}(\pi-2\psi)}\mathrm{ctg}\alpha}{\sin\psi}. \tag{29}$$

Из этой формулы видно, что угол γ не зависит от размеров карьера, определяется только углом наклона его борта ψ и углом φ_* — характеристикой среды. Это означает, что зная угол γ, можно, используя (29), найти φ_* при данном значении угла ψ.

Дальнейшее рассмотрение связано с введением высоты карьера OM_0. Назовем эту высоту H. Будем считать, что потеря устойчивости борта карьера OA связана с действием веса массива пород, заключенного в область AM_1M_2C. Этот вес действует на площадку AC. Определим давление, оказываемое этим весом на данную площадку при фиксированном H. Для этого требуется найти площадь трапеции AM_1M_2C:

$$S_{AM_1M_2C} = \frac{2h\,\mathrm{ctg}\gamma-(H+h)\,\mathrm{ctg}\psi}{2}(H-h).$$

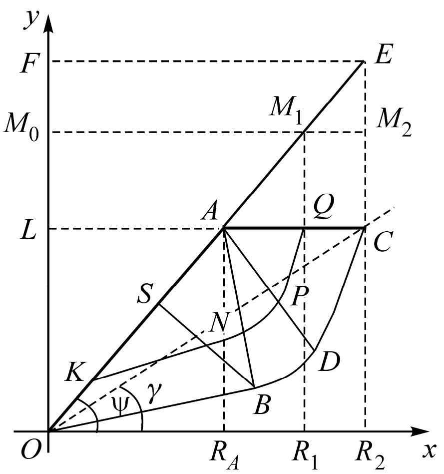

Рис. 5. Схема к определению угла наклона прямой *OC* к оси абсцисс (угла γ) через угол наклона борта карьера ψ , величины отрезков *OB*, *BD*, *DC* характеристических линий (треугольники *OBA*, *ADC* — равнобедренные, величина *AC* находится через *AB* по формуле (27))

Давление при этом получается равным

$$P = -\frac{H}{\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\psi}\left[\operatorname{ctg}\gamma - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\psi\left(\frac{H}{h}+1\right)\right]\left(1-\frac{h}{H}\right)\rho g\,.$$

Рассматривая давление как функцию параметра h/H, находим его экстремум. Он достигается при значении $h = H\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\psi}{2\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\psi}}$. Тогда максимальное давление получаем в виде

$$P = -\rho g H\,\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}\psi}\,\sqrt{2\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\psi} - \operatorname{ctg}\psi}{\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\psi}{2\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\psi}}(\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\psi)}\left(1-\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\psi}{2\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\psi}}\right).$$

Приравняем это давление значению σ_y из (25). В результате получаем выражение для определения максимально допустимой высоты карьера

$$H = \frac{\tau_S}{\rho g \operatorname{tg}\varphi_*}\left[\frac{1+\operatorname{tg}\varphi_*}{1-\operatorname{tg}\varphi_*}\exp\left\{\frac{(\pi-2\psi)\operatorname{tg}\varphi_*}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\varphi_*}}\right\}-1\right]\frac{\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\psi}{2\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\psi}}(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\psi)}{\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\psi}{2\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\psi}}\,(2\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\psi)-\operatorname{ctg}\psi}\;\frac{1}{1-\sqrt{\dfrac{\operatorname{ctg}\psi}{2\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\psi}}},$$

где $\operatorname{ctg}\gamma$ определяется из (29).

На рис. 6 приведены зависимости безразмерной высоты $\hat{H} = H\dfrac{\rho g}{\tau_S}$ от угла φ_* (рис. 6*а*) и от угла ψ (рис. 6*б*).

В заключение сделаем два замечания: 1) формулу (25), описывающую обрушение борта карьера, можно использовать для определения предела упругости материала τ_S; 2) используя (7), (8) для определения смещений, получаем те же самые характеристики (14) и соотношения на характеристиках в случае $K = \infty$ в виде $du_x dx + du_y dy = 0$. Эти соотношения есть скалярное произведение вектора изменений смещений на направления характеристик. Отсюда следует, что смещения могут изменяться только в направлениях, ортогональным характеристикам, т. е. при сдвигах вдоль характеристик.

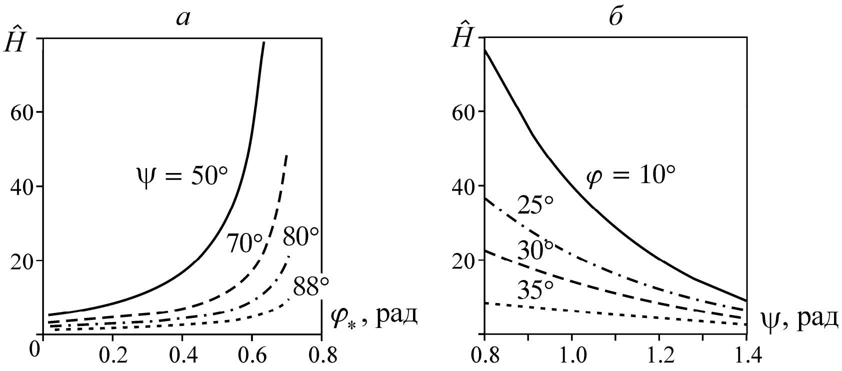

Рис. 6. Зависимости безразмерной высоты $\hat{H}$: *а* — от угла поворота тензорного базиса φ_*; *б* — от угла наклона борта карьера ψ

ВЫВОДЫ

Получена формула для вычисления максимально допустимой высоты карьера в зависимости от плотности среды, угла внутреннего трения, угла наклона борта карьера, предела упругости материала. Построены кривые, отражающие эти связи. Из них следует, что при одной и той же плотности среды, пределе упругости материала высота карьера тем больше, чем больше угол внутреннего трения, и тем меньше, чем круче борт карьера. С другой стороны, при одних и тех же значениях угла внутреннего трения и угла наклона борта карьера высота увеличивается с ростом предела упругости и уменьшением плотности материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фисенко Г. Л.** Устойчивость бортов карьеров и отвалов. — М.: Недра, 1965.
2. **Галустьян Э. Л.** Управление геомеханическими процессами в карьерах. — М.: Недра, 1980.
3. **Цытович Н. А.** Механика грунтов. — М.: Высш. шк., 1983.
4. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969.
5. **Березанцев В. Г.** Расчет оснований сооружений. — Л.: Стройиздат, 1970.
6. **Караулов А. М., Королев К. В.** Построение решений статики грунтов методом сопряжения областей предельного равновесия // Вестн. СГУПС. — Новосибирск, 2002. — Вып. 4.
7. **Гениев Г. А., Эстерин М. И.** Динамика пластической и сыпучей сред. — М.: Стройиздат, 1972.
8. **Соловьев Ю. И.** Несущая способность предельно напряженного основания под ленточным фундаментом // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1979. — № 4.
9. **Цветков В. К.** Исследование устойчивости откосов и склонов с помощью метода конечных элементов // Приложение численных методов к задачам геомеханики: межвуз. сб. науч. тр. — М.: МИСИ, 1986.
10. **Зубков В. В., Зубкова И. А., Сидоров В. С.** Оценка и прогноз геомеханического состояния массива горных пород // Уголь. — 1994. — № 7.
11. **Ухов С. Б.** Расчет сооружений и оснований методом конечных элементов: учеб. пособие. — М.: Энергия, 1973.
12. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
13. **Чанышев А. И.** О соотношениях упругости для горных пород. Деформационная теория пластичности // ФТПРПИ. — 1986. — № 1.
14. **Чанышев А. И.** Построение паспортных зависимостей горных пород в допредельной и запредельной областях деформирования // ФТПРПИ. — 2002. — № 5.
15. **Чанышев А. И., Абдулин И. М.** Деформирование и разрушение первоначально изотропных сред с условием нарушения прочности Мизеса // ФТПРПИ. — 2006. — № 4.

Поступила в редакцию 1/IV 2015