

УДК 532.593+536.711

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПОРИСТОЙ СМЕСИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ КОМПОНЕНТОВ

Р. К. Бельхеева

Новосибирский военный институт внутренних войск им. И. К. Яковлева МВД РФ,
630114 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: rumia@post.nsu.ru, rimbela@academ.org

Предложен метод построения уравнения состояния простой термодинамически равновесной смеси, основанный на гипотезе аддитивности объемов ее компонентов. Равновесное состояние определяется условиями равенства давлений, температур и скоростей составляющих смеси. При описании смеси используется модель взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов, в которой учитывается наличие газа в порах. Единообразно (в форме уравнения Ми — Грюнайзена) представлены уравнения состояния смеси и всех компонентов включая газообразный. Путем представления функций в виде рядов Тейлора получены соотношения, позволяющие выражать параметры уравнения состояния смеси через соответствующие параметры и массовые концентрации компонентов. Проведены численные расчеты ударно-волнового нагружения и изоэнтропического расширения сплошных и пористых меди, вольфрама, смесей вольфрам — медь и вольфрам — никель — медь. Показано, что полученное уравнение состояния смеси достаточно точно описывает поведение многокомпонентных сред при распространении в них ударных волн и волн разгрузки.

Ключевые слова: уравнение состояния, пористая смесь, ударная адиабата, изоэнтропа расширения.

Для описания поведения пористых веществ и смесей используется модель взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов, принципы построения которой изложены в работе [1]. С помощью гипотезы термодинамического равновесия смеси ее движение можно описать как движение одного континуума с уравнением состояния, учитывающим свойства компонентов смеси и их массовые концентрации. При термодинамическом равновесии выполняются условия $P_i = P$, $T_i = T$, $u_i = u$, где P_i , T_i , u_i — давление, температура и массовая скорость компонента i соответственно; P , T , u — давление, температура и массовая скорость смеси соответственно. Термодинамические свойства смеси определяются свойствами составляющих ее компонентов. Считается, что свойства компонентов простых смесей не меняются и задаются уравнениями для этих веществ в свободном состоянии. Предполагается, что компоненты смеси представляют собой двухпараметрические среды, т. е. термодинамические функции каждой составляющей зависят от двух термодинамических параметров: истинной плотности ρ_{ii} (массы i -й составляющей в единице ее объема) и температуры T . Способ описания смеси как единого континуума рассмотрен в работах [1–5] и др. В [1] приведено уравнение состояния равновесной смеси калорически совершенного газа и несжимаемого твердого вещества. В [2] подобное уравнение получено для трехком-

понентной смеси с баротропным уравнением состояния для компонентов. В [3] найдена зависимость среднего давления твердой фазы от пористости и внутрипорового давления при статическом нагружении твердой пористой смеси. В [4, 5] получено уравнение состояния пористой смеси конденсированных компонентов в форме уравнения Ми — Грюнайзена, параметры которого выражаются через соответствующие параметры и массовые концентрации составляющих. Эти параметры вычисляются по различным формулам в разных диапазонах давления. В настоящей работе параметры уравнения состояния вычисляются через соответствующие параметры и массовые концентрации составляющих с помощью одних и тех же формул независимо от величины давления. Также выводится уравнение, связывающее коэффициент Грюнайзена смеси и коэффициенты Грюнайзена компонентов.

При описании ударных волн в пористой среде последняя рассматривается либо как сплошная среда с уменьшенной средней плотностью, либо как система чередующихся пластин и зазоров. Существует небольшое количество работ, в которых учитывается наличие воздуха в порах. В [4–6] проведено сравнение расчетных и экспериментальных ударных адиабат пористых веществ и смесей с учетом наличия воздуха в порах.

Уравнение состояния является фундаментальной характеристикой вещества и применяется при описании конкретных физических систем. Получение уравнения состояния вещества методами статистической физики затруднено вследствие необходимости решения квантово-механической задачи о взаимодействии многих тел. Поэтому для описания поведения вещества в определенном процессе рассматриваются упрощенные эмпирические модели с ограниченной областью применимости. Сложность описания смеси нескольких конденсированных веществ существенно возрастает.

При ударно-волновом нагружении до значений давления порядка $10 \div 100$ ГПа часто используются уравнения состояния конденсированного вещества в форме уравнения Ми — Грюнайзена

$$P = P_x + P_T, \quad (1)$$

где $P_x = A[(\rho/\rho_0)^n - 1]$ — упругая составляющая давления; $P_T = \gamma\rho E_T$ — тепловая составляющая давления; ρ — плотность вещества; ρ_0 — начальная плотность; A , n — константы, характеризующие вещество; γ — коэффициент Грюнайзена; E_T — тепловая энергия. В исследуемом диапазоне давлений коэффициент Грюнайзена γ считается постоянным и равным коэффициенту Грюнайзена при нормальных условиях γ_0 . Внутренняя энергия также представляется в виде суммы двух составляющих:

$$E = E_x + E_T. \quad (2)$$

Здесь E_x — упругая энергия сжатия:

$$E_x = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{P_x}{\rho^2} d\rho,$$

$E_T = c_v(T - T_0)$; c_v — удельная теплоемкость; T — температура; T_0 — начальная температура.

В данном случае уравнение состояния (1) принимает вид

$$P = A[(\rho/\rho_0)^n - 1] + \gamma_0\rho c_v(T - T_0). \quad (3)$$

Уравнение состояния (3) нормировано таким образом, чтобы при нормальных условиях ($\rho = \rho_0$, $T = T_0$) давление было равно нулю: $P = 0$. Такое приближение возможно, поскольку давление в ударной волне значительно больше атмосферного давления.

В механике гетерогенных сред удельная теплоемкость N -компонентной смеси задается выражением $c_v = \sum_{i=1}^N x_i c_{vi}$, где c_{vi} , x_i — удельные теплоемкости и массовые концентрации компонентов. Это соотношение получено с учетом предположения об аддитивности внутренней энергии смеси по массам составляющих.

В [7] среднее значение коэффициента Грюнайзена определяется из соотношения

$$\gamma = V \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_V,$$

где V — удельный объем. В силу предположений о равенстве давлений в компонентах смеси и аддитивности внутренней энергии смеси выражение для определения коэффициента Грюнайзена приводится к виду

$$\frac{V}{\gamma} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i V_i}{\gamma_i}.$$

В [8] показано, что при распространении в воздухе ударных волн исследуемой интенсивности ударные адиабаты, рассчитанные с помощью уравнений состояния вида (1), (2), хорошо согласуются с экспериментальными адиабатами.

Пусть $A_1 < \dots < A < \dots < A_N$. Плотность многокомпонентной смеси вычисляется по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii}}. \quad (4)$$

Из уравнения (3) следует соотношение для плотности вещества

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{P + A - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0)}{A} \right)^{1/n}. \quad (5)$$

Подставляя соответствующие плотности в (4), получаем

$$\left[\rho_0 \left(\frac{P + A - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0)}{A} \right)^{1/n} \right]^{-1} = \sum_{i=1}^N x_i \left[\rho_{ii0} \left(\frac{P + A_i - \gamma_{i0} \rho_{ii} c_{vi} (T - T_0)}{A_i} \right)^{1/n_i} \right]^{-1}. \quad (6)$$

При малых давлениях $P < A_1 < \dots < A < \dots < A_N$ каждую из дробей вида $[1 + (P - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0))/A]^{-1/n}$ в (6) можно разложить в ряд Тейлора по переменным P/A и $\gamma_0 \rho c_v (T - T_0)/A$, причем ряд

$$1 - \frac{1}{n} \frac{P}{A} + \frac{n+1}{2n^2} \left(\frac{P}{A} \right)^2 + \frac{\gamma_0 \rho c_v (T - T_0)}{nA} + \dots$$

сходится к величине $\{\rho_0 [1 + (P - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0))/A]^{1/n}\}^{-1}$, так как для каждого i -го компонента выполняется условие

$$\left| \frac{P - \gamma_{i0} \rho_{ii} c_{vi} (T - T_0)}{A_i} \right| < 1.$$

После замены каждой дроби соответствующим ей рядом уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \left[1 - \frac{1}{n} \frac{P}{A} + \frac{n+1}{2n^2} \left(\frac{P}{A} \right)^2 + \frac{\gamma_0 \rho c_v (T - T_0)}{nA} + \dots \right] = \\ = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left[1 - \frac{1}{n_i} \frac{P}{A_i} + \frac{n_i+1}{2n_i^2} \left(\frac{P}{A_i} \right)^2 + \frac{\gamma_{i0} \rho_{ii} c_{vi} (T - T_0)}{n_i A_i} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях P , получаем соотношения для определения параметров уравнения состояния смеси A , ρ_0 , n . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $T - T_0$, имеем зависимость коэффициента Грюнайзена смеси γ_0 от коэффициентов Грюнайзена компонентов

$$\frac{\rho\gamma_0 c_v}{\rho_0 n A} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i \rho_{ii} \gamma_{i0} c_{vi}}{\rho_{ii0} n_i A_i}.$$

Подставляя в последнее соотношение выражения для ρ/ρ_0 и ρ_{ii}/ρ_{ii0} и выделяя главный член разложения, находим выражение, определяющее зависимость коэффициента Грюнайзена смеси γ_0 от параметров компонентов.

Таким образом, получены соотношения для вычисления параметров уравнения состояния смеси A , ρ_0 , n , γ_0 при малых давлениях $P < A_1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}}, & \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{nA} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \frac{1}{n_i A_i}, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{n+1}{n^2 A^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \frac{n_i+1}{n_i^2 A_i^2}, & \frac{\gamma_0 c_v}{nA} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i A_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для получения соответствующих выражений в диапазоне давлений $A_1 < \dots < P < \dots < A_N$ проведено преобразование (5)

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(1 + \frac{P - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0)}{A} \right)^{1/n} &= \rho_0 \left(1 + \frac{P - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0) - A_N + A_N}{A} \right)^{1/n} = \\ &= \rho_0 \left(\frac{A + A_N}{A} \right)^{1/n} \left(1 + \frac{P - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0) - A_N}{A + A_N} \right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Так как выполняется условие $|(P - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0) - A_N)/(A + A_N)| < 1$, то дробь $\{\rho_0 [1 + (P - \gamma_0 \rho c_v (T - T_0))/A]^{1/n}\}^{-1}$ можно заменить сходящимся к ней рядом. В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{A + A_N} \right)^{1/n} &\left(1 - \frac{1}{n} \frac{P - A_N}{A + A_N} + \frac{n+1}{2n^2} \left(\frac{P - A_N}{A + A_N} \right)^2 + \frac{1}{n} \frac{\gamma_0 \rho c_v (T - T_0)}{A + A_N} + \dots \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{A_i + A_N} \right)^{1/n_i} \left(1 - \frac{1}{n_i} \frac{P - A_N}{A_i + A_N} + \frac{n_i+1}{2n_i^2} \left(\frac{P - A_N}{A_i + A_N} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n_i} \frac{\gamma_{i0} \rho_{ii} c_{vi} (T - T_0)}{A_i + A_N} + \dots \right). \end{aligned}$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях $P - A_N$ и $T - T_0$, получаем выражения для определения параметров A , ρ_0 , n , γ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{A + A_N} \right)^{1/n} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{A_i + A_N} \right)^{1/n_i}, \\ \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{A + A_N} \right)^{1/n} \frac{1}{n(A + A_N)} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{A_i + A_N} \right)^{1/n_i} \frac{1}{n_i(A_i + A_N)}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{A + A_N} \right)^{1/n} \frac{n+1}{n^2(A + A_N)^2} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{A_i + A_N} \right)^{1/n_i} \frac{n_i+1}{n_i^2(A_i + A_N)^2},$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{A + A_N} \right)^{1/n} \frac{\gamma_0 \rho c_v}{n(A + A_N)} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{A_i + A_N} \right)^{1/n_i} \frac{\gamma_{i0} \rho_{ii} c_{vi}}{n_i(A_i + A_N)}.$$

Подставляя в последнее соотношение выражения для ρ/ρ_0 и ρ_{ii}/ρ_{ii0} и выделяя главный член разложения, можно выразить коэффициент Грюнайзена смеси γ_0 через параметры уравнений состояния ее компонентов. Вводя обозначения

$$S_1 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{A_i + A_N} \right)^{1/n_i}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{A_i + A_N} \right)^{1/n_i} \frac{1}{n_i(A_i + A_N)},$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{A_i + A_N} \right)^{1/n_i} \frac{n_i+1}{n_i^2(A_i + A_N)^2},$$

выражения для искомых параметров можно представить в более простом виде

$$n = \frac{S_1 S_3}{S_2^2} - 1, \quad A = \frac{S_1}{n S_2} - A_N, \quad \rho_0 = \frac{1}{S_1} \left(\frac{A}{A + A_N} \right)^{1/n},$$

$$\frac{\gamma_0 c_v}{n(A + A_N)} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i(A_i + A_N)}. \quad (8)$$

При $P > A_N$ для всех компонентов смеси выполняется условие $A_i/P < 1$ и равенство (6) приводится к виду

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{P} \right)^{1/n} \left[1 - \frac{1}{n} \frac{A}{P} + \frac{n+1}{2n^2} \left(\frac{A}{P} \right)^2 + \frac{\gamma_0 \rho c_v (T - T_0)}{nP} + \dots \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{P} \right)^{1/n_i} \left[1 - \frac{1}{n_i} \frac{A_i}{P} + \frac{n_i+1}{2n_i^2} \left(\frac{A_i}{P} \right)^2 + \frac{\gamma_{i0} \rho_{ii} c_{vi} (T - T_0)}{n_i P} + \dots \right].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях P^{-1} и $T - T_0$, получаем выражения для определения искомых параметров A , ρ_0 , n , γ_0 :

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{P} \right)^{1/n} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{P} \right)^{1/n_i}, \quad \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{P} \right)^{1/n} \frac{A}{n} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{P} \right)^{1/n_i} \frac{A_i}{n_i},$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{P} \right)^{1/n} \frac{(n+1)A^2}{n^2} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{P} \right)^{1/n_i} \frac{(n_i+1)A_i^2}{n_i^2},$$

$$\left(\frac{A}{P} \right)^{1/n} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\gamma_0 c_v}{n} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{A_i}{P} \right)^{1/n_i} \frac{\rho_{ii}}{\rho_{ii0}} \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i}.$$

Вводя обозначения

$$Q_1 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{P}\right)^{1/n_i}, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{P}\right)^{1/n_i} \frac{A_i}{n_i},$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{ii0}} \left(\frac{A_i}{P}\right)^{1/n_i} \frac{(n_i + 1)A_i^2}{n_i^2},$$

искомые параметры определим из соотношений

$$n = \frac{Q_1 Q_3}{Q_2^2} - 1, \quad A = \frac{Q_2}{Q_1} - \frac{Q_3}{Q_2}, \quad \rho_0 = \frac{1}{Q_1} \left(\frac{A}{P}\right)^{1/n}, \quad \frac{\gamma_0 c_v}{n} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i}. \quad (9)$$

Из приведенных выше соотношений следует, что параметры уравнения состояния смеси зависят от текущего давления.

Таким образом, получено уравнение состояния, параметры которого при $P < A_1$ задаются соотношениями (7), при $A_1 < P < A_N$ — соотношениями (8), при $P > A_N$ — соотношениями (9). Это уравнение состояния (далее — первая модель) используется при расчете ударных адиабат смеси.

В случае когда среда перед фронтом прямой ударной волны покоится и давление в невозмущенной среде равно нулю, уравнения Гюгонио для равновесной смеси имеют вид

$$\rho_{00} D = \rho(D - u), \quad P = \rho_0 D u, \quad E = \frac{P}{2} \left(\frac{1}{\rho_{00}} - \frac{1}{\rho} \right), \quad (10)$$

где ρ_{00} — плотность смеси перед фронтом ударной волны; u , P , E — массовая скорость, давление и энергия среды за фронтом ударной волны; D — скорость фронта ударной волны. Добавляя к системе уравнений (10) уравнения состояния среды $P = P(\rho, T)$ и $E = E(\rho, T)$ с параметрами, определяемыми в зависимости от величины давления P соотношениями (7), (8) или (9), получаем систему пяти уравнений для шести неизвестных u , D , P , E , ρ , T . Задавая значение скорости среды за фронтом ударной волны, из системы уравнений (10), (1), (2) можно определить значения остальных ее параметров.

Параметры A , ρ_0 , n , γ_0 уравнения состояния смеси в различных диапазонах значений давления вычисляются по разным формулам, вследствие чего на ударных адиабатах, рассчитанных с использованием этого уравнения состояния, появляются изломы в точках, соответствующих границам диапазонов.

Для получения уравнений состояния пористых меди, вольфрама, а также сплошных и пористых смесей вольфрам — медь использованы значения параметров, приведенные в таблице.

На рис. 1, 2 приведены ударные адиабаты для сплошных меди, вольфрама и смеси вольфрам — медь с массовыми долями вольфрама и меди 76 и 24 % соответственно, рассчитанные по первой модели. В расчетах использовались постоянные коэффициенты Грюнайзена, поэтому при больших скоростях наблюдается отклонение расчетных адиабат для чистых меди и вольфрама от экспериментальных адиабат. При малых массовых

Параметры уравнений состояния воздуха, меди и вольфрама

Вещество	$\rho_{ii,0}$, кг/м ³	A_i , Па	n_i	c_{vi} , кДж/(кг·К)	γ_i	l_i
Воздух	1,3	$0,695 \cdot 10^{-3}$	2,20	0,718	0,16	0
Медь	$8,93 \cdot 10^3$	$347,5 \cdot 10^8$	4,00	0,382	2,00	0,80
Вольфрам	$19,235 \cdot 10^3$	$866,7 \cdot 10^8$	3,55	0,152	1,54	1,06

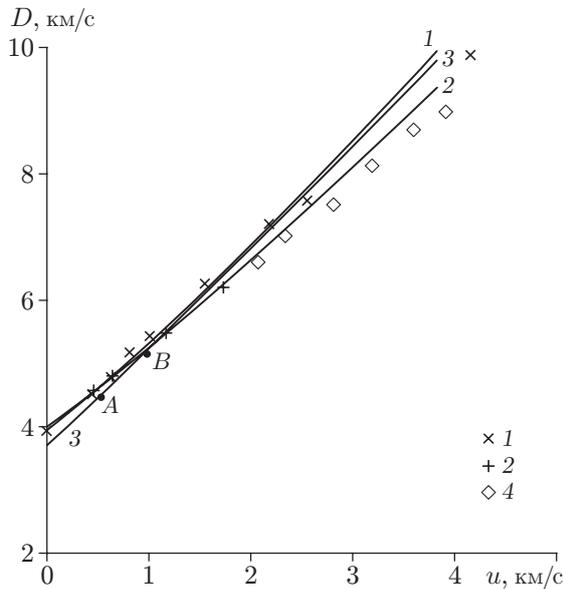


Рис. 1

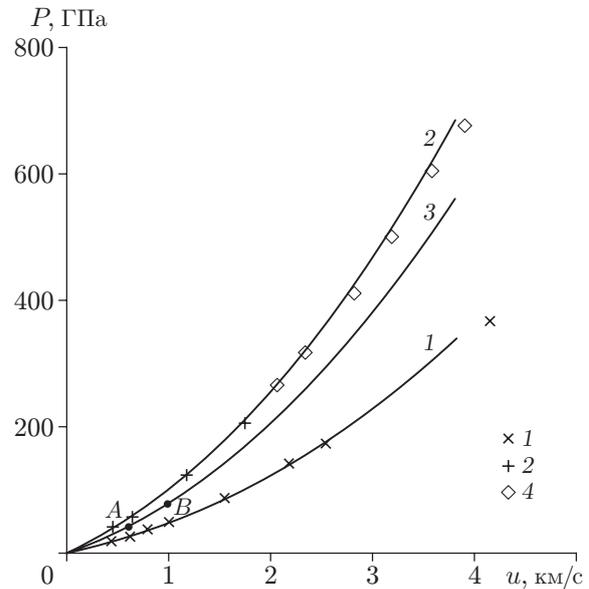


Рис. 2

Рис. 1. Ударные адиабаты для меди (1), вольфрама (2, 4) и сплошной смеси вольфрама (76 %) и меди (24 %) (3) в координатах $D-u$:

линии — результаты расчетов, выполненных в настоящей работе; точки — экспериментальные данные (1, 2 — данные [7], 4 — данные [10]); A, B — точки на адиабате, в которых имеют место изломы

Рис. 2. Ударные адиабаты для меди (1), вольфрама (2, 4) и сплошной смеси вольфрама (76 %) и меди (24 %) (3) в координатах $P-u$ (обозначения те же, что на рис. 1)

скоростях ударная адиабата смеси находится ниже адиабат обоих веществ, при больших — между ними. Этот результат является ожидаемым: малые возмущения распространяются со скоростью, близкой к скорости звука, которая в смеси может быть меньше минимальной скорости звука в любом ее компоненте [2, 9]. На рис. 2 положение адиабат чистых веществ и их смеси также соответствует экспериментальным данным.

В данном случае смесь состоит из двух компонентов и $A_1 = A_{Cu}$, $A_N = A_W$. При давлениях порядка A_1 и A_N на адиабатах смеси наблюдаются изломы в точках A и B соответственно. Эти точки являются границами областей, в которых применимы уравнения состояния с параметрами, задаваемыми системами (7)–(9).

В [11] сформулированы основные требования к уравнениям состояния, в частности непрерывность и гладкость зависимостей. В данной работе предлагается метод построения уравнения состояния смеси, описывающего поведение среды во всем диапазоне давлений. При построении второй модели уравнения состояния смеси учитывается зависимость коэффициента Грюнайзена от удельного объема. В исследуемом диапазоне давлений зависимость коэффициента Грюнайзена γ от ρ приближенно интерполируется степенной функцией

$$\gamma \approx \gamma_0(\rho_0/\rho)^l,$$

где показатель степени l для металлов приближенно равен единице; γ_0 — коэффициент Грюнайзена в нормальных условиях [12]. Значения параметра l для воздуха, меди и вольфрама приведены в таблице. В этом случае уравнение состояния (1) принимает вид

$$P = A[(\rho/\rho_0)^n - 1] + \gamma_0\rho_0(\rho/\rho_0)^{1-l}c_v(T - T_0).$$

Для сохранения непрерывности уравнения состояния смеси проведено тождественное преобразование выражения для плотности (5) с использованием произведения kA_N , где k — некоторое положительное число. В результате выражение (5) принимает вид

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P + kA_N}{A} \right)^{1/n} \left(1 - \frac{kA_N - A + \gamma_0 \rho_0 (\rho/\rho_0)^{1-l} c_v (T - T_0)}{P + kA_N} \right)^{1/n}. \quad (11)$$

Функцию $[1 - (kA_N - A + \gamma_0 \rho_0 (\rho/\rho_0)^{1-l} c_v (T - T_0))/(P + kA_N)]^{1/n}$ можно разложить в ряд Тейлора по малому параметру, если $|(kA_N - A + \gamma_0 \rho_0 (\rho/\rho_0)^{1-l} c_v (T - T_0))/(P + kA_N)| < 1$. Это неравенство выполняется при $k > A/A_N$. Так как для пористых веществ при больших давлениях $A \sim A_N$, то значение $k > 2$ гарантирует выполнение условия сходимости. Таким образом, выражение (11) можно заменить сходящимся рядом

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P + kA_N}{A} \right)^{1/n} & \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{kA_N - A}{P + kA_N} + \frac{\gamma_0 \rho_0 (\rho/\rho_0)^{1-l} c_v (T - T_0)}{P + kA_N} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{n+1}{2n^2} \left(\frac{kA_N - A}{P + kA_N} + \frac{\gamma_0 \rho_0 (\rho/\rho_0)^{1-l} c_v (T - T_0)}{P + kA_N} \right)^2 + \dots \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Подставляя в (4) выражение (5) для плотности и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $(P + kA_N)^{-1}$, получаем соотношения для определения параметров смеси A , ρ_0 , n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{P + kA_N} \right)^{1/n} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{i0}} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i}, \\ \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{P + kA_N} \right)^{1/n} \frac{kA_N - A}{n} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{i0}} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i} \frac{kA_N - A_i}{n_i}, \\ \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{A}{P + kA_N} \right)^{1/n} (n+1) \left(\frac{kA_N - A}{n} \right)^2 &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{i0}} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i} (n_i + 1) \left(\frac{kA_N - A_i}{n_i} \right)^2. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $(T - T_0)(P + kA_N)^{-1}$ в (12) и подставляя выражение (5) для плотности, получаем выражение для определения коэффициента Грюнайзена смеси

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{P + kA_N} \right)^{l/n} \frac{\gamma_0 c_v}{n} \left(1 - \frac{1-l}{n} \left(\frac{kA_N - A}{P + kA_N} + \frac{\gamma_0 \rho_0 (\rho/\rho_0)^{1-l} c_v}{P + kA_N} \right) + \dots \right) = \\ = \sum_{i=1}^N \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{l_i/n_i} \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i} \left(1 - \frac{1-l_i}{n_i} \left(\frac{kA_N - A_i}{P + kA_N} + \frac{\gamma_{i0} \rho_{i0} (\rho_{ii}/\rho_{i0})^{1-l_i} c_{vi}}{P + kA_N} \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

Приравнявая в последнем равенстве главные члены разложений и коэффициенты при $(P + kA_N)^{-1}$, имеем выражения для определения параметров γ_0 и l в зависимости коэффициента Грюнайзена смеси от ρ :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_0 c_v}{n} \left(\frac{A}{P + kA_N} \right)^{l/n} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{l_i/n_i}, \\ \frac{1-l}{n} \frac{\gamma_0 c_v}{n} \left(\frac{A}{P + kA_N} \right)^{l/n} (kA_N - A) &= \sum_{i=1}^N \frac{1-l_i}{n_i} \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{l_i/n_i} (kA_N - A_i). \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$R_1 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{i0}} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i}, \quad R_2 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{i0}} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i} \frac{kA_N - A_i}{n_i},$$

$$R_3 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\rho_{i0}} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{1/n_i} (n_i + 1) \left(\frac{kA_N - A_i}{n_i} \right)^2,$$

$$R_4 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{l/n_i}, \quad R_5 = \sum_{i=1}^N \frac{1 - l_i}{n_i} \frac{x_i \gamma_{i0} c_{vi}}{n_i} \left(\frac{A_i}{P + kA_N} \right)^{l/n_i} (kA_N - A_i),$$

выражения для определения параметров уравнения состояния смеси $A, \rho_0, n, \gamma_0, l$ запишем в виде

$$n = \frac{R_1 R_3}{R_2^2} - 1, \quad A = kA_N - \frac{nR_2}{R_1}, \quad \rho_0 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{A}{P + kA_N} \right)^{1/n},$$

$$l = 1 - R_1 R_5 / (R_2 R_4), \quad \gamma_0 \rho_0 c_v = nR_4 / R_1. \quad (13)$$

Таким образом, получена вторая модель уравнения состояния смеси, параметры которой задаются соотношениями (13) и параметром k . Согласно этой модели параметры уравнения состояния смеси вычисляются с помощью одних и тех же выражений при любых значениях давления. Полученное уравнение состояния смеси удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в [11].

Увеличение массовой скорости в волне разрежения на участке от некоторой точки на адиабате Гюгонио до точки, в которой давление равно нулю, определяется интегралом Римана вдоль изоэнтропы

$$u_r = \int_{V(P_H)}^{V(0)} \left[- \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S \right]^{1/2} dV,$$

где $V(P_H), V(0)$ — соответственно удельные объемы на адиабате Гюгонио при давлении $P = P_H$ и на изоэнтропе разгрузки при давлении $P = 0$; S — энтропия. Скорость свободной поверхности $u_{fs} = u + u_r$ определяется экспериментально.

В случае когда удельная теплоемкость постоянна, уравнение изоэнтропы, связывающее состояния с параметрами V_1, T_1 и V_2, T_2 , имеет вид

$$T_2 = T_1 \exp \left(- \int_{V_1}^{V_2} \frac{\gamma(V)}{V} dV \right).$$

Для верификации уравнения состояния смеси, полученного с использованием второй модели, проведено сравнение расчетных и экспериментальных ударных адиабат и изоэнтроп разгрузки для пористых веществ.

Имеется обширная база данных для пористых веществ, которые можно рассматривать как простые смеси. В настоящей работе в качестве “рабочей” смеси используется пористая смесь вольфрама и меди. На рис. 3, 4 приведены ударные адиабаты для пористых вольфрама и меди. Результаты расчетов, выполненных для других пористых веществ, показывают, что экспериментальные и расчетные ударные адиабаты и изоэнтропы разгрузки хорошо согласуются. Это подтверждает правомерность использования данного уравнения состояния смеси.

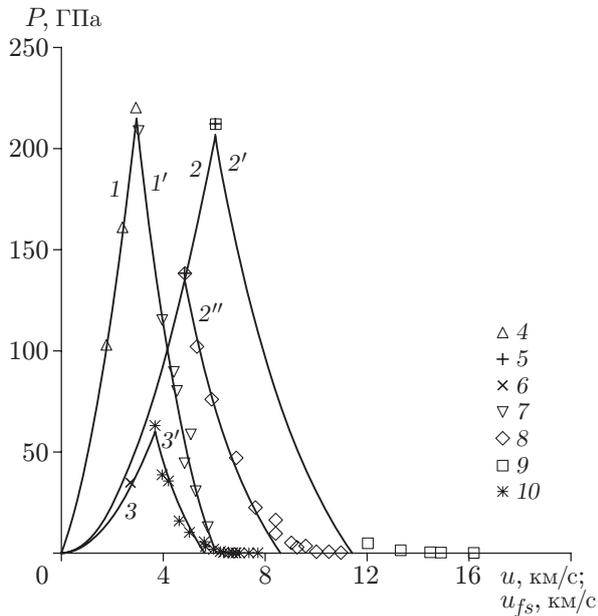


Рис. 3

Рис. 3. Ударные адиабаты $P-u$ (1–6) и изоэнтропы разгрузки $P-u_{fs}$ (1', 2', 2'', 3', 7–10) для сплошной и пористой меди при различных значениях начальной пористости m :

линии — результаты расчетов по второй модели (1, 1' — $m = 1$; 2, 2', 2'' — $m = 2,41$; 3, 3' — $m = 2,98$); точки — экспериментальные данные (4, 7 — $m = 1$ [13]; 5, 8, 9 — $m = 2,41$ [14]; 6, 10 — $m = 2,98$ [14])

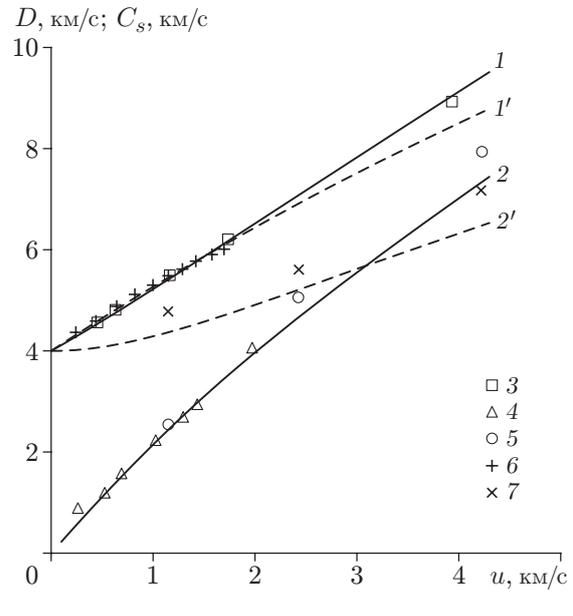


Рис. 4

Рис. 4. Ударные адиабаты (1–5) и зависимости скорости звука от массовой скорости за фронтом ударной волны в нагруженном образце (1', 2', 6, 7) для вольфрама: линии — результаты расчета, выполненного в настоящей работе (1, 1' — сплошное вещество, 2, 2' — пористое вещество ($m = 1,801$)); точки — экспериментальные данные (3, 6 — сплошное вещество [15], 4 — пористое вещество ($m = 1,816$) [16], 5, 7 — пористое вещество ($m = 1,801$) [17])

На рис. 3 приведены ударные адиабаты и изоэнтропы разгрузки для сплошной и пористой меди при различных значениях начальной пористости m . Под пористостью понимается отношение плотности монолита к плотности пористого вещества. Аналогичное сравнение проводилось для различных веществ при малых ($m \approx 1$) и больших ($m \approx 10$) значениях пористости. Во всех случаях расчетные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются.

На рис. 4 приведены ударные адиабаты для вольфрама в координатах $u - D$, а также зависимости скорости звука C_s от массовой скорости за фронтом ударной волны. Результаты сравнения кривых, описывающих скорость звука в пористом веществе, определенную с помощью предлагаемого уравнения состояния, с экспериментальными данными также подтверждают правомерность использования этого уравнения.

Существует небольшое количество экспериментальных работ, в которых исследовалась применимость полученного уравнения состояния смеси конденсированных компонентов. В [7] показано, что технические элкониты (смеси легкоплавких металлов (меди или серебра) с тугоплавкими материалами (вольфрамом или карбидом вольфрама)) являются простыми смесями при условии, что образцы состоят из частиц очень малого размера. В [7]

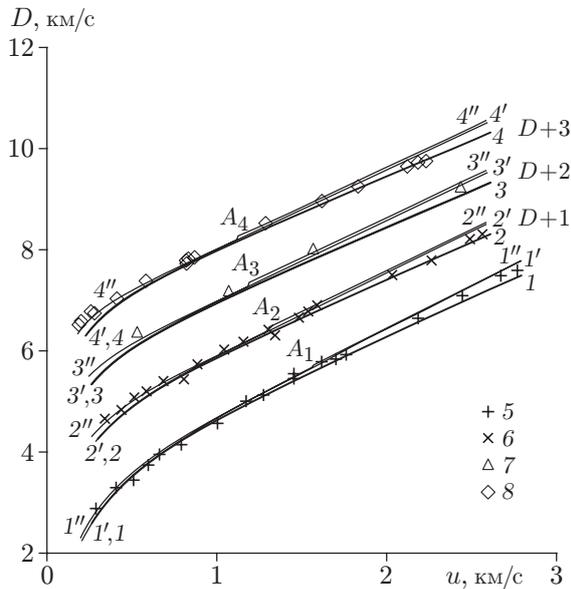


Рис. 5

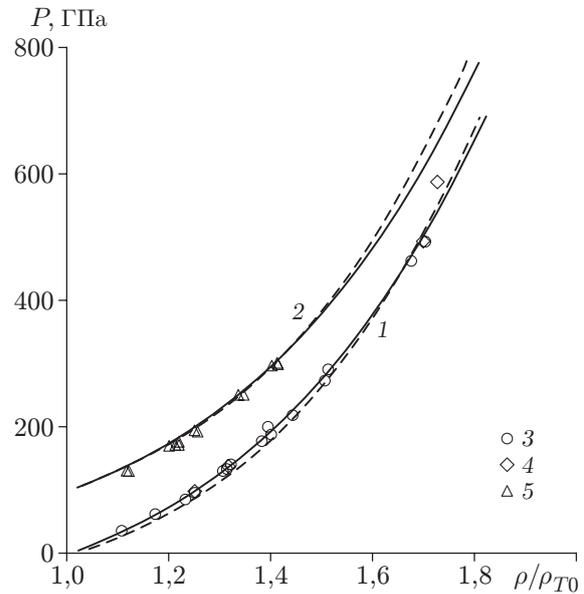


Рис. 6

Рис. 5. Ударные адиабаты для пористых элконитов:

1, 1', 1'', 5 — Elconit 2125C (25 % W — 75 % Cu), $m = 1,064$; 2, 2', 2'', 6 — Elconit 1W3 (55 % W — 45 % Cu), $m = 1,028$; 3, 3', 3'', 7 — Elconit 3W3 (68 % W — 32 % Cu), $m = 1,017$; 4, 4', 4'', 8 — Elconit 10W3 (75 % W — 24 % Cu), $m = 1,014$; 1–4 — результаты расчета по второй модели с переменным коэффициентом Грюнайзена, 1'–4' — результаты расчета по второй модели с постоянным коэффициентом Грюнайзена, 1''–4'' — результаты расчета по первой модели, 5–8 — экспериментальные данные [7]; A_1, A_2, A_3, A_4 — точки излома на ударных адиабатах 1''–4''

Рис. 6. Ударные адиабаты для пористых смесей вольфрам — никель — медь: 1 — смесь 90 % W — 6 % Ni — 4 % Cu; 2 — смесь 90 % W — 7,5 % Ni — 2,5 % Cu, $m = 1,026$; сплошные линии — результаты расчетов по второй модели с переменным коэффициентом Грюнайзена, штриховые линии — результаты расчетов, выполненных в [18], точки — экспериментальные данные (3 — данные [19]; 4, 5 — данные [20])

также отмечено, что многие так называемые сплавы в действительности представляют собой простые смеси.

На рис. 5 приведены ударные адиабаты для пористых систем вольфрам — медь с различной массовой долей компонентов. Для наглядности на графиках ударные адиабаты смещены вдоль оси D на указанные рядом с кривыми величины. В [7] отмечено, что разброс экспериментальных данных обусловлен незначительным различием состава и пористости различных элконитов. Сравнение расчетных и экспериментальных ударных адиабат позволяет сделать вывод, что предлагаемое уравнение состояния смеси достаточно точно описывает поведение среды. На рис. 5 видно, что при малых нагрузках уравнение состояния смеси (первая модель) более точно описывает поведение материала. Для пористых систем медь — алмаз получены аналогичные результаты.

На рис. 6 приведены ударные адиабаты для систем вольфрам — никель — медь (ρ_{T0} — начальная плотность монолита). Адиабаты, рассчитанные с использованием уравнения состояния смеси (вторая модель с переменным коэффициентом Грюнайзена), показаны сплошными линиями. При расчете этих ударных адиабат использовались параметры уравнений состояния чистых веществ, приведенные в [18]. Проведено сравнение с экспериментальными данными и расчетными адиабатами (штриховые линии), представленными

в работе [18]. В [18] используется модель расчета адиабат, предложенная в [6], но расчеты проведены с коэффициентом Грюнайзена, зависящим от температуры. Сравнение показывает, что результаты расчета ударных адиабат смесей обоими способами хорошо согласуются между собой и с экспериментальными данными.

Таким образом, уравнение состояния смеси, предложенное в данной работе, адекватно описывает поведение пористых веществ и смесей конденсированных компонентов при ударно-волновом нагружении и изоэнтропическом расширении в широком диапазоне значений давления, что подтверждают результаты сравнения с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
2. **Ляхов Г. М.** Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М.: Недра, 1974.
3. **Дунин С. З., Сурков В. В.** Структура фронта ударной волны в твердой пористой среде // ПМТФ. 1979. № 5. С. 106–114.
4. **Бельхеева Р. К.** Уравнение состояния пористой смеси конденсированных компонентов при динамических нагрузках // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 23–32.
5. **Бельхеева Р. К.** Уравнение состояния пористой смеси конденсированных компонентов с переменной теплоемкостью // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Физика. 2010. Т. 5, вып. 1. С. 82–88.
6. **Кинеловский С. А., Маевский К. К., Родиков А. С.** Одна модель расчета ударной адиабаты пористой гетерогенной среды // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Физика. 2008. Т. 3, вып. 1. С. 3–11.
7. **McQueen R. G., Marsh S. P., Taylor J. W.** The equation of state of solids from shock wave studies // High velocity impact phenomena / Ed. by R. Kinslow. N. Y.: Acad. Press, 1970. P. 293–417.
8. **Бельхеева Р. К.** Термодинамическое уравнение состояния для описания поведения пористой смеси при больших давлениях и температурах // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 53–60.
9. **Рахматулин Х. А.** О распространении волн в многокомпонентных средах // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 4. С. 598–601.
10. **Nixson R. S., Fritz J. N.** Shock compression of tungsten and molybdenum // J. Appl. Phys. 1992. V. 71, N 4. P. 1721–1728.
11. **Валько В. В., Ломоносов И. В., Острик А. В. и др.** Широкодиапазонные уравнения состояния конструкционных материалов // Физика ядерного взрыва: В 5 т. Т. 2. Действие взрыва. М.: Физматлит, 2010. С. 140–228.
12. **Зельдович Я. Б.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. М.: Физматгиз, 1963.
13. **Жерноклетов М. В., Зубарев В. Н., Сутулов Ю. Н.** Адиабаты пористых образцов и изэнтропы расширения сплошной меди // ПМТФ. 1984. № 1. С. 119–123.
14. **Альтшулер Л. В., Бушман А. В., Жерноклетов М. В. и др.** Изэнтропы разгрузки и уравнения состояния металлов при высоких плотностях энергии // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1980. Т. 78, № 2. С. 741–760.
15. **McQueen R. G., Marsh S. P.** Equation of state for nineteen metallic elements from shock-wave measurements to two megabars // J. Appl. Phys. 1960. V. 31, N 7. P. 1253–1297.

16. **Баканова А. А., Дудолодов И. П., Сутулов Ю. Н.** Ударная сжимаемость пористых вольфрама, молибдена, меди и алюминия в области низких давлений // ПМТФ. 1974. № 2. С. 117–122.
17. **Крупников К. К., Бражник М. И., Крупникова В. П.** Ударное сжатие пористого вольфрама // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1962. Т. 42, вып. 3. С. 675–685.
18. **Кинеловский С. А., Маевский К. К.** Расчет ударной адиабаты порошковых смесей с учетом зависимости коэффициента Грюнайзена от температуры // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Физика. 2009. Т. 4, вып. 4. С. 71–78.
19. **Isbell W. H., Shipman F. H., Jones A. H.** Hugoniot equation of state measurements for eleven materials to five megabars: Report / General Motors Corp.; Mat. Sci. Lab. N MSL-68-13. N. Y., 1968.
20. **Compendium** of shock wave data: Report / Lawrence Livermore Lab. N UCRL-50108. Livermore, 1977. P. 678–679.

*Поступила в редакцию 29/VII 2011 г.,
в окончательном варианте — 17/XI 2011 г.*
